

TRANSFORMÉE DE LEGENDRE, THÉORIE ET APPLICATIONS (VERSION PROVISOIRE)

PHILIPPE HELLUY, IRMA STRASBOURG

TABLE DES MATIÈRES

Avertissement	1
1. Analyse convexe et transformée de Legendre	1
1.1. Convexité	1
1.2. Semi-continuité	2
1.3. Transformée de Legendre	2
2. Applications en dimension finie	4
2.1. Mécanique hamiltonienne	4
2.2. Transition de phase	5
2.3. Transformée de Legendre rapide	6
2.4. Théorie de Mocke	6
3. Applications en dimension infinie	6
3.1. Formule de Lax-Oleinik	6
3.2. Dualité et optimisation : problème de Stokes	6
3.3. Introduction à l'analyse idempotente	6
Références	7

AVERTISSEMENT

Ces notes de cours sont en cours de rédaction...

1. ANALYSE CONVEXE ET TRANSFORMÉE DE LEGENDRE

1.1. Convexité. Dans la suite E désigne un espace de Banach muni d'une norme $\|\cdot\|$. On note E^* son dual topologique, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E , muni de la norme du sup. Suivant l'usage, pour $\varphi \in E^*$ et $u \in E$, on note $(\varphi, u) := \varphi(u)$. On rappelle que l'on peut définir une topologie sur E notée $\sigma(E, E^*)$ appelée topologie faible. Cette topologie est définie à partir de la famille de semi-normes $(p_\varphi)_{\varphi \in E^*}$ définies par $p_\varphi(u) = |(\varphi, u)|$. L'ensemble V est un voisinage faible de $x \in E$ ssi il existe un nombre fini de semi-boules ouvertes de centre x incluses dans V . La notion de convergence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E pour cette topologie est donnée par

$$u_n \rightharpoonup u \iff \forall \varphi \in E^*, (\varphi, u_n) \rightarrow (\varphi, u).$$

Il est donc possible de définir deux notions de continuité : la continuité forte (pour la topologie forte) et la continuité faible (pour la topologie faible). Les fonctions faiblement continues sont nécessairement fortement continues mais la réciproque est en général fausse. Notons que les éléments du dual E^* sont à la fois fortement continues et faiblement continues, par définition de la convergence faible.

Pour simplifier la présentation, nous supposons de plus que E est un espace réflexif. Pour définir cette notion, introduisons le bidual E^{**} de E . On peut identifier E à un sous-espace de son bidual grâce à l'injection γ définie par

$$\langle \gamma(u), \varphi \rangle_{E^{**}, E^*} := \langle \varphi, u \rangle_{E^*, E}.$$

Il est facile de vérifier que $\gamma(u)$ est bien une forme linéaire continue sur E^* et appartient donc à E^{**} . En utilisant le théorème de Hahn Banach, on peut montrer que γ est en fait une isométrie. Si γ est de plus une bijection alors l'espace E est dit réflexif. Tout espace de Hilbert est réflexif, l'espace $L^p(\mathbb{R})$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$. L'espace

Date: 2009.

1. Contrairement à ce que j'ai dit en cours, cette topologie n'est en général pas métrisable. Ce n'est le cas que lorsque la topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes.

$L^\infty(\mathbb{R})$ est le dual de $L^1(\mathbb{R})$ mais $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas le dual de $L^\infty(\mathbb{R})$. Ces deux espaces ne sont donc pas réflexifs. Dans un espace réflexif, la boule unité fermée est compacte pour la topologie faible.

Nous nous intéressons à des fonctions réelles étendues, de la forme $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Le domaine de f est défini par

$$\text{dom}f = f^{-1}(\mathbb{R}),$$

son épigraphe est

$$\text{epi}f = \{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R}, f(x) \leq \alpha\}.$$

La fonction f est dite propre si $\text{dom}f \neq \emptyset$, elle est convexe ssi pour tout (u, v) dans $E \times E$ et tout t dans $]0, 1[$,

$$f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v).$$

Pour un sous-ensemble A de E , l'indicatrice de A est définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble A est dit convexe ssi χ_A est convexe. L'enveloppe supérieure d'une famille quelconque de fonctions convexes est convexe. Une fonction est convexe ssi son épigraphe est convexe. Enfin, la convexité conduit à une certaine régularité :

Théorème 1. *Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe et propre. Supposons de plus qu'il existe un ouvert U sur lequel $\sup_U f < +\infty$. Alors f est continue et localement Lipschitzienne sur l'intérieur de $\text{dom}f$.*

1.2. Semi-continuité. En général, une fonction convexe continue pour la topologie forte n'est pas continue pour la topologie faible. La notion de semi-continuité inférieure est mieux adaptée à la convexité.

