

M2 CSSI Projet EDP TP2

S1

1 Modèle de poutre: calcul de la matrice de rigidité élémentaire

Soit une poutre inextensible de longueur L pouvant subir des flexions et des torsions. La fibre moyenne de la poutre est paramétrée par $s \mapsto x(s)$, s désignant l'abscisse curviligne. Le vecteur tangent est noté $t(s) = x'(s)$. On complète en une base orthonormée mobile (t, n, b) . Si la poutre est droite (rectiligne), orientée dans la direction x_1 et sans torsion, on peut par exemple écrire $e_3 = (0, 0, 1)^T$

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\|e_3 \wedge t\|} e_3 \wedge t, \\ b &= t \wedge n. \end{aligned}$$

Si la poutre est gauche (courbe), on utilise un repère mobile tel que le repère (n, b) est attaché à la section droite ω .

La poutre est soumise à une force répartie $f = f_1 n + f_2 b$ et à un moment réparti M . Les inconnues du problème sont le déplacement de la fibre moyenne $u = vn + wb$ et la rotation θ de la section moyenne. Selon la physique, l'énergie élastique de la poutre est

$$E(u, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L A(t \wedge u' + \theta t)' \cdot (t \wedge u' + \theta t)' ds - \int_0^L f \cdot u ds - \int_0^L M \theta ds.$$

On suppose que les vecteurs (n, b) sont orientés suivant les axes principaux de la section ω . La matrice A est donc diagonale

$$A = \begin{bmatrix} \mu G & & \\ & EI_2 & \\ & & EI_3 \end{bmatrix}.$$

Les moments d'inertie I_2 et I_3 sont définis par

$$I_2 = \int_{\omega} x_3^2 dx_2 dx_3, \quad I_3 = \int_{\omega} x_2^2 dx_2 dx_3,$$

Le module de Young (voir wikipedia...) du matériau considéré est relié aux coefficients de Lamé λ et μ par $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$. Le coefficient G est donné par

$$G = \min \left\{ \int_{\omega} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} + x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - x_3 \right)^2 \right) dx_2 dx_3, \quad \psi \in H^1(\omega, \mathbb{R}^2) \right\}$$

et fera l'objet d'un TP séparé. Pour plus de détails sur la théorie, voir

<http://iospress.metapress.com/content/ewy4nhckclcgx163/>

Afin d'approcher la déformation et la rotation de la poutre, nous allons utiliser une interpolation d'Hermite pour le déplacement u et une interpolation de Lagrange pour la rotation. Pour cela, nous devons définir diverses fonctions sur l'élément de référence $[0, 1]$

$$\begin{aligned} L_1(\xi) &= 1 - \xi \\ L_2(\xi) &= \xi \\ H_1(\xi) &= 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \\ D_1(\xi) &= \xi^3 - 2\xi^2 + \xi \\ H_2(\xi) &= -2\xi^3 + 3\xi^2 \\ D_2(\xi) &= \xi^3 - \xi^2 \end{aligned}$$

Les fonctions $L_{1,2}$ sont associées à la rotation θ . Les fonctions $H_{1,2}$ sont associées au déplacement u et les fonctions $D_{1,2}$ à la dérivée du déplacement u' . Nous définissons les noeuds du maillage par $x_i = x((i-1)\Delta s)$, $i = 1 \cdots N+1$, $\Delta s = L/N$. L'élément E_k correspond à l'élément de poutre compris entre x_k et x_{k+1} , $k = 1 \cdots N$. Chaque noeud x_i du maillage reçoit 5 degrés de

liberté (d.d.l. dans le jargon des éléments finis) inconnus. Ces d.d.l. sont rangés dans l'ordre suivant $(v_i, v'_i, w_i, w'_i, \theta_i)$ sur chaque noeud i . Il est utile de construire 2 tableaux de connectivité. Un tableau *connec* pour la connectivité éléments-noeuds

$$connec(ii, k) = ii + (k - 1), \quad ii = 1 \cdots 2, \quad k = 1 \cdots N$$

et un tableau *ddl* pour la connectivité éléments-ddl

$$ddl(ii, k) = ii + 5(k - 1) \quad ii = 1 \cdots 10, \quad k = 1 \cdots N$$

Le vecteur global des inconnues est donc le vecteur

$$U = (v_1, v'_1, w_1, w'_1, \theta_1, v_2, v'_2, w_2, w'_2, \theta_2, \cdots, v_{N+1}, v'_{N+1}, w_{N+1}, w'_{N+1}, \theta_{N+1})^T.$$

