Transfo de Legendre et schéma numérique

2.3 FLT
9.4 Mocke

$$\partial_t w + \partial_x f(w) = 0 \quad (*)$$

$$w : (x, t) \longmapsto w(x,t) \in \mathbb{R}^m$$

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

<u>Exemple</u> : Burgers, pas existence, plus d'unicité, condition d'entropie, solution faible, Rankine-Hugoniot. $S'f' = G'$

<u>th</u> : soit w_ε :

$$\partial_t w_\varepsilon + \partial_x f(w_\varepsilon) - \varepsilon \, \partial_{xx} w_\varepsilon = 0$$

$w_\varepsilon \to w$ dans alors w sol. entropique

<u>preuve</u> :

On multiplie par $\nabla_{w_\varepsilon} S(w_\varepsilon) = \left(\frac{\partial S}{\partial w_1} \cdots \frac{\partial S}{\partial w_m} \right)$

$$\partial_t S(w_\varepsilon) + \nabla S . f' \, \partial_x w_\varepsilon - \varepsilon \nabla S(w) \, \partial_{xx} w_\varepsilon = 0$$

$$\partial_t S(w_\varepsilon) + \partial_x G(w_\varepsilon) - \varepsilon \, \partial_{xx} S(w_\varepsilon) + \nabla^2 S \, \partial_x w_\varepsilon \, \partial_x w_\varepsilon \, \varepsilon$$

On multiplie par $\varphi \geq 0$:

$$\int \partial_t S(w_\varepsilon) \varphi + \int \partial_x G(w_\varepsilon) - \int \varepsilon \, \partial_{xx} S(w_\varepsilon) \varphi$$

$w_\varepsilon \to w$ dans L^∞ faible étoile ≤ 0

Pour Burgers on retrouve $w_L > w_R$

~~[illegible]~~

Système hyperbolique : $f'(w)$ est diagonalisable avec des vp réelles. Dépend pas des variables choisies.

Système symétrisable : il existe un changement de variables $w = w(\varphi)$ dans lequel

$$w'(\varphi)\, \partial_t \varphi + f'(w)\, w'(\varphi)\, \partial_x \varphi = 0$$

$$\partial_t \varphi + \underbrace{w'(\varphi)^{-1} f'(w)\, w'(\varphi)}_{\text{symétrique}} \partial_x \varphi = 0$$

Prop : (*) symétrisable $\Rightarrow$ hyperbolique

Th : (*) est symétrisable ssi il admet une entropie

dem : On suppose que le système admet une entropie (S, F).

On note S^* la transfo de Legendre de S :

$$S^*(\varphi) = w \cdot \varphi - S(w)$$

$$\varphi = S'(w)$$

et F^+ la quantité $F^+(\varphi) = \varphi f(w) - F(w)$

En calculant le gradient, on voit que

$$\nabla F^+(\varphi) = f(w) - \underbrace{\varphi f'(w) w'(\varphi)}_{F'} - F'(w) w'$$

$$= f(w)$$

On considère le schéma : (1)

$$(1) \int_{C_i} \frac{dw_L}{dt} + \int_{\partial C_i} \nabla_\varphi \Sigma'^{*+}(\varphi_L, n) + \nabla_\varphi \Sigma'^{*-}(\varphi_R, n) = 0$$

Avec $\Sigma'^{*}(\varphi, n) = \sum_{k=1}^{d} S_k^{*}(\varphi)\, n$ $\quad d = 1$

$$S_k^{*}(\varphi) = \varphi f_k(w) - S_k(w)$$

(ce n'est pas une vraie TL).

On suppose qu'on est capable de décomposer en

a) $\Sigma^{*}(\varphi, n) = \Sigma'^{+}_{*}(\varphi, n) + \Sigma'^{-}_{*}(\varphi, n)$

b) avec $\Sigma'^{+}_{*}(\varphi, -n) = -\Sigma'^{-}_{*}(\varphi, n)$

c) $\Sigma'^{+}_{*}(\varphi, n)$ est convexe et $\Sigma'^{-}_{*}(\varphi, n)$ est concave

~~Alors : (1) vérifie~~ :

~~$\int_{C_i} \frac{dS_L}{dt} +$~~ On a

$$\Sigma'(\varphi, n) = \varphi \nabla_\varphi \Sigma'^{*}(\varphi, n) - \Sigma'^{*}(\varphi, n)$$

On définit donc $\Sigma'(\varphi, n)^{\pm}$ par la ~~m~~ méthode

$$\Sigma'(\varphi, n)^{\pm} = \varphi \nabla_\varphi \Sigma'^{\pm}_{*}(\varphi, n) - \Sigma'^{\pm}_{*}(\varphi, n)$$

~~Alors (1)~~ devient

de plus $$\int_{C_k} \partial_i \nabla_\varphi \Sigma^{*}(\varphi_L, n_i) = 0$$

soit $$\int_{C_k} \nabla_\varphi \Sigma^{*}(\varphi_L, n) = 0$$

on en déduit que (1) peut aussi s'écrire :

$$\int_{C_i} \frac{dW_L}{dt} + \int_{\partial C_i} \nabla_\varphi \bar{\Sigma}^{*}(\varphi_R, n) - \nabla_\varphi \bar{\Sigma}^{*}(\varphi_L, n) = 0$$

On multiplie par φ_L :

$$\int_{C_i} \frac{dS_L}{dt} + \int_{\partial C_i} \underbrace{\varphi_L\left(\nabla_\varphi \bar{\Sigma}^{*}(\varphi_R, n) - \nabla_\varphi \bar{\Sigma}^{*}(\varphi_L, n)\right)}_{ff} = 0$$

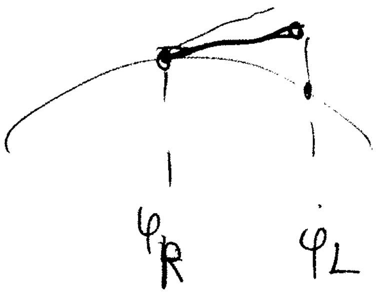
$$\cancel{(ff) = \int_{\partial C_i} \varphi_L \nabla_\varphi \bar{\Sigma}^{*}(\varphi_R, n) - \bar{\Sigma}(\varphi_L, n) - \bar{\Sigma}^{*}(\varphi_L, n)}$$

$$0 = \int_{\partial C_i} \frac{\partial S_L}{dt} + \int_{\partial C_i} \varphi_L \nabla_\varphi \Sigma^{*}(\varphi_R, n) - \bar{\Sigma}(\varphi_L, n) - \bar{\Sigma}^{*}(\varphi_L, n)$$

$$= \int_{\partial C_i} \frac{\partial S_L}{dt} + \int_{\partial C_i}$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi_R \nabla_\varphi \Sigma'^{*-}(\varphi_R, m) + \nabla_\varphi \Sigma'^{*-}(\varphi_R, m)(\varphi_L - \varphi_R) \\
&\quad - \Sigma'^{*-}(\varphi_L, m) - \Sigma'^{*-}(\varphi_L, m) - \Sigma'^{*-}(\varphi_R, m) \\
&\quad + \Sigma'^{*-}(\varphi_R, m)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \Sigma'^{-}(\varphi_R, m) + \Sigma'^{+}(\varphi_L, m) \\
& + \Sigma'^{*-}(\varphi_R, m) - \Sigma'^{*-}(\varphi_L, m) \\
& + \nabla_\varphi \Sigma'^{*-}(\varphi_R, m)(\varphi_L - \varphi_R)
\end{aligned}
$$



≥ 0

$$\Sigma'^{*-}(\varphi_L, m) \leq \Sigma'^{*-}(\varphi_R, m) + \nabla \Sigma'^{*-}(\varphi_R, m)(\varphi_L - \varphi_R$$

$$\Rightarrow \int_{\partial C_i} \frac{dS_L}{dt} + \int_{\partial C_i} \Sigma'^{-}(\varphi_R, m) + \Sigma'^{+}(\varphi_L, m)$$

$$\leq 0$$

Exemple : équations d'Euler pour $\gamma = 3$ (4)

$$\cancel{\ldots} \quad K(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2/2 \end{pmatrix}$$

H^* : fonction convexe de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Sigma^*(\varphi, n) = \int v\, n\, H^*(\varphi \cdot K(v))\, dv$$

$$S_0^*(\varphi) = \int H^*(\varphi \cdot K(v))\, dv$$

(Donc $S_1^*(\varphi) = \int v\, H^*(\varphi \cdot K(v))\, dv$

~~Alors~~ $\cancel{S_0(w) = \int H(}$

On voit que $w = \int H^{*\prime}(\varphi \cdot K(v))\, K(v)\, dv$

~~et~~ $\cancel{S_0(w) = \int H(w \cdot K(v))\, dv}$

lemme 1 : $\cancel{\ldots}$ soit $g^*(\varphi) = \int_v \lambda(v, \varphi)\, dv$