Définition 2. Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est fortement (respt. faiblement) semi-continue inférieurement en x_0 (sci en x_0 en abrégé) si pour tout α de \mathbb{R} tel que $f(x_0) > \alpha$ il existe un voisinage U fort (respt. faible) de x_0 tel que pour tout x dans U , $f(x) > \alpha$. La fonction f est sci sur E ssi elle est sci en tout $x \in E$.

L'enveloppe supérieure de fonctions sci est sci. Une combinaison linéaire positive de fonctions sci est sci. Une fonction faiblement sci est fortement sci mais la réciproque est en général fausse dans les espaces de dimension infinie.

Proposition 3. *Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Une fois la topologie choisie (faible ou forte), les propriétés suivantes sont équivalentes*

- (1) f est sci;
- (2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f^{-1}(]-\infty, \alpha])$ est un ensemble fermé;
- (3) $\text{epi}f$ est fermé;
- (4) $\forall u \in E$ et pour toute suite $u_n \rightarrow u$, $f(u) \leq \liminf(u_n) = \sup_n \inf_{p \leq n} f(u_p)$.

Le théorème suivant permet de raisonner presque comme en dimension finie pour les fonctions convexes sci.

Théorème 4. *Si $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe et fortement sci alors elle est aussi faiblement sci.*

1.3. Transformée de Legendre.

Définition 5. la relaxée sci (forte ou faible) \bar{f} d'une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est donnée par

$$\bar{f}(x) = \sup \{g(x), g : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, g \text{ est sci (forte ou faible) et } g \leq f\}$$

Nous pouvons vérifier que \bar{f} est sci (comme enveloppe supérieure de fonctions sci) et que f est sci en x ssi $\bar{f}(x) = f(x)$. De plus

$$\text{epi}\bar{f} = \text{cl}_{E \times \mathbb{R}} \text{epi}f$$

où $\text{cl}_T(U)$ dénote la fermeture de l'ensemble U dans l'espace topologique T .

Définition 6. (transformée de Legendre) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre. La transformée de Legendre (ou de Fenchel) f^* de f est une fonction de $E^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$f^*(p) = \sup_{x \in E} ((p, x) - f(x))$$

Une conséquence immédiate de la définition est l'inégalité de Fenchel

$$(p, x) \leq f(x) + f^*(p).$$

La transformée de Legendre f^* est aussi appelée transformée de Fenchel, fonction conjuguée ou fonction polaire de f . Si la conjuguée f^* est propre, nous pouvons aussi définir la biconjuguée f^{**} . Notons que f^* est propre ssi f admet une minorante affine continue.

Définition 7. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Le sous-différentiel de f au point x est

$$\begin{aligned} \partial f(x) &= \{p \in E^*, f(x) + f^*(p) = (p, x)\} \\ &= \{p \in E^*, \forall y \in E, f(y) - f(x) \geq (p, y - x)\} \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que si $\partial f(x) \neq \emptyset$ alors c'est un convexe faiblement fermé. De plus, si f est convexe et admet une différentielle $f'(x)$ en x alors $\partial f(x) = \{f'(x)\}$. Enfin, nous avons l'équivalence

$$(1.1) \quad p \in \partial f(x) \iff x \in \partial f^*(p).$$

Proposition 8. *Quelques propriétés de la transformée de Legendre-Fenchel :*

- (1) f^* est convexe, faiblement sci
- (2) $f^*(0) = -\inf f$ et $f \geq g \Rightarrow f^* \leq g^*$
- (3) $(\inf_i f_i)^* = \sup_i f_i^*$
- (4) $f^{**} = \sup \{g \text{ affines continues sur } E, g \leq f\}$

Théorème 9. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe et propre.

- (1) f est sci en x_0 ssi f^* est propre et $f^{**}(x_0) = f(x_0)$
- (2) Si f^* est propre, $f^{**} = \bar{f}$

Démonstration. \Leftarrow : D'après la propriété 4 de la proposition 8, $f^{**} \leq f$. De plus, f^{**} est convexe sci donc $f^{**} \leq \bar{f}$ par définition de la relaxée sci. Si de plus $f^{**}(x_0) = f(x_0)$ alors $f(x_0) = \bar{f}(x_0)$ est donc f est sci en x_0 .

\Rightarrow : Comme f est sci en x_0 , pour tout α_0 tel que $f(x_0) > \alpha_0$, il existe $\eta > 0$ tel que $f(x_0) > \alpha_0 + \eta$. Il existe donc un voