Quelques modèles d'onde

9 février 2025

1 Schéma saute-mouton pour l'équation des ondes avec absorption sur le bord

1.1 Modèle mathématique

Nous souhaitons résoudre l'équation des ondes dans un domaine

$$\Omega =]0, L[\times]0, H[.$$

La source sonore est notée $s(x, t)$.
L'inconnue est la pression

$$p(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T],$$

solution de l'équation des ondes

$$p_{tt} - c^2 \Delta p = s. \tag{1}$$

Sur le bord, nous allons considérer des conditions aux limites dissipatives. Pour cela, soit une onde plane incidente de la forme

$$p_0(x, t) = A \exp(-i\omega t + ik \cdot x),$$

d'amplitude A, de pulsation ω et de vecteur d'onde k. Rappelons que la pulsation est liée à la fréquence f de l'onde par

$$\omega = 2\pi f.$$

La longueur d'onde est

$$\lambda = \frac{c}{f}.$$

Cette fonction est solution de l'équation des ondes si

$$-\omega^2 + c^2 k^2 = 0,$$

soit

$$\omega = c\,|k|\,.$$

En 2D nous pouvons aussi écrire

$$k = \frac{\omega}{c}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

où θ est l'angle d'incidence de l'onde par rapport à la paroi. L'onde est réfléchie et absorbée sur une paroi de normale unitaire $n = (1,0)$. Le vecteur d'onde réfléchie s'écrit

$$k' = k - 2(k\cdot n)n = \frac{\omega}{c}\begin{pmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

Et l'onde réfléchie a la forme

$$p_1 = rA\exp(-i\omega t + ik'\cdot x),$$

où le coefficient de réflexion r est compris entre 0 (absorption maximale) et 1 (réflexion maximale). Nous cherchons une condition vérifiée par l'onde totale

$$p = p_0 + p_1.$$

La dérivée normale de p s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial n} = A\exp(-i\omega t)\left(ik\cdot n\exp(ik\cdot x) + rik'\cdot n\exp(ik'\cdot x)\right),$$

soit

$$\frac{\partial p}{\partial n} = iA\frac{\omega}{c}\exp(-i\omega t)\cos\theta\left(\exp(ik\cdot x) - r\exp(ik'\cdot x)\right).$$

D'autre part,

$$p = A\exp(-i\omega t)\left(\exp(ik\cdot x) + r\exp(ik'\cdot x)\right).$$

Nous trouvons, pour un point sur le bord de la forme $x = (0, x_2)$:

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{p} = \frac{i\omega\cos\theta}{c}\frac{1-r}{1+r} = \frac{i\omega}{c}\frac{1-r}{1+r} + O(\theta^2).$$

Une condition aux limites approchée s'écrit donc

$$\frac{\partial p}{\partial n} = i\frac{\omega}{c}p\frac{1-r}{1+r}$$

ou encore

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{c}\frac{1-r}{1+r}\frac{\partial p}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Cette condition limite est bien compatible avec une propriété de décroissance de l'énergie acoustique

$$E = \frac{1}{2}\left(p_t^2 + (\nabla p)^2\right).$$

En effet, en multipliant (1) par p_t et en intégrant sur Ω, nous trouvons

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\left(p_t^2\right)_t + \nabla p \cdot \nabla p_t - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n} p_t = 0.$$

Donc

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\left(p_t^2\right)_t + \frac{1}{2}\left(\nabla p^2\right)_t - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n} p_t = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega E = -\frac{1}{c}\int_{\partial\Omega} \frac{1-r}{1+r}\left(p_t\right)^2 \leq 0.$$

Nous constatons que l'énergie décroît. Elle est conservée si $r = 1$ (réflexion maximale des ondes).

1.2 Approximation par différences finies 1D

Nous commençons par écrire le schéma en 1D sans source sonore. Nous considérons un nombre de points de discrétisation $N > 1$. Le pas d'espace est donné par

$$\Delta x = \frac{L}{N-1},$$

le pas de temps est noté Δt. Les points de discrétisation sont

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0 \ldots N-1.$$

Nous cherchons une approximation

$$p_i^n \simeq p(x_i, n\Delta t).$$

Le schéma saute-mouton s'écrit

$$\frac{-p_i^{n-1} + 2p_i^n - p_i^{n+1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{-p_{i-1}^n + 2p_i^n - p_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0, \quad i = 1 \ldots N-2.$$

Soit

$$p_i^{n+1} = -p_i^{n-1} + 2(1-\beta^2)p_i^n + \beta^2\left(p_{i-1}^n + p_{i+1}^n\right), \tag{3}$$

avec

$$\beta = \frac{c\Delta t}{\Delta x}.$$

C'est le coefficient de CFL, il doit être plus petit que 1.

Pour $i = 0$ et $i = N-1$ le schéma doit être modifié pour tenir compte des conditions aux limites.