alors $g^{**}(w) = \int_v \lambda^*(v, w)\, dv$

~~Application~~ $\cancel{S_0(w) = \int}$

lemme 2 : soit $g^*(\varphi) = H^*(\varphi \cdot K)$

alors $g(w) = H(\varphi \cdot K)$

donc $S_0(w) = \int_v H(\varphi \cdot K)$

($\cancel{\ldots\ \varphi \cdot K =}$ et $w = K H^{*\prime}(\varphi \cdot K)$

Exemple : $H(f) = f(\ln f - 1)$

$$H^*(p) = p \cdot f - f(\ln f - 1)$$

$$p = \ln f$$

$$f = e^p$$

$$H^*(p) = pe^p - e^p(p-1)$$

$$= e^p \qquad H^{*'}(p) = e^p$$

donc $w = \int e^{\varphi \cdot k(v)} k(v)\, dv$

On en déduit $\varphi =$

$\vdots$

etc

```
> restart:assume(a3>0);u:=0;
```

$$u := 0 \tag{1}$$

```
> f:=exp(a1+a2*v-a3*v^2);
```

$$f := e^{a1 + a2\,v - a3{\sim}\,v^2} \tag{2}$$

```
> eq1:=int(f,v=-infinity..infinity)=r;
```

$$eq1 := \frac{e^{\frac{1}{4}\,\frac{4\,a1\,a3{\sim} + a2^2}{a3{\sim}}}\,\sqrt{\pi}}{\sqrt{a3{\sim}}} = r \tag{3}$$

```
> eq2:=int(f*v,v=-infinity..infinity)=r*u;
```

$$eq2 := \frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{1}{4}\,\frac{4\,a1\,a3{\sim} + a2^2}{a3{\sim}}}\,a2\,\sqrt{\pi}}{a3{\sim}^{3/2}} = 0 \tag{4}$$

```
> eq3:=int(f*v^2/2,v=-infinity..infinity)=r*u^2/2+p/2;
```

$$eq3 := \frac{1}{8}\,\frac{e^{\frac{1}{4}\,\frac{4\,a1\,a3{\sim} + a2^2}{a3{\sim}}}\,a2^2\,\sqrt{\pi}}{a3{\sim}^{5/2}} + \frac{1}{4}\,\frac{e^{\frac{1}{4}\,\frac{4\,a1\,a3{\sim} + a2^2}{a3{\sim}}}\,\sqrt{\pi}}{a3{\sim}^{3/2}} = \frac{1}{2}\,p \tag{5}$$

```
> sol:=solve({eq1,eq2,eq3},{a1,a2,a3});
```

$$sol := \left\{a3{\sim} = \frac{1}{2}\,\frac{r}{p},\ a2 = 0,\ a1 = \ln\left(\mathrm{RootOf}\left(2\,p\,\_Z^2\,\pi - r,\ label = \_L1\right)\,r\right)\right\} \tag{6}$$

```
> allvalues(sol);
```

$$\left\{a3{\sim} = \frac{1}{2}\,\frac{r}{p},\ a2 = 0,\ a1 = \ln\left(\frac{1}{2}\,\sqrt{2}\,\sqrt{\frac{r}{p\,\pi}}\,r\right)\right\},\ \left\{a3{\sim} = \frac{1}{2}\,\frac{r}{p},\ a2 = 0,\ a1 = \ln\left(-\frac{1}{2}\,\sqrt{2}\,\sqrt{\frac{r}{p\,\pi}}\,r\right)\right\} \tag{7}$$

```
> restart:assume(r>0,p>0);
> f:=(r^3/2/Pi/p)^(1/2)*exp(-r*(v-u)^2/2/p);
```

$$f := \frac{1}{2}\,\sqrt{2}\,\sqrt{\frac{r{\sim}^3}{\pi\,p{\sim}}}\;e^{-\frac{1}{2}\,\frac{r{\sim}\,(v-u)^2}{p{\sim}}} \tag{8}$$

```
> eq1:=int(f,v=-infinity..infinity)-r;eq2:=int(f*v,v=-infinity..
  infinity)-r*u;eq3:=int(f*v^2/2,v=-infinity..infinity)-(r*u^2/2+
  p/2);
```

$$eq1 := 0$$
$$eq2 := 0$$
$$eq3 := 0 \tag{9}$$

```
> int(exp(-v^2),v=-infinity..infinity);
```

$$\sqrt{\pi} \tag{10}$$

```
> int(f*v^3/2,v=-infinity..infinity);
```

$$\frac{1}{2}\,r{\sim}\,u^3 + \frac{3}{2}\,u\,p{\sim} \tag{11}$$

```
>
```

Formule de Lax-Oleinik

$\Gamma'_0(\mathbb{R}^n)$: ensemble des fonctions convexes sci sur $\mathbb{R}^n$ (toutes les fonctions sont propres avec une minorante affine).

