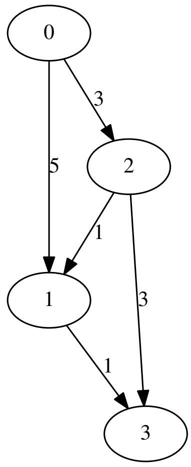
Examen Graphe II

M1 CSMI - Janvier 2017 - Durée 2h - Documents interdits

Exercice I - Dijkstra

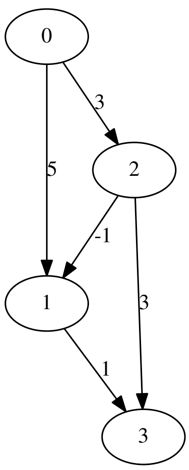
1. Rappeler l'algorithme de Dijkstra pour calculer un chemin optimal dans un graphe.

2. Pour le graphe suivant, calculer le chemin le plus court de 0 à 3 en utilisant l'algorithme de Dijkstra. On présentera les itérations de l'algorithme sous forme d'un tableau où chaque ligne correspond à une itération.



Exercice II - Bellman-Ford

1. Rappeler l'algorithme de Bellman-Ford pour calculer un chemin optimal dans un graphe.
2. Pour le graphe suivant, calculer le chemin le plus court de 0 à 3 en utilisant l'algorithme de Bellman-Ford. On présentera les itérations de l'algorithme sous forme d'un tableau où chaque ligne correspond à une itération.



3. Soit deux matrice carrées de même taille, A et B. On définit le produit de A et B au sens de "l'algèbre $(\min, +)$", $C = A \odot B$ par la formule

$$C_{ij} = \min_k A_{ik} + B_{kj}.$$

On note

$$C^{\odot n} = \underbrace{C \odot \ldots \odot C}_{n \text{ fois}}$$

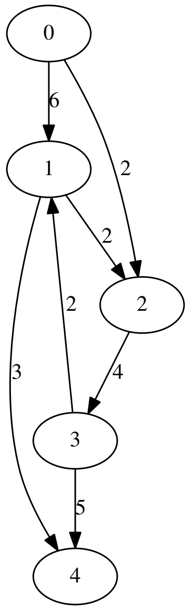
Soit G un graphe orienté valué à n sommets sans circuit absorbant. Au moyen d'une matrice A bien choisie, montrer qu'appliquer l'algorithme de Bellman-Ford pour calculer la longueur du plus court chemin de i à j est équivalent à calculer

$$A^{\odot n}.$$

Appliquer au graphe de la question 2. Comment retrouve-t-on le chemin (et pas seulement sa valeur) dans cette écriture de l'algorithme ?

Exercice III - Ford-Fulkerson

Au moyen de l'algorithme de Ford-Fulkerson, calculer le flot maximal pouvant circuler dans le graphe suivant du sommet 0 au sommet 4 (les arcs sont valués par leurs capacités).



On représentera la valeur du flot et le marquage sur le graphe **uniquement pour la dernière itération de l'algorithme** (faire les autres itérations au brouillon). Vérifier la loi des noeuds pour chaque sommet. Vérifier aussi que la coupe de capacité minimale correspond bien à la valeur du flot obtenu.

Exercice IV - Matrices creuses

1. On considère la matrice creuse suivante

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Donner son graphe d'adjacence.
b) Combien de mémoire faut-il pour stocker cette matrice sous forme ligne de ciel ?
c) Renuméroter les inconnnues par l'algorithme de Cuthill-McKee en partant du sommet 5. Donner la matrice de permutation P associé au changement de base pour la nouvelle numérotation.
d) Donner le nouveau profil de la matrice $A' = P^{-1}AP$.
e) Même question en prenant la permutation inverse. Conclusion ?