Si $i = 0$,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -p_x \simeq \frac{-p_{i+1}^n + p_{i-1}^n}{2\Delta x} = -\frac{1}{c}\frac{1-r}{1+r}\frac{p_i^{n+1} - p_i^{n-1}}{2\Delta t}.$$

Soit

$$p_{-1}^n = p_1^n - \frac{1}{\beta}\frac{1-r}{1+r}\left(p_0^{n+1} - p_0^{n-1}\right). \tag{4}$$

De même, si $i = N-1$,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = p_x \simeq \frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2\Delta x} = -\frac{1}{c}\frac{1-r}{1+r}\frac{p_i^{n+1} - p_i^{n-1}}{2\Delta t}.$$

Soit

$$p_N^n = p_{N-2}^n - \frac{1}{\beta}\frac{1-r}{1+r}\left(p_{N-1}^{n+1} - p_{N-1}^{n-1}\right). \tag{5}$$

Grâce à (4) et (5), le schéma (3) a encore un sens pour $i = 0$ et $i = N-1$. En remplaçant p_{-1}^n et p_N^n dans (3) par les valeurs données respectivement par (4) et (5), on obtient les formules de mise à jour suivantes pour les points de bord :

$$p_0^{n+1} = \frac{1}{1+r^*}\left((r^*-1)\,p_0^{n-1} + 2\beta^2(p_1^n - p_0^n) + 2p_0^n\right) \tag{6}$$

$$p_{N-1}^{n+1} = \frac{1}{1+r^*}\left((r^*-1)\,p_{N-1}^{n-1} + 2\beta^2(p_{N-2}^n - p_{N-1}^n) + 2p_{N-1}^n\right) \tag{7}$$

avec

$$r^* = \beta\frac{1-r}{1+r}$$

1.3 Approximation par différences finies 2D

En 2D, il faut rajouter la deuxième direction, avec un paramètre de discrétisation $M > 1$

$$\Delta y = \frac{H}{M-1}.$$

De même

$$y_j = j\Delta y, \quad j = 0\ldots M-1.$$

$$p_{i,j}^n \simeq p(x_i, y_j, n\Delta t).$$

Il y a maintenant deux coefficients de CFL

$$\beta_x = \frac{c\Delta t}{\Delta x}, \quad \beta_y = \frac{c\Delta t}{\Delta y}$$

En 2D, le schéma saute-mouton avec source sonore s'écrit

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{n+1} = {} & -p_{i,j}^{n-1} + 2(1-\beta_x^2-\beta_y^2)p_{i,j}^n \\ & + \beta_x^2\left(p_{i-1,j}^n + p_{i+1,j}^n\right) + \beta_y^2\left(p_{i,j-1}^n + p_{i,j+1}^n\right) + \Delta t^2 s_{i,j}^n. \end{aligned} \tag{8}$$

Pour les bords, il faut utiliser les relations suivantes

$$p_{-1,j}^n = p_{1,j}^n - \frac{1}{\beta_x}\frac{1-r}{1+r}\left(p_{0,j}^{n+1} - p_{0,j}^{n-1}\right). \tag{9}$$

$$p_{N,j}^n = p_{N-2,j}^n - \frac{1}{\beta_x}\frac{1-r}{1+r}\left(p_{N-1,j}^{n+1} - p_{N-1,j}^{n-1}\right). \tag{10}$$

$$p_{i,-1}^n = p_{i,1}^n - \frac{1}{\beta_y}\frac{1-r}{1+r}\left(p_{i,0}^{n+1} - p_{i,0}^{n-1}\right). \tag{11}$$

$$p_{i,M}^n = p_{i,M-2}^n - \frac{1}{\beta_y}\frac{1-r}{1+r}\left(p_{i,M-1}^{n+1} - p_{i,M-1}^{n-1}\right). \tag{12}$$

Nous pouvons encore écrire (9) sous la forme

$$p_{0,j}^{n+1} = p_{0,j}^{n-1} + \left(p_{1,j}^n - p_{-1,j}^n\right)\frac{1+r}{1-r}\beta_x. \tag{13}$$

En faisant α(8)+$(1-\alpha)$(13) nous trouvons

$$\begin{aligned} p_{0,j}^{n+1} = (1-2\alpha)p_{0,j}^{n-1} &+ 2\alpha(1-\beta_x^2-\beta_y^2)p_{0,j}^n \\ &+ \alpha\beta_x^2\left(p_{-1,j}^n + p_{1,j}^n\right) + \alpha\beta_y^2\left(p_{0,j-1}^n + p_{0,j+1}^n\right) + \alpha\Delta t^2 s_{0,j}^n \\ &\qquad + (1-\alpha)\left(p_{1,j}^n - p_{-1,j}^n\right)\frac{1+r}{1-r}\beta_x. \end{aligned}$$

Il faut maintenant choisir α de sorte que les termes en $p_{-1,j}^n$ disparaissent. Nous trouvons

$$\alpha\beta_x - (1-\alpha)\frac{1+r}{1-r} = 0,$$

soit, en posant

$$\gamma = \frac{1-r}{1+r},$$

$$\alpha = \frac{1}{1+\beta_x\gamma}.$$

Notons que $0 < \alpha \leq 1$ et que $\alpha = 1$ correspond à la réflexion idéale (condition de Neumann). Finalement

$$\begin{aligned} p_{0,j}^{n+1} = (1-2\alpha)p_{0,j}^{n-1} &+ 2\alpha(1-\beta_x^2-\beta_y^2)p_{0,j}^n \\ &+ 2\alpha\beta_x^2 p_{1,j}^n + \alpha\beta_y^2\left(p_{0,j-1}^n + p_{0,j+1}^n\right) + \alpha\Delta t^2 s_{0,j}^n. \end{aligned}$$

Nous obtenons des formules similaires pour les autres bords.