Transformée de Legendre, durée 3h, documents autorisés

Exercice 1: Loi de Dalton

Dans cet exercice, on convient de prolonger par $+\infty$ les fonctions en dehors de leur domaine de définition. Les fonctions sont supposées de classe C^2 sur leur domaine de définition.

L'énergie massique d'un fluide est une fonction strictement convexe du volume massique $\tau > 0$ et de l'entropie massique $s > 0$ notée $e(\tau, s)$. On introduit l'énergie volumique définie par

$$\varepsilon(\rho, \sigma) = \rho e(1/\rho, \sigma/\rho),$$

où ρ et σ sont respectivement la masse volumique et l'entropie volumique.

1. Montrer que ε est une fonction strictement convexe de ρ et σ.

2. La température T et la pression p sont définies par la relation

   $$de = Tds - pd\tau.$$

   Soit le potentiel chimique μ défini par $\mu = sT - p\tau - e$. Montrer que μ est une fonction strictement convexe de p et T.

3. Montrer que

   $$d\varepsilon = Td\sigma - \mu d\rho.$$

4. Montrer que la transformée de Legendre de ε est la pression exprimée en fonction de $-\mu$ et de T. En déduire que la pression est une fonction strictement convexe de μ et T.

5. Déduire du cours et des questions précédentes que dans un mélange immiscible de deux fluides (1) et (2) la pression du mélange vérifie

   $$p(\mu, T) = \max(p_1(\mu, T), p_2(\mu, T)).$$

   Alors que dans un mélange miscible

   $$p(\mu, T) = p_1(\mu, T) + p_2(\mu, T).$$

   Cette dernière relation est appelée loi de Dalton.

Exercice 2: Représentation des opérateurs linéaires stationnaires dans l'algèbre (min,+)

Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ pour laquelle il existe un entier $N \geq 1$ et une subdivision

$$-\infty = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = +\infty$$

telle que sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1 \cdots N$, la fonction est soit un polynôme de degré ≤ 2 soit prend la valeur $+\infty$. On note C l'ensemble des fonctions de ce type qui sont en plus convexes, sci et propres.

1. Montrer que si $f \in C$ ne prend que des valeurs finies, alors elle est continue.

2. On définit la fonction δ par

   $$\delta(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0, \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Vérifier que $\delta \in C$.

3. Soient f et g deux éléments de C. Soient les opérations

   $$f \oplus g = \min(f, g)^{**}$$

   et

   $$f \odot g = f + g.$$

   Montrer que C est stable sous les opérations $\oplus$ et $\odot$.

4. Soit $h \in C$, coercive. Montrer que si T est définie par

$$T(f)(x) = \min_{y \in \mathbb{R}} (h(x-y) + f(y)) \tag{1}$$

alors T est bien de V dans V et vérifie les propriétés (a), (b) et (c) ci-dessous:
(a) $\forall f \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad T(\lambda \odot f) = \lambda \odot T(f)$,
(b) $\forall (f_i)_{i \in I} \in C^I, \quad T(\underset{i \in I}{\oplus} f_i) = \underset{i \in I}{\oplus} T(f_i)$,
(c) $\forall f \in C, \forall t \in \mathbb{R}, \quad T(\tau_t f) = \tau_t T(f)$, où τ_t désigne l'opérateur de translation de t, $(\tau_t f)(x) = f(x-t)$.

5. Avec les mêmes notations que dans la question 4, montrer que $T(\delta) = h$.

6. Maintenant, T est un opérateur général de C dans C vérifiant seulement les conditions (a), (b) et (c). On appelle réponse impulsionnelle de T la fonction $T(\delta)$. On suppose que la réponse impulsionnelle est coercive. Montrer que

$$T(f)(x) = \min_{y} (T(\delta)(x-y) + f(y)).$$

Problème: Déformation d'une membrane sous contraintes

Notations et rappels:

- I désigne l'intervalle $]0,1[$. L'espace de Sobolev $H^1(I)$ est l'espace des fonctions de $L^2(I)$ dont la dérivées est dans $L^2(I)$.

- On rappelle que $H^1(I) \subset C^0(\overline{I})$, avec injection continue, où $C^0(\overline{I})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme du sup.

- E est l'espace de Sobolev $H_0^1(I)$ des fonctions u de $H^1(I)$ qui vérifient $u(0) = u(1) = 0$. Pour $u \in H_0^1(I), \|u\|_{H_0^1(I)} = \int_I u'^2$.

- Le dual de E est noté $E' = H^{-1}(I)$. On rappelle que c'est aussi l'ensemble des dérivées au sens des distributions des fonctions de $L^2(I)$:

$$\varphi \in H^{-1} \Leftrightarrow \exists v \in L^2, \forall u \in E, \varphi(u) = -\int_I u'v = - < u', v > .$$

  On peut donc identifier φ et v' car

$$\varphi(u) = - < u', v > = < v', u >,$$

  où $< \cdot, \cdot >$ désigne le produit de dualité distributionnel, qui est le prolongement par continuité du produit scalaire L^2.

