Un problème du contrôle optimal LQ. Considérons le rendez-vous de deux vaisseaux spatiaux au voisinage de la terre. Supposons que le véhicule 1 est passif et de trajectoire circulaire, et que le véhicule 2 est actif dont le moteur exerce une poussée v pour rattraper le véhicule 1. Désignons par x le vecteur linéarisé de la position du véhicule 2 dans le repère mobile d'origine du vehicule 1. Alors x obéit aux équations de Hill

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0 \tag{1}$$

où

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On utilise un critère quadratique

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^T [(Qx(s), x(s)) + (Ru(s), u(s)]ds + \frac{1}{2}(Dx(T), x(T))$$

où D, R sont des matrices symétriques définies positives et Q est semi-définie positive. La pulsation ω correspond à la période de révolution $T = 2\pi/\omega$ du véhiciule 1 qui est égale à 5480 secondes pour la station spatiale internationale. Ceci fait $\omega = \pi/2740$.

S'il n'y a pas de contriante, alors on cherche à minimiser le critère $J(v)$ sur l'espace des contrôles $L^2(0,T) \times L^2(0,T)$. D'après la théorie de LQ, le contrôle optimal u est donné par

$$u = -R^{-1}B^T p(t), \tag{2}$$

où la variable $p(t)$ est solution de l'équation adjointe.

$$\dot{p}(t) = -A^T p(t) - Qx(t), \qquad p(T) = Dx(T). \tag{3}$$

Une méthode de Newton. On propose une méthode directe basée sur la méthode de Newton pour résoudre le système (1)-(3).

D'abord, on se donne une commande quelconque $u^{(0)}(t)$ pour intégrer le système

$$\dot{x}^{(0)}(t) = Ax^{(0)}(t) + Bu^{(0)}(t), \qquad x^{(0)}(0) = x_0, \tag{4}$$

$$\dot{p}^{(0)}(t) = -A^T p^{(0)}(t) - Qx^{(0)}(t), \qquad p^{(0)}(T) = Dx^{(0)}(T). \tag{5}$$

Puis, supposons que les variables $x^{(k)}(t)$ et $p^{(k)}(t)$ sont connues. Pour la remise à jour de $u^{(k+1)}(t)$, on minimise la fonction hamiltonienne $v \to H(x^{(k)}(t), v, p^{(k)}(t))$ par la méthode de Newton.

$$u^{(k+1)}(t) = u^{(k)}(t) - H_{uu}^{-1}(x^{(k)}(t), u^{(k)}(t), p^{(k)}(t))H_u(x^{(k)}(t), u^{(k)}(t), p^{(k)}(t)).$$

En utilisant

$$\begin{cases} H_u(x^{(k)}(t), u(t), p^{(k)}(t)) = B^T p^{(k)}(t) + Ru^{(k)}(t), \\ H_{uu}(x^{(k)}(t), u^{(k)}(t), p^{(k)}(t)) = R. \end{cases}$$

on obtient

$$u^{(k+1)}(t) = -R^{-1}B^T p^{(k)}(t). \tag{6}$$

Alors, on itère le schéma suivant jusqu'à la convergence.

$$\dot{x}^{(k+1)}(t) = Ax^{(k)}(t) - BR^{-1}B^T p^{(k)}(t), \qquad x^{(k+1)}(0) = x_0, \tag{7}$$

$$\dot{p}^{(k+1)}(t) = -A^T p^{(k)}(t) - Qx^{(k+1)}(t), \qquad p^{(k+1)}(T) = Dx^{(k+1)}(T). \tag{8}$$

Schéma d'Euler explicite. A titre d'exemple, on utilise le schéma d'Euler explicite pour intégrer le système (7)-(8). Soit $\Delta t > 0$, on définit la subdivision de l'intervalle $[0, T]$

$$t_n = n\Delta t, \qquad n = 0, 1, \cdots, N,$$

et les variables discrètes

$$x_n^{(k)} = x^{(k)}(t_n), \qquad p_n^{(k)} = p^{(k)}(t_n), \qquad u_n^{(k)} = u^{(k)}(t_n), \qquad n = 0, 1, \cdots, N.$$

La méthode d'Euler explicite permet d'écrire pour $k \geq 0$:

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(k+1)} = (I + \Delta t A)x_n^{(k)} - \Delta t BR^{-1}B^T p_n^{(k)}, \qquad n = 0, 1 \cdots, N-1, \\ x_0^{(k+1)} = x_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_n^{(k+1)} = (I - \Delta t A^T)p_{n+1}^{(k)} - \Delta t Q x_{n+1}^{(k+1)}, \qquad n = N-1, \cdots 1, 0, \\ p_N^{(k+1)} = Dx_N^{(k+1)}. \end{cases}$$

Pour l'initialisation, on utilise le schéma :

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(0)} = (I + \Delta t A)x_n^{(0)} - \Delta t B u_n^{(0)}, \qquad n = 0, 1 \cdots, N-1, \\ x_0^{(0)} = x_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_n^{(0)} = (I - \Delta t A^T)p_{n+1}^{(0)} - \Delta t Q x_{n+1}^{(0)}, \qquad n = N-1, \cdots 1, 0, \\ p_N^{(0)} = Dx_N^{(0)}. \end{cases}$$

Remarques. (i) A titre d'exemple, on peut choisir

$$\omega = \frac{\pi}{2740}, \qquad D = I_4, \qquad Q = \frac{1}{2}I_4, \qquad R = I_2.$$

(ii) Théoriquement, la suite $J(u^{(k)})$ est décroissante. Ainsi on peut arrêter l'itération quand la fonction coût J évaluée en étape k

$$J(u^{(k)}) = \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Big((Qx_n^{(k)}, x_n^{(k)}) + (Ru_n^{(k)}, u_n^{(k)}) \Big) + \frac{\Delta t}{2}(Dx_N^{(k)}, x_N^{(k)})$$

est inférieure à une précision convenable .

(iii) Le contrôle optimal u devrait être du type *bang-bang*, c'est-à-dire constantes par morceaux.