Ce vecteur contient les valeurs des d.d.l. aux noeuds du maillage. Pour appliquer la méthodes des éléments finis, il faut construire une interpolation des inconnues (v, w, θ) à partir de ces valeurs. Les fonctions (v, w) seront de classe C^1 tandis que θ sera juste continue. L' interpolation est d'abord construite à partir d'une transformation τ_k qui transforme l'élément de référence en l'élément E_k . Soit $x_{ii,k}$, $ii = 1, 2$, les deux noeuds de l'élément k (donc $x_{connec(ii,k)} = x_{ii,k}$). Pour une poutre droite la transformation τ_k peut être définie par

$$\tau_k(\xi) = x_{1,k}L_1(\xi) + x_{2,k}L_2(\xi).$$

Les diverses fonctions de base sont définies par

$$\begin{aligned} h_i(\tau_k(\xi)) &= H_{ii}(\xi) \quad i = connec(ii, k) \\ d_i(\tau_k(\xi)) &= \frac{1}{\Delta x} D_{ii}(\xi) \quad i = connec(ii, k) \\ \phi_i(\tau_k(\xi)) &= L_{ii}(\xi) \quad i = connec(ii, k) \end{aligned} \tag{1}$$

Par construction, ces fonctions de base satisfont

$$\begin{aligned} h_i(x_j) &= \delta_{ij} \\ h'_i(x_j) &= 0 \\ d_i(x_j) &= 0 \\ d'_i(x_j) &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Les interpolations sont

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{j=1}^N v_j h_j(x) + v'_j d_j(x) \\ w(x) &= \sum_{j=1}^N w_j h_j(x) + w'_j(x) d_j(x) \\ \theta(x) &= \sum_{j=1}^N \theta_j \phi_j(x) \\ u(x) &= v(x)n(x) + w(x)b(x) \end{aligned} \tag{2}$$

L'espace d'approximation V est l'ensemble des (v, w, θ) de la forme (2) (c'est donc un espace vectoriel de dimension le nombre de d.d.l. inconnus) tels que $v(0) = w(0) = v'(0) = w'(0) = \theta(0) = 0$ (condition d'encastrement). La dérivée de l'énergie s'écrit pour $(y, \rho) \in V$

$$E'(u, \theta, y, \rho) = \int_0^L A(t \wedge u' + \theta t)' \cdot (t \wedge y' + \rho t)' ds - \int_0^L f \cdot y ds - \int_0^L M \rho ds.$$

Le problème discret est alors:

trouver $(v, w, \theta) = (u, \theta) \in V$ tel que $\forall (y, \rho) = (y_2, y_3, \rho) \in V$ on ait

$$E'(u, \theta, y, \rho) = 0.$$

Pour calculer la matrice de rigidité globale A et le second membre F du système

$$AU = F$$

il faut écrire deux procédures d'assemblage. Pour calculer la matrice élémentaire, on peut par exemple procéder de la façon suivante: on considère d'abord les contributions de l'énergie

$$C_k = \frac{1}{2} \int_{E_k} A(t \wedge u' + \theta t)' \cdot (t \wedge u' + \theta t)' ds$$

En se ramenant sur l'élément de référence

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2} \int_{[0,1]} A \frac{d}{ds} (t \wedge \frac{du}{ds} + \theta t) \cdot \frac{d}{ds} (t \wedge \frac{du}{ds} + \theta t) \frac{ds}{d\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_{[0,1]} A \frac{d}{d\xi} (t \wedge \frac{1}{\Delta x} \frac{du}{d\xi} + \theta t) \cdot \frac{d}{d\xi} (t \wedge \frac{1}{\Delta x} \frac{du}{d\xi} + \theta t) \frac{1}{\Delta x} d\xi \end{aligned}$$