- Dans ce problème on continuera donc à noter le produit $< \cdot, \cdot >$ avec une intégrale: $\int \varphi u = < \varphi, u >$ quand $u \in E$ et $\varphi \in E'$.

Problème: soit λ une fonction fixée de $H^1(I)$, strictement positive sur $\overline{I}$. On considère C_λ le sous-ensemble de E défini par

$$C_\lambda = \{u \in E, \forall x \in I, u(x) \leq \lambda(x)\}.$$

Soit $f \in H^{-1}$ donnée, on souhaite étudier le problème d'optimisation

$$\inf_{u \in C_\lambda} J(u), \tag{2}$$

où la fonctionnelle J est définie par

$$J(u) = \int_I \left(\frac{u'^2}{2} - fu \right).$$

Physiquement, $u(x)$ peut représenter le déplacement d'une membrane soumise à une force répartie $f(x)$. Ce déplacement est contraint par un mur de forme $\lambda(x)$.

1. Montrer que C_λ est un convexe fermé de E.

2. Montrer que J est strictement convexe et sci sur E.

3. Montrer que le problème (2) admet une solution et une seule dans E.

4. Montrer que si $\lambda = +\infty$ alors cette solution vérifie

$$-u'' = f$$

au sens des distributions.

5. Désormais, on suppose que $\lambda < +\infty$. Soit χ_λ l'indicatrice convexe de C_λ

$$\chi_\lambda(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u \in C_\lambda, \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour $p \in E$, on introduit la fonctionnelle

$$\Phi(u, p) = J(u) + \chi_\lambda(u - p).$$

Vérifier que le problème

$$\inf_u \Phi(u, 0)$$

est équivalent au problème (2).

6. Montrer que si $p^* \leq 0$ alors

$$-\Phi^*(u^*, p^*) = \inf_u \int_I \left(\frac{u'^2}{2} - (f + u^* + p^*)u + p^*\lambda \right),$$

et que sinon

$$\Phi^*(u^*, p^*) = +\infty.$$

En déduire que si $p^* \leq 0$ alors

$$\Phi^*(u^*, p^*) = \int_I \left(\frac{1}{2}(f + u^* + p^*)u - p^*\lambda \right)$$

avec

$$-u'' = f + u^* + p^*.$$

7. Montrer qu'il existe u_0 dans E tel que $p \to \Phi(u_0, p)$ est finie et continue en 0. En déduire que

$$\inf_u \Phi(u, 0) = \sup_{p^*} -\Phi(0, p^*),$$

et que le problème dual admet au moins une solution.

8. Montrer que $u \leq \lambda$ est la solution de (2) ssi il existe $p^* \in H^{-1}$, $p^* \leq 0$,

$$-u'' = f + p^*, \quad \int_I p^*(u - \lambda) = 0. \tag{3}$$

9. Pouvez-vous donner une interprétation physique à (3) ?

10. Calculer u et p^* lorsque f est une fonction constante et $\lambda(x) = |x - 1/2| + 1/2$. Distinguer les cas (a)$f < 4$, (b) $4 \leq f \leq 8$ et (c) $f > 8$.

Corrigé succinct

Exercice 1

1. On calcule la hessienne $\varepsilon''(\rho,\sigma)$ de $\varepsilon(\rho,\sigma)$. On constate que $\det \varepsilon'' = \frac{1}{\rho^4}\det e'' > 0$ et que $\varepsilon''_{22} = \frac{1}{\rho}e''_{22} > 0$. Deux mineurs principaux construits sur la diagonale étant > 0, ε est une fonction strictement convexe.

2. $\mu(p,T) = e^*(-p,T)$ donc μ est strictement convexe car la transformée de Legendre d'une fonction strictement convexe est strictement convexe.

3. $\varepsilon = \rho e$, $\sigma = \rho s$ et $\tau = 1/\rho$. Par conséquent
$$\begin{aligned}
d\varepsilon &= \rho de + e d\rho \\
&= \rho\left(Td\left(\frac{\sigma}{\rho}\right) - pd(1/\rho)\right) + ed\rho \\
&= Td\sigma + \left(\frac{\varepsilon - \sigma T + p}{\rho}\right) d\rho \\
&= Td\sigma - \mu d\rho.
\end{aligned}$$

4. La transformée de Legendre de ε est donnée par
$$\varepsilon^*(-\mu,T) = T\sigma - \mu\rho - \varepsilon = p,$$
d'où le résultat.