Soit $f \in \Gamma'_0(\mathbb{R}^n)$ et $\theta \in \Gamma'_0(\mathbb{R}^n)$ telle que

$\theta(0)$ est fini et

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\theta(x)}{\|x\|} = +\infty$$

On cherche des solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} + \theta^*(\nabla_x F) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\\ F(x,0) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n . \end{cases}$$

On considère

$$H : (y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longmapsto H(y,s) = \begin{cases} f^*(y) & \theta^*(y)+s \leq 0 \\ +\infty & \end{cases}$$

montrons que $H \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$

θ^* est convexe sci $/(y,s)$

et $s \mapsto s$ est affine

donc $C = \{(y,s),\ \theta^*(y)+s \leq 0\}$

est un convexe fermé.

$H(y,s) = f^*(y) + \chi_C(y,s)$

est donc convexe sci

Calculons la conjuguée de H : (2)

$$H^*(x,t) = \sup_{y,s} \left(xy + st - f^*(y) - \chi_C(y,s)\right)$$

$$= \sup_{y,\ s \geq -\theta^*(y)} \left(xy + st - f^*(y)\right)$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } t < 0 \\ f(x) & \text{si } t = 0 \\ \left(t\,\theta^*(\cdot) + f^*(\cdot)\right)^* & \end{cases}$$

On est dans les conditions d'application du théorème d'inf-convolution :

$\underline{\underline{t > 0}}$

$$F(x,t) = \sup_y \left(xy - f^*(y) - t\,\theta^*(y)\right)$$

donc $F(x,t) \leq \sup_y \left(xy - f^*(y) - t \inf \theta^*(y)\right)$

$$= \sup_y \left(xy - f^*(y) + t\,\theta(0)\right)$$

$$= f(x) + t\,\theta(0)$$

③

On calcule la transfo de Legendre de

$\lambda g(\cdot)$: $(\lambda > 0)$.

$$(\lambda g)^*(x) = \sup_y xy - \lambda g(y)$$

$$= \lambda \sup_y \frac{x}{\lambda} y - g(y)$$

$$= \lambda g^*\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

donc $(t\theta^*)^* = t\,\theta\left(\frac{\cdot}{t}\right)$

Donc pour $t > 0$:

$$H^*(x,t) = \inf_y \left(f^*(y) + t\,\theta^*\left(\frac{x-y}{t}\right)\right)$$

On pose donc

$$F(x,t) = \begin{cases} \inf_y \left(f^*(y) + t\,\theta^*\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) \\ f(x) \text{ si } t = 0 \\ +\infty \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Vérifions que $F(x,t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} f(x)$

On a à t fixé >0 que

$F(x,t)$ est la TL de $f^*(y) + t\theta^*(y)$

$$F(x,t) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} (xy) - f^*(y) - t\theta^*(y)$$

$$F(x,t) \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^n} xy - f^*(y) - t \inf_y \theta^*(y)$$

$$\inf_y \theta^*(y) = -\sup_y (y\cdot 0) - \theta^*(y)$$

$$= -\theta^{**}(0) = -\theta(0)$$

donc $F(x,t) \leq f(x) + t\theta(0)$

$$\Rightarrow \overline{\lim_{t\to 0^+}} F(x,t) \leq f(x)$$

De même : $\forall y \in \mathbb{R}^n$:

$$F(x,t) \geq xy - f^*(y) - t\theta^*(y)$$

$$\underline{\lim_{t\to 0^+}} F(x,t) \geq xy - f^*(y)$$

$$\underline{\lim_{t\to 0^+}} F(x,t) \geq \sup xy - f^*(y) = f(x)$$

donc $F(x,t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} f(x)$

On suppose maintenant que ~~#~~ θ est différentiable partout où elle admet des sous-gradients.

Rappels sur les sous-gradients

soit $x \in \operatorname{dom} f$

déf : $\partial f(x) = \{ s,\ \forall x' \in \mathbb{R}^n,\ f(x') \geq f(x) + \langle s, x'-x \rangle \}$
(éventuellement $= \emptyset$).

prop : ~~$\partial f(x)$~~ $\left\{ \begin{array}{l} s \in \partial f(x) \\ \Leftrightarrow \quad f^*(s) + f(x) = \langle s, x \rangle \end{array} \right.$

prop : $f \in \Gamma_0 \Rightarrow \partial f(x) \neq \emptyset$ si $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$

f différentiable en x ~~ssi~~ $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

$\partial f^* = \partial f^{-1}$

- c'est à dire que $s \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(s)$.

