Indication pour le projet “Legendre”

1. Décrire et programmer l’algorithme de transformée de legendre rapide.
2. Vérifier la programmation sur des exemples de calculs analytiques.
3. Rappeler le lien entre l’équation de Burgers

$$\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = 0$$

et l’équation de Hamilton-Jacobi

$$\partial_t w + (\partial_x w)^2/2 = 0.$$

4. Calculer la solution de ces deux équations par la méthode des caractérisitiques lorsque la condition initiale $u(x, t = 0)$ est croissante constante par morceau en x.
5. Rappeler la formule de Lax-Hopf-Oleinik ainsi que son lien avec la transformée de Legendre.
6. Utiliser la transformée de Legendre pour retrouver numériquement les solutions de la question 4.
7. Programmer la transformée de Legendre rapide en dimension 2. Vérifier la programmation.
8. Soit l’énergie d’un fluide de van der Waals qui dépend du volume τ occupé par une masse donnée de fluide et de l’entropie s de cette même masse

$$\begin{aligned} e(\tau, s) &= \frac{e^s}{(3\tau - 1)^{8/3}} - \frac{3}{\tau} \text{ si } \tau > 1/3, s > 0, \\ &= +\infty \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Vérifier que cette fonction n’est pas globalement convexe

9. Convexifier e numériquement en utilisant l’algorithme de transformée de Legendre.
10. Comment tracer les courbes isothermes de pression en utilisant la transformée de Legendre ?
11. Vérifier numériquement que les courbes isothermes de pression obéissent à la construction de Maxwell (voir cours).