5. on a vu en cours que dans un mélange immiscible, l'énergie volumique du mélange est l'enveloppe convexe de $\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. Après transformée de Legendre, on a donc
$$p = \max(p_1,p_2).$$
De même, dans un mélange miscible ε est l'inf-convolution de ε_1 et ε_2 donc après transformée de Legendre,
$$p = p_1 + p_2.$$

Exercice 2

1. On peut soit utiliser un gros théorème, soit raisonner par l'absurde: on suppose qu'il existe une discontinuité en un point x_i et on voit que la fonction ne peut pas être convexe.

2. Pour la subdivision $x_0 = -\infty, x_1 = 0, x_2 = +\infty$, δ est bien de la forme indiquée, convexe et propre. Elle est sci car l'image réciproque d'un intervalle de la forme $]-\infty, A]$, $A \in \mathbb{R}$, est soit $\{0\}$ soit $\varnothing$ qui sont bien des ensemble fermés.

3. C est évidemment stable sous l'opération $+$. Pour l'opération min, on construit une subdivision qui contient tous les points des subdivisions définissant f et g ainsi que les points isolés où $f = g$ (qui sont en nombre fini). Sur cette nouvelle subdivision, $\min(f,g)$ est bien polynomial de degré ≤ 2 par morceaux. Calculer la biconjuguée revient à calculer l'enveloppe convexe sci de $\min(f,g)$. Cette enveloppe convexe est encore polynomiale de degré ≤ 2 par morceaux (car on modifie le graphe de $\min(f,g)$ par des parties linéaires...)

4. h est coercive ce qui assure que l'inf dans l'inf-convolution est bien un min et qu'on peut appliquer le théorème du cours
$$T(f)^* = h^* + f^*. \tag{4}$$
On se convainc que l'image de C par la transformée de Legendre est incluse dans C. Et en retransformant par Legendre, on obtient que T est bien de C dans C. Les propriétés (a) et (c) sont évidentes. La propriété (b) découle de (4), de la relation
$$\max_i (h^* + f_i^*) = h^* + \max_i (f_i^*),$$
et du fait que la transformée de Legendre transforme l'enveloppe convexe d'un min en un max et réciproquement.

5. $T(\delta) = \min_y(h(x-y) + \delta(y))$. Le min est forcément atteint en $y = 0$, là où $\delta(y) = 0$, donc $T(\delta) = h$.

6. Pour une fonction f de C et $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \min_y(\delta(x-y) + f(y)) = \bigoplus_y f(y) \odot \delta(x-y)$ soit encore $f = \bigoplus_y f(y) \odot \tau_y \delta$. En utilisant la "linéarité" de T dans les opération (min,+) (propriétés (a) et (b)) et le fait que T commute avec les translations, on trouve
$$T(f) = T(\bigoplus_y f(y) \odot \tau_y \delta) = \bigoplus_y f(y) \odot \tau_y T(\delta)$$
qui est justement le résultat cherché. Il existe un résultat analogue en analyse harmonique: un opérateur linéaire, continu sur L^2 qui commute avec les translation est forcément un opérateur de convolution.

Problème

1. C_λ est convexe. Il est fermé car si une suite (u_n) d'éléments de C_λ converge vers u pour la topologie de E alors elle converge aussi dans $C^0(\bar{I})$ et donc pour tout x, $u_n(x) \to u(x)$ et donc $u(x) \le \lambda(x)$, soit $u \in C_\lambda$.

2. J est strictement convexe grâce à l'inégalité de Jensen. J est sci car continue.

3. Comme J est sci, coercive sur un fermé, il existe un min. Ce min est unique par stricte convexité.

4. La condition nécessaire de minimisation est que $\delta J = J'(u, \delta u) = 0$ pour tout $\delta u \in E$ avec $J'(u, \delta u) = \lim_{t\to 0} \frac{J(u+t\delta u)-J(u)}{t}$. Or
$$\delta J = \int u'\delta u' - f\delta u = \int (-u'' - f)\delta u = 0.$$
Comme $D(I)$ (ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans I) est inclus dans E, on en déduit que $-u'' = f$

5. $\Phi(u, 0) = J(u) + \chi_\lambda(u) = J(u)$ si $u \in C_\lambda$. Le min de $\Phi(u, 0)$ ne peut bien sûr pas être atteint en dehors de C_λ d'où le résultat.