- Notion un peu subtile
  $ri\, C$ = interieur de C relatif à l'enveloppe affine de C.
  $x \in ri\, C \Leftrightarrow x \in \operatorname{aff} C$ and $\exists \delta > 0$,
  $\operatorname{aff} C \cap B(x, \delta) \subset C$

exemples : dimension d'un convexe.

prop : soient f_1 et f_2 si $|f_1(x)| < +\infty$
$|f_2(x)| < +\infty$

$$\partial(f_1+f_2) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x).$$

prop : f_1 et $f_2 \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$
$x \in \mathrm{dom}\,(f_1 \square f_2)$ $\exists\,(x_1, x_2)$

$$f_1 \square f_2\,(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

$$\Rightarrow \partial(f_1 \square f_2)(x) = \partial f_1(x_1) + \partial f_1(x_2)$$

prop : $f_1, f_2 \dots f_k \in \Gamma_0$

$$\partial(\max_i f_i)(x) = \mathrm{co}\left\{ \bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x) \right\}$$

$$I(x) = \{ i,\ f_i(x) = f(x) \}.$$

prop : si $\mathrm{in}(\mathrm{dom} f_1) \cap \mathrm{in}(\mathrm{dom} f_2)$
on un point commun
alors $(f_1+f_2)^* = f_1^* \square f_2^*$
et l'inf est atteint.

$\cdot\ H(y,s) = \underbrace{f^*(y)}_{H_1} + \underbrace{\chi_C(y,s)}_{H_2}$

~~dom~~

$\text{dom } H_1 = \text{dom } f^* \times \mathbb{R}$

$\text{dom } H_2 = \{ y,s, \quad \theta^*(y) + s \leq 0 \}$

θ^* est finie car $\frac{\theta(x)}{\|x\|} \to +\infty$.

donc $\text{ri } H_1 \cap \text{ri } H_2 \neq \emptyset$.

donc l'inf convolution est exacte.

si $(x,t) \in \text{dom } F$

$F(x,t) = H_1^*(x-z, t-u) + H_2^*(z,u)$

et $\partial F(x,t) = \partial H_1^*(x-z, t-u) \cap \partial H_2^*(z,u)$

$H_1^*(w,r) = f(w)$ si $r=0$ $\quad +\infty$ sinon.

$H_2^*(w,r) = r\,\theta\left(\frac{w}{r}\right)$ si $r>0$

donc $u=t$.

$F(x,t) = H_1^*(x-z,0) + \cancel{H_2} \, t\,\theta\left(\frac{z}{t}\right)$

et $\partial F(x,t) = \partial H_1^*(x-z,0) + \partial H_2^*(z,t)$

F est C^0 en $(x,t) \Rightarrow \partial F(x,t) \neq \emptyset$.

$\partial H_2^*(z,t) = \left\{ \nabla\theta\left(\frac{z}{t}\right) \right\} \times \left\{ \theta\left(\frac{z}{t}\right) - \frac{1}{t}\theta'\left(\frac{z}{t}\right) \cdot z \right\}$

$$\partial H_1^*(x-z,0) = \partial f(x-z) \times \mathbb{R}$$

donc

$$\nabla_x F(x,t) = \nabla\theta\left(\frac{z}{t}\right)$$

et
$$\frac{\partial F}{\partial t} = \theta\left(\frac{z}{t}\right) - \frac{1}{t}\nabla\theta\left(\frac{z}{t}\right) \cdot z$$

$$= -\theta^*\left(\nabla\theta\left(\frac{z}{t}\right)\right)$$

donc
$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\theta^*\left(\nabla_x F(x,t)\right)$$

<u>Exemple</u>: Burgers avec fonction ↗

et appli. ~~~~

Dualité en optimisation convexe

$\inf P = \inf_{u \in X} J(u)$ $\qquad$ P : problème primal

u solution si $J(u) = \inf P$

On perturbe le problème en introduisant

$\phi(u,p)$ tel que $\phi(u,0) = J(u)$

$p \in Y$.