En utilisant les formules (2) et (1) nous obtenons

$$C_k = \int_{[0,1]} c_k(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_{[0,1]} A \frac{d}{d\xi} \left[\begin{array}{c} \theta_{1,k} L_1(\xi) + \theta_{2,k} L_2(\xi) \\ -\frac{d}{d\xi} (w_{1,k} H_1(\xi) + w_{2,k} H_2(\xi) + w'_{1,k} \Delta x D_1(\xi) + w'_{2,k} \Delta x D_2(\xi)) / \Delta x \\ \frac{d}{d\xi} (v_{1,k} H_1(\xi) + v_{2,k} H_2(\xi) + v'_{1,k} \Delta x D_1(\xi) + v'_{2,k} \Delta x D_2(\xi)) / \Delta x \end{array} \right] \cdot \frac{d}{d\xi} \left[\begin{array}{c} \cdots \\ idem \\ \cdots \end{array} \right] \frac{1}{\Delta x} d\xi$$

Nous définissons ensuite

$$\begin{aligned} vni(1, 1, ipg) &= H_1(\eta_{ipg}) \\ vni(2, 1, ipg) &= D_1(\eta_{ipg}) \\ vni(3, 1, ipg) &= H_2(\eta_{ipg}) \\ vni(4, 1, ipg) &= D_2(\eta_{ipg}) \\ vni(5, 1, ipg) &= L_1(\eta_{ipg}) \\ vni(6, 1, ipg) &= L_2(\eta_{ipg}) \end{aligned}$$

puis $vni(\cdot, 2, ipg)$ et $vni(\cdot, 3, ipg)$ les dérivées et dérivées secondes (par rapport à l'abscisse curviligne s et non par rapport à ξ) des mêmes quantités aux points de Gauss de l'élément de référence. Soit le vecteur

$$\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_{10})^T = (v_{1,k}, v'_{1,k}, w_{1,k}, w'_{1,k}, \theta_{1,k}, v_{2,k}, v'_{2,k}, w_{2,k}, w'_{2,k}, \theta_{2,k})^T$$

alors l'intégrande $c_k(\xi)$ de C_k apparaît comme une forme quadratique du vecteur α . La matrice hessienne de cette forme quadratique par rapport à α doit être intégrée par la méthode de Gauss sur $[0, 1]$ pour obtenir la matrice de rigidité élémentaire. Voir la feuille de calcul Maple sur <http://www-irma.u-strasbg.fr/~helluy/edpp/projetedp.html>.

2 Questions

On commencera par étudier le cas de la poutre droite où $x(s) = (s, 0, 0)$, $s \in [0, L]$. On posera $G = \mu = I_2 = I_3 = 1$ dans un premier temps.

1. Préparer tous les tableaux de connectivité $connec(1 : 2, 1 : N)$ et $ddl(1 : 10, 1 : N)$, coordonnées des noeuds, tableaux des points de Gauss $vni(1 : 6, 1 : 3, 1 : npg)$
2. Vérifier votre programmation sur un maillage à 2 éléments
3. Au moyen de la feuille de calcul Maple fournie, écrire l'intégration de Gauss qui permet d'obtenir la matrice de rigidité de l'élément $[0, 1/2]$ et de l'élément $[1/2, 1]$.
4. écrire la procédure d'assemblage de la matrice globale A . Vérifier votre programme sur un maillage à 2 éléments.
5. décrire le calcul du vecteur force élémentaire.
6. écrire la procédure d'assemblage du vecteur force F . Vérifier votre programme sur un maillage à 2 éléments.
7. décrire l'application des conditions aux limites par la méthode de pénalisation.
8. Vérifier sur des petits maillages et pour des configurations particulières (par exemple $\theta \equiv f_3 \equiv 0$) que votre programme fonctionne. Visualiser avec gnuplot la déformée de la poutre.
9. Effectuer un calcul réaliste pour une vraie poutre (récupérer les valeurs physiques de G, μ, I_2, I_3). Vous pouvez aussi réaliser vos propres expériences (en suspendant un poids à une extrémité par exemple).

3 Question subsidiaire

Réaliser un modèle élément fini d'une poutre gauche générale...