6. Calculons la conjuguée de Φ lorsque p^* est une distribution ≤ 0 (petite subtilité: alors p^*est forcément une mesure de Radon négative et donc $\int p^*\lambda$ a encore un sens bien que $\lambda \notin H_0^1$)
$$\begin{aligned}\Phi^*(u^*, p^*) &= \sup_{u,p} \int u^*u + \int p^*p - J(u) - \chi_\lambda(u-p)\\ &= \sup_{u,p,p\ge u-\lambda} \int u^*u + \int p^*p - J(u)\\ &= \sup_{u} \int u^*u + \int p^*(u-\lambda) - J(u)\\ &= -\inf_u \int \left(\frac{u'^2}{2} - (f+u^*+p^*)u + p^*\lambda\right).\end{aligned}$$
Si p^* n'est pas une distribution ≤ 0, il existe une fonction test positive $\varphi \in D(I)$ telle que $\int p^*\varphi > 0$. En prenant $p =\ge n\varphi + u - \lambda$ dans le sup en p et en faisant $n \to \infty$, on en déduit que $\Phi^*(u^*, p^*) = +\infty$.

7. Le problème de minimisation en u dans le calcul de Φ^* est un problème sans contrainte. En procédant comme à la question 4, on trouve
$$\int u'\delta u' - (f+u^*+p^*)\delta u = 0, \quad \forall \delta u \in E \tag{5}$$
soit
$$-u'' = f + u^* + p^*,$$
et en prenant $\delta u = u$ dans (5)
$$\Phi^*(u^*, p^*) = \int \left(\frac{1}{2}(f+u^*+p^*)u - p^*\lambda\right).$$

8. On peut prendre $u_0 = -x(1-x)$. Alors $\Phi(u,p)$ est identiquement nulle dans un voisinage de $(u_0, 0)$ dans $E \times E$, donc continue. La condition de qualification étant satisfaite, on en déduit l'existence d'une solution p^* au problème adjoint. La solution u du problème primal et toute solution p^* du problème dual sont liées par
$$\Phi(u, 0) + \Phi^*(0, p^*) = 0$$
équivalent à
$$(u, 0) \in \partial\Phi^*(0, p^*)$$
ou à
$$(0, p^*) \in \partial\Phi(u, 0).$$
Il est difficile de calculer le sous-gradient de Φ car $\chi_\lambda(u-p)$ dépend de u et p. Il est plus facile de calculer le sous-gradient de Φ^* car
$$\Phi^*(u^*, p^*) = \int \left(\frac{1}{2}(f+u^*+p^*)u - p^*\lambda\right) + \chi_{p^*\le 0}(p^*), \quad -u'' = f + u^* + p^*$$

et l'indicatrice convexe dans Φ^* ne dépend que de p^*. On calcule d'abord la dérivée directionnelle du terme régulier

$$2\delta\Phi^* = 2\delta\chi_{p^*\leq 0} + \int f\delta u + u^*\delta u + u\delta u^* + (u-2\lambda)\delta p^* + p^*\delta u$$

où

$$-\delta u'' = \delta u^* + \delta p^*, \quad -u'' = f + u^* + p^*.$$

Pour $u^* = 0$, grâce à une intégration par parties, on trouve donc

$$\delta\Phi^* = \delta\chi_{p^*\leq 0} + \int u(\delta u^* + \delta p^*) - \lambda\delta p^*.$$

On en déduit que

$$\partial\Phi^*(0,p^*) = \{u\} \times F$$

où F est un sous-ensemble de E contenant 0. Comme la solution u du problème primal est telle que $(u,0) \in \partial\Phi^*(0,p^*)$, il s'ensuit que la solution du problème primal vérifie

$$-u'' = f + p^*.$$

En multipliant par u et en intégrant par partie, on obtient

$$\int u'^2 = \int (f+p^*)u.$$

La relation $\Phi(u,0) + \Phi^*(0,p^*) = 0$ nous donne alors

$$\int p^*(u-\lambda) = 0.$$

9. p^* est la force de réaction qui empêche la membrane de pénétrer dans le mur. Cette force est nulle aux points x où $u(x) < \lambda(x)$.

10. Lorsque $f \leq 4$, la membrane ne touche pas le mur

$$u(x) = \frac{f}{2}x(1-x), \quad p^* = 0.$$

Lorsque $4 \leq f \leq 8$, la membrane touche le mur au point $x = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{-f}{2}x(x-\frac{1}{2}) + x, \quad 0 \leq x \leq 1/2, \\ u(x) &= \frac{-f}{2}(1-x)(\frac{1}{2}-x) + 1 - x, \quad 1/2 \leq x \leq 1, \\ p^* &= (2-\frac{f}{2})\delta_0, \end{aligned}$$

où δ_0 est la mesure de Dirac.
Lorsque $f \geq 8$,

$$u(x) = \frac{-f}{2}x^2 + (\sqrt{2f}-1)x, \quad p^*(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{f}},$$

(avec une formule symétrique pour $1 - \sqrt{\frac{2}{f}} \leq x \leq 1$)

$$u(x) = h(x), \quad ,p(x) = -f - 2\delta_0(x), \quad \sqrt{\frac{2}{f}} \leq x \leq 1 - \sqrt{\frac{2}{f}}.$$

□