ϕ^* conjuguée de ϕ / (u,p).

$$\sup_{q \in Y^*} \left(-\phi^*(0,p^*)\right) \quad : \quad P^*$$

p^* est solution de P^* ~~si~~

$$-\phi^*(0,p^*) = \sup P^*$$

On va supposer que ϕ est convexe, sci / (u,p) et que ϕ est propre.

Soit $h(p) = \inf P_p = \inf_{u \in X} \phi(u,p)$

<u>lemme</u> : h est convexe.

<u>dém</u> : $\forall, a > h(p)$ et $b > h(q)$, $\exists (\tilde{u}, \tilde{v})$

$$h(p) \leqslant \phi(u, p) \leqslant a$$

$$h(q) \leqslant \phi(v, q) \leqslant b$$

$$h(\lambda p + (1-\lambda) q)$$

$$= \inf_w \phi(w, \lambda p + (1-\lambda) q)$$

$$\leqslant \phi(\lambda u + (1-\lambda) v, \lambda p + (1-\lambda) q)$$

$$\leqslant \lambda \phi(u, p) + (1-\lambda) \phi(v, q)$$

$$\leqslant \lambda a + (1-\lambda) b$$

en passant à la limite. CQFD

<u>lemme</u> : $h^*(p^*) = \phi^*(0, p^*)$

évident. et $\sup P^* = h^{**}(0)$

comme $h^{**}(0) \leqslant h(0)$

on a $\sup P^* \leqslant \inf P$

Prop : si P et P* possèdent des solutions et si $\inf P = \sup P^*$, ce nombre étant fini alors $\bar{u}$ et $\bar{p}^*$ solution sont reliés par la relation d'extrémalité

$$\phi(\bar{u}, 0) + \phi^*(0, \bar{p}^*) = 0$$

$$\iff (0, \bar{p}^*) \in \partial\phi(\bar{u}, 0)$$

$$\iff (\bar{u}, 0) \in \partial\phi^*(0, \bar{p}^*)$$

dem : découle de

$$\phi(\bar{u}, 0) + \phi^*(0, \bar{p}^*) = 0$$

$$= \langle (\bar{u}, 0), (0, \bar{p}^*) \rangle$$

(d'habitude, on a une inégalité $\geq$)

Le problème technique est donc d'assurer

$$h^{**}(0) = \sup P^*$$
$$= h(0) = \inf P$$

Il manque une condition technique sur h (appelée parfois hypothèse de qualification)

<u>lemme</u> : $\exists u_0 \in X$ $\quad p \to \phi(u_0, p)$ est finie et continue en $p = 0$.

alors $h(0) = h^{**}(0)$

<u>preuve</u> : $\phi(u_0, \cdot)$ continue en $p = 0$ et finie

$\Rightarrow \exists$ voisinage V de 0 tel que et M

$$\phi(u_0, p) \leq M < +\infty \quad \forall p \in V$$

$\Rightarrow h(p) \leq M$ sur V

donc h est continue en 0 donc sous-différentiable

donc $h(0) = h^{**}(0)$

~~$h^{**}(0)$ ... sup~~

<u>Rappel</u>: $h^{**}(x) = \sup \{ g(x), g \text{ affine}, g \leq h \}$

$\exists x^* \in \partial h(0) \iff \forall y \in E,$

$$h(y) - h(0) \geq (x^*, y - 0)$$

$$h(y) \geq h(0) + \langle x^*, y \rangle$$

donc $h^{**}(0) \geq h(0) \quad \Rightarrow h(0) = h^{**}(0)$

On a utilisé le lemme

<u>lemme</u> : soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe

$f(u) < +\infty$ et f continue en u alors $\forall v \in \operatorname{dom} f$

$\partial F(v) \neq \emptyset$ (donc $\partial F(u) \neq \emptyset$).

dém : F est bornée supérieurement au voisinage de u donc continue sur un voisinage de u – Il suffit donc de montrer que $\partial F(u) \neq \emptyset$.

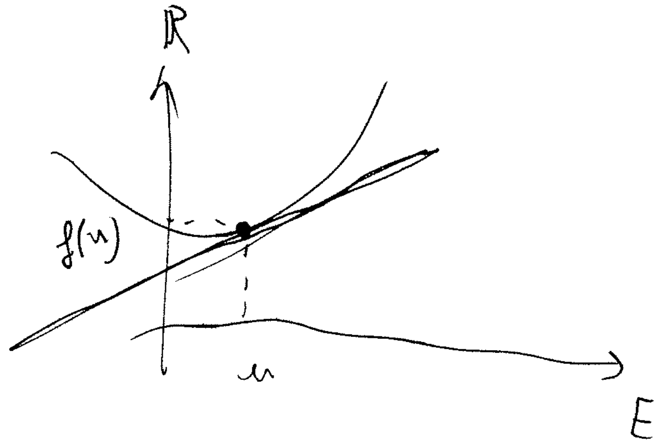
épi F est un convexe de $E \times \mathbb{R}$

et soit c $O = \{x,\ f(x) < c\}$

O ouvert $\quad O \times]c, +\infty[\subset$ épi f

et ouvert.

