Mécanique des fluides numérique

P. Helluy

ENSMP

Janvier 2006

Section 1

Notations

Notations : vecteurs sans flèche ; Exemple : $x = (x_1, x_2, x_3)^T$;
Somme sur les indices répétés ; Exemple : $a_i b_i = \sum_{i=1}^{i=3} a_i b_i$.
Inconnues : densité $\rho(x,t)$, vitesse $u(x,t)$, pression $p(x,t)$, énergie interne $\varepsilon(x,t)$.
Volume de contrôle Ω de frontière $\partial\Omega$ et de vecteur normal unitaire sortant n.
Soit un petit élément de surface de $\partial\Omega$ noté dS et une quantité c se déplaçant à la vitesse u. Entre t et $t+dt$ la quantité de c qui traverse dS de l'intérieur vers l'extérieur est $cu \cdot ndSdt$. Le flux de c à travers dS est $cu \cdot n$.
Lois de conservation.

Section 2

Modèle général de Naviers-Stokes

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho dv = -\int_{\partial\Omega}\rho u \cdot ndS \tag{1}$$

Puis par formule de la divergence

$$\rho_t + \mathrm{div}(\rho u) = 0 \tag{2}$$

Remarque :

$$\rho_t = \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3}$$

$$\mathrm{div}(\rho u) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = (\rho u_i)_{x_i} = (\rho u_i)_{,i} \tag{4}$$

$$
\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho u_i dv = \underbrace{-\int_{\partial\Omega}\rho u_i u\cdot n dS}_{\text{convection}} + \underbrace{\int_{\Omega} f_i dv}_{\text{forces volumiques}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega}\sigma_{ij} n_j dS}_{\text{forces exté rieures}} \tag{5}
$$

Le tenseur des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})$ est symétrique.

$$
(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u - \sigma) = f \tag{6}
$$

Le tenseur $u \otimes u = (u_i u_j)$. Pour un tenseur la divergence est donnée par

$$
\operatorname{div}(\sigma) = (\sigma_{ij,j}) \tag{7}
$$

Soit $E(x,t)$ l'énergie massique totale. $E = \varepsilon + u^2/2$. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit

$$\begin{aligned} &\underbrace{\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho E dv}_{\text{variation de qdm}} = -\underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho E u \cdot n dS}_{\text{convection}} + \underbrace{\int_\Omega f \cdot u}_{\text{puissance des forces volumiques}} \\ &+ \underbrace{\int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot u dS}_{\text{puissance forces exté rieures}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \theta \cdot n}_{\text{flux de chaleur}} + \underbrace{\int_\Omega \pi}_{\text{source volumique}} \end{aligned} \tag{8}$$

$$(\rho E)_t + \mathrm{div}(\rho E u - \sigma u + \theta) = f \cdot u + \pi \tag{9}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\,(u_{i,j} + u_{j,i}) + (\zeta - \frac{2\mu}{3})u_{k,k}\delta_{ij} \tag{10}$$

Avec δ symbole de Krönecker, μ viscosité du fluide (mesurée expérimentalement : dépend en général de la température).
En pratique, la seconde viscosité $\zeta = 0$.
Conduction de la chaleur : $\theta = -\kappa\nabla T$
Loi de pression : $p = p(\rho, \varepsilon)$
Loi de température : $\varepsilon = C_v T$.

Section 3

Équations d'Euler compressibles 1D

En négligeant la viscosité et la conduction thermique et en supposant l'écoulement 1D, on trouve

$$
\begin{aligned}
&w_t + f(w)_x = 0,\\
&w = (\rho, \rho u, \rho E),\\
&f(w) = (\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E + p)u),\\
&p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \quad \text{(gaz parfait, } \gamma > 1).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Le système (11) admet des solutions discontinues (ondes de choc). Conditions de Rankine-Hugoniot

$$(w_D - w_G)n_t + (f(w_D) - f(w_G))n_x = 0 \tag{12}$$

Où $(n_x, n_t) = (1, -u_0)$ est un vecteur normal à la discontinuité dans le plan (x, t). (G) est le côté de $-n$ et (D) le côté de $+n$. u_0 est la vitesse du choc.
Exemple : choc stationnaire. Sélection au moyen de la condition d'entropie

$$\begin{aligned} &((\rho s)_D - (\rho s)_G)n_t + ((\rho u s)_D - (\rho u s)_G)n_x \geqslant 0, \\ &s = C_v \ln(p/\rho^\gamma). \end{aligned} \tag{13}$$

Une onde de raréfaction ou détente est une solution 1D de (11) de la forme $w(x,t) = v(x/t)$.
Invariants de Riemann : ils sont constants dans une détente.
Pour Euler : les invariants de Riemann sont

$$u \pm \frac{2c}{\gamma - 1} \text{ et } s \tag{14}$$

Exemple de solution de type détente.

