

M2 CSSI Projet EDP TP3

S1

1 Modèle de poutre: calcul de la rigidité de torsion

D'après le TP précédent, le coefficient G est donné par

$$G = \min \left\{ \int_{\omega} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} + x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - x_3 \right)^2 \right) dx_2 dx_3, \quad \psi \in H^1(\omega) \right\}$$

1. On pose $x = x_2$, $y = x_3$ et

$$f(\psi) = \int_{\omega} ((\partial_y \psi + x)^2 + (\partial_x \psi - y)^2) dx dy.$$

Soit $\psi \in H^1(\omega)$ tel que $f(\psi) = \inf_{\phi} f(\phi)$. Montrer que pour tout $\phi \in H^1(\omega)$, $f'(\psi, \phi) = 0$ où $f'(\psi, \phi)$ est défini par

$$f'(\psi, \phi) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\psi + t\phi) - f(\psi)}{t}.$$

2. Calculer $f'(\psi, \phi)$.
3. Montrer que si ψ est de classe C^2 alors ψ est solution du problème aux limites

$$\begin{aligned} -\Delta \psi &= 0, \quad \text{dans } \omega, \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} &= g, \end{aligned}$$

où g est une fonction que l'on déterminera.

2 Calcul avec FreeFem++

1. Installer FreeFem++ (logiciel gratuit pour Windows, Linux ou MacOS développé à l'Université Paris VI <http://www.freefem.org>). Vérifier l'installation au moyen de quelques exemples fournis dans le dossier `examples++-tutorial`.
2. Soit $\omega \subset \mathbb{R}^2$. Montrer que, à une translation et une rotation dans le plan près, on peut toujours se ramener au cas où

$$\int_{\omega} x dx dy = \int_{\omega} y dx dy = \int_{\omega} xy dx dy = 0.$$

3. En utilisant FreeFem++, calculer le coefficient de rigidité de torsion, ainsi que les axes d'inerties et les moments d'inertie, pour diverses formes de sections ω (forme en "T" en "H", en anneau par exemple), la surface totale de ω étant fixée. Selon le type de chargement (torsion ou flexion) quelle sont les meilleures sections ?
4. Calculer la déformation réaliste de vraies poutres, avec des sections variées. Comparer à des résultats expérimentaux.