épi F est donc d'intérieur non vide.



$$\begin{cases} (u^*, v) + \alpha y \geq C & \forall (v, y) \in \text{épi} F \\ (u^*, u) + \alpha f(u) = C \end{cases}$$

* $\alpha = 0$ impossible car sinon

$(v - u, u^*) = 0 \quad \forall v \in F$

qui est un voisinage de u.

$\Rightarrow u^* = 0$

* ~~donc~~ $\alpha < 0$ impossible ($a \to +\infty$)

* ~~donc~~ $\alpha > 0$

$\Rightarrow \quad F(v) \geq F(u) + \langle v - u, -\frac{u^*}{\alpha} \rangle$

$-\frac{u^*}{\alpha} \in \partial F(u)$

<u>Théorème</u> : On suppose la ~~[illegible]~~ qualification satisfaite et

$$\lim \phi(u,0) = +\infty \quad \text{si } u \in V, \ \|u\| \to \infty$$

alors P et P^* admettent au moins une solution et $(\bar{u}, \bar{p})$

$$\inf P = \sup P^*$$

et $\phi(\bar{u}, 0) + \phi^*(0, \bar{p}^*) = 0$

<u>dem</u> : existence grâce à la coercivité.

et $\inf P = \sup P^*$ car $h(0) = h^{**}(0)$.

Cas particulier :

Λ : linéaire continue de E dans Y

d'adjoint $\Lambda^* \in \mathcal{L}(Y^*, E^*)$

$(\Lambda \in \mathcal{L}(E, Y))$.

$$F(u) = J(u, \Lambda u)$$

On prend $\phi(u, p) = J(u, \Lambda u - p)$

On voit que $\phi^*(0, p^*) = J^*(\Lambda^* p^*, -p^*)$

<u>Th</u> : si $J \in \Gamma_0(V \times Y)$ et $\exists\, u_0 \in V$, $J_0(u_0, \Lambda u_0) < +\infty$

$p \to J(u_0, p)$ est continue en Λu_0

$J(u, \Lambda u) \longrightarrow +\infty$ si $u \in V$, $\|u\| \to +\infty$

alors $\inf P = \sup P^*$ et $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ solution

ssi $\quad J(\bar{u}, \Lambda \bar{u}) + J^*(\Lambda^* \bar{p}^*, -\bar{p}^*) = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad (\bar{u}, \Lambda \bar{u}) \in \partial J^*(\cdots)$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\Lambda^* \bar{p}^*, -\bar{p}^*) \in \partial J(\cdots)$$

<u>Cas particulier</u> $\quad J(u, \Lambda u) = F(u) + G(\Lambda u)$

$$J^*(u^*, p^*) = F^*(u^*) + G^*(p^*)$$

le problème P^* s'écrit

$$\sup_{p^*} \left[- F^*(\Lambda^* p^*) - G^*(-p^*) \right]$$

condition de qualification

$$F(u_0) < +\infty \quad G(\Lambda u_0) < +\infty$$
et G continue en Λu_0

Condition d'extrémalité :

$$0 = J(\bar{u}, \Lambda \bar{u}) + J^*(\Lambda^* \bar{p}^*, -\bar{p}^*)$$
$$= F(\bar{u}) + F^*(\Lambda^* \bar{p}^*) + G(\Lambda \bar{u}) + G^*(-\bar{p}^*)$$
$$\underbrace{- (\Lambda^* \bar{p}^*, \bar{u})}_{\geq 0} \quad \underbrace{- (-\bar{p}^*, \Lambda \bar{u})}_{\geq 0}$$

donc chaque terme est nul

$$\Lambda^* \bar{p}^* \in \partial F(\bar{u}) \quad \text{et} \quad -\bar{p}^* \in \partial G(\Lambda \bar{u})$$

Applications : I)

Programmation convexe (optimisation convexe sous contraintes).

$$g(u) = \begin{pmatrix} g_1(u) \\ \vdots \\ g_m(u) \end{pmatrix} \qquad g(u) \leq 0 \iff \forall i,\ g_i(u) \leq 0$$

g_i convexe sci

J convexe sci

$$\inf_u \{ J(u),\ g(u) \leq 0 \}$$

On introduit $\phi(u,p) = J(u) + \chi_{g(u) \leq p}$

ϕ est convexe sci.