On considère un tube infini dans la direction $x = x_1$. La partie gauche du tube est remplie d'un gaz dans l'état $(\rho_G, u_G = 0, p_G)$ et la partie droite du même gaz dans l'état $(\rho_D, u_D = 0, p_D)$. Les deux parties sont séparées par une membrane que l'on retire à l'instant $t = 0$. Que se passe-t-il ?

Question : Une bouteille d'eau à moitié pleine (hauteur d'eau : $H = 15$ cm) est posée sur la table. Je la soulève. Au bout de combien de temps la surface de l'eau suit-elle le mouvement ?

Maillage, Choix du modèle, Calcul, Visualisations.
FLUENT permet-il de retrouver les solutions analytiques comme les chocs et les détentes ?

Section 4

Navier-Stokes visqueux incompressible

On suppose $\rho = Cste$ alors

$$\begin{aligned} &divu = 0, \\ &u_t + u_i \partial_i u + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta u = f/\rho. \end{aligned} \tag{15}$$

où ν est la viscosité cinématique.
Nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu}$. Adimensionnement

$$\begin{aligned} &divu = 0, \\ &u_t + (u\nabla) u + \nabla p - \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta u = f/\rho. \end{aligned} \tag{16}$$

Quand $\mathrm{Re} \to 0$, écoulement de Stokes.

Théorie mathématique complète en 2D, mais pas en 3D (unicité ?).
Évolution de l'écoulement pour Reynolds allant de 0 à ∞ :

- convergence vers un état stationnaire ;
- état périodique ;
- état quasi-périodique ;
- état chaotique (turbulence) ;

Dans le monde réel, on est presque toujours dans l'état 4. En 2D
Attracteur étrange de dimension $\sim C\,\mathrm{Re}^{4/3}$: nombre de mailles $> C\nu^{-9/4}$!

"zoom" près d'une paroi plane horizontale. Équations de Prandtl (si u_1 ne change pas de signe)

$$\begin{aligned} & u_1 u_{1,x} + u_2 u_{1,y} - \nu u_{1,yy} = -p_{,x} \\ & p_{,y} = 0 \\ & u_{2,y} = -u_{1,x} \end{aligned} \tag{17}$$

valides à une distance $< \delta$ de la paroi $y = 0$. Au delà, Euler ($\nu = 0$). On trouve que u se comporte comme

$$u \simeq U(1 - e^{-y/\sqrt{\nu}}) \tag{18}$$

où U est solution du modèle Euler ($\nu = 0$, $U \cdot n = 0$ à la paroi).

Épaisseur de la couche limite $\delta = O(\sqrt{\nu})$. Problème de maillage. On écrit donc au dessus de la couche limite

$$u + \delta \nabla u \cdot n = 0 \tag{19}$$

Si paroi rugueuse

$$\begin{aligned} u_2 &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} &= g(u_1) \end{aligned} \tag{20}$$

Section 5

Turbulence de Reynolds

On décompose l'écoulement u en une partie filtrée $\overline{u}$ et une partie chaotique u'. Idéalement, le filtre doit être une projection linéaire, commuter avec les dérivées et satisfaire

$$\overline{v\overline{u}} = \overline{v}\ \overline{u} \tag{21}$$

Contraintes de Reynolds

$$R = -\overline{u' \otimes u'} \tag{22}$$

$U = \overline{u}$ vérifie alors

$$\begin{aligned} &U_t + U\nabla U + \nabla P - \nu \Delta U - divR = 0 \\ &\mathrm{div} U = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Problème : "loi de comportement" pour R.

$$k = \frac{1}{2}\overline{|u'|^2}, \quad \varepsilon = \frac{\nu}{2}\overline{|\nabla u' + \nabla u'^T|^2} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
&\nu_T = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, E = \frac{1}{2}\left|\nabla U + \nabla U^T\right|^2, P^* = P + \frac{2}{3}k, \\
&D_t k - \nabla \cdot (\nu_T \nabla k) - c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} E + \varepsilon = 0, \\
&D_t \varepsilon - \nabla \cdot (\frac{c_\varepsilon}{c_\mu} \nu_T \nabla \varepsilon) - c_1 k E + c_2 \frac{\varepsilon^2}{k} = 0, \\
&D_t U + \nabla P^* - \nabla \cdot \left[(\nu + \nu_T)(\nabla U + \nabla U^T)\right] = 0, \\
&\nabla \cdot U = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

$$c_\mu = 0.09, \quad c_1 = 0.126, \quad c_2 = 1.92, \quad c_\varepsilon = 0.07. \tag{26}$$

Décollement.
Comme pour le laminaire pb de maillage dans la couche limite décollée.

$$u^* = \sqrt{\nu U_{1,y}} \quad y^* = \frac{\nu}{u^*} \quad y^+ = \frac{y}{y^*} \quad u^+ = \frac{U}{u^*} \tag{27}$$

Alors pour $20 < y^+ < 100$ des expériences montrent que

$$u^+ = \frac{1}{\chi} \log y^+ + 5.5 \quad \chi = 0.41 \tag{28}$$

χ est la "constante" de von Karman. Et pour $0 < y^+ < 20$

$$u^+ = y^+ \tag{29}$$

On utilise la loi de paroi

$$\begin{aligned}
&u \cdot n = 0, \\
&\frac{u \cdot s}{\sqrt{\nu \left|\frac{\partial u}{\partial u}\right|}} - \frac{1}{\chi} \log\left(\delta \sqrt{\frac{1}{\nu}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|}\right) + 5.5 = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Il faut vérifier *a posteriori* que

$$20\sqrt{\nu \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^{-1}} < \delta < 100\sqrt{\nu \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^{-1}} \tag{31}$$

Exemple n1 du "tutorial". Dans ce cas, équation d'énergie découplée

$$T_t + u \cdot \nabla T - \frac{\kappa}{\rho C_v} \Delta T = \frac{\nu}{2 C_v} \left| \nabla u + \nabla u^T \right|^2 . \qquad (32)$$

+ des termes de turbulence...

Section 6

Pertes de charges

Écoulement stationnaire, incompressible, non visqueux, laminaire avec gravité. La **charge** est constante le long des lignes de courant

$$D_t(\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h) = 0 \tag{33}$$

Pression motrice (ou piézométrique)

$$\widehat{p} = p + \rho g h \tag{34}$$

Pour un écoulement visqueux, laminaire ou turbulent, on observe des pertes de charge par dissipation.

Quand $Re = VD/\nu < 2000$ (très rare...), écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique horizontale. Profil de vitesse :

$$v = -\frac{d\widehat{p}}{dy}\frac{1}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right) \quad Q = -\frac{d\widehat{p}}{dy}\frac{\pi R^4}{8\mu}$$
$$V_m = \frac{Q}{S} = \frac{V_{\max}}{2} \tag{35}$$

Charge moyenne

$$H_m = \alpha\frac{V_m^2}{2g} + \frac{\widehat{p}}{\rho g} \quad \alpha = 2 \tag{36}$$

Le profil des vitesses est plus aplati donc $\alpha \simeq 1.1$.
Sur une longueur L entre (1) et (2) la perte de charge est

$$\frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\rho g} = \lambda \frac{L}{D} \frac{V_m^2}{2g} \quad \lambda = \lambda\left(\mathrm{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \tag{37}$$

λ est le coefficient de perte de charge régulière, ε est la hauteur moyenne des aspérités ou rugosité absolue. Formule de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right) \tag{38}$$

Les changements de pente, de section, les clapets, vannes, etc. provoquent des pertes de charge dites singulières.

$$H_{m1} - H_{m2} = K \frac{V_m^2}{2g} \tag{39}$$

Dans cette formule V_m est la vitesse la plus grande de part et d'autre de la singularité. Exemple : élargissement brusque de section de S_1 à S_2

$$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \tag{40}$$

On considère une conduite horizontale de longueur 4 m subissant un élargissement brusque en $x = 0$.
La moitié gauche a un diamètre de 0.4 m et la moitié droite un diamètre de 0.6 m. De l'eau s'écoule de gauche à droite à la vitesse de 1 m/s.
Comparer la perte de charge évaluée par FLUENT avec celle donnée par les formules semi-empiriques.

Section 7

Écoulements multiphasiques

voir cours sur les volumes finis

voir documentation FLUENT

On considère une boîte carrée 2D de côté 1m dans le champs de pesanteur.

1) Le fond de la boîte est rempli d'eau sur 0.5 m. La boîte est soumise à une accélération constante horizontale de 3 m/s^2. Calculer théoriquement et numériquement (avec FLUENT) la position de la surface libre en régime stationnaire.

2) La partie inférieure gauche est remplie d'eau (un carré de 0.5 m de côté), retenue par une plaque. A l'instant t=0, on retire la plaque. Étudier l'évolution de la surface libre au cours du temps à l'aide de FLUENT.

Section 8

Méthodes numériques