(le problème admet au moins une solution si J est coercive ou l'ensemble des contraintes est borné).

$$\phi^*(0,p^*) = \sup_{\substack{u,p \\ g(u)\leq p}} (p^*,p) - J(u)$$

$$= -\inf_u \Big(J(u) - (p^*, g(u))\Big) \qquad p^* \leq 0$$

$$= +\infty \qquad p^* > 0$$

pour $\lambda \geq 0$, on pose $p^* = -\lambda$

$$-\phi^*(0,-\lambda) = \inf_u J(u) + (\lambda, g(u))$$

$$\inf_u \phi(u,0) = \sup_{\lambda \geq 0} -\phi^*(0,-\lambda)$$

$$= \sup_{\lambda \geq 0} \inf_u J(u) + (\lambda, g(u))$$

vrai si tout va bien ....

<u>Hypothèse de qualification</u> :

$\exists\, u_0 \quad g(u_0) < 0$

alors $\phi(u_0,p) = J(u_0)$ dans un voisinage de $p=0$ et $p \to \phi(u_0,p)$ est fini et continue. Donc OK.

<u>Extrémalité</u>

$$J(\bar u) = \inf_u \left\{ -(\bar p^*, g(u)) + J(u) \right\} \leq -(\bar p^*, g(\bar u)) + J(\bar u)$$

$$\Rightarrow \quad (\bar p^*, g(\bar u)) \leq 0$$

et ≥ 0 donc $= 0$ car $\begin{matrix}\bar p^* \leq 0 \\ g(\bar u) \leq 0\end{matrix}$ K-T.

Application II)

Problème de Stokes

$$\begin{cases} J(u) = \frac{1}{2}\int \nabla u^2 - fu & \text{si } \operatorname{div} u = 0 \\ \quad\;\; = +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E = H^1_0(\Omega) = \begin{cases} u \in L^2(\Omega),\ \nabla u \in L^2(\Omega) \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$E^* = H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ espace de Hilbert pour $((u, v)) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$

(selon que l'espace pivot est L^2 $E^* = H^{-1}$ ou H^1_0 $E^* = H^1_0$).

Th (admis) : $H^{-1}(\Omega) = \{ \nabla u,\ u \in L^2(\Omega)$ au sens des distrib. $\}$.

$Y = L^2(\Omega)$, $Y^* = L^2(\Omega)$

$\Lambda = \operatorname{div}$

$W = \{ u \in E,\ \operatorname{div} u = 0 \}$ sous-espace fermé de $H^1_0(\Omega)$.

$$\inf_{u \in E} P = \inf_{u \in W} P$$

$\forall v \in W$,

$$\int \nabla u \nabla v = \int f v$$

$L(v) = \int \nabla u \nabla v - \int f v = 0$ sur W

forme linéaire continue sur H^1_0 qui s'annule sur W.

$$G(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On veut donc résoudre

$$\inf_{u \in E} \left(J(u) + G(\Lambda u) \right) = \inf P$$

$$\Lambda^* = -\nabla$$

$$J^*(\Lambda^* p^*) = \sup_u \left((\Lambda^* p, u) + (f, v) - \frac{1}{2} \int \nabla u^2 \right)$$

$$= \sup_u \left((p, \operatorname{div} u) + (f, u) - \frac{1}{2} \int \nabla u^2 \right)$$

le sup est atteint pour $u(p^*)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u(p^*) + \nabla p^* = f \\ u(p^*) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$J^*(\Lambda^* p^*) = \frac{1}{2} \int \nabla u(p^*)^2$$

et $G^* = 0$

donc $\displaystyle - \sup \phi^*(0, p^*) = \sup_{p^*} \left(-\frac{1}{2} \int \nabla u(p^*)^2 \right)$

~~Propb~~ Problème : $p \to G(\Lambda p)$ n'est pas du tout continue.

On travaille sur le problème dual et J^* est continue en tout $\Lambda^* p^*$

donc $\inf P = \sup P^*$ et on a la relation d'optimalité

$$J(u) + J^*(\Lambda^* p^*) = \langle \nabla p^*, u \rangle$$

$$\nabla p \in \partial F(u) \qquad \nabla p = \nabla F$$

et $-p \in \partial G(0)$ (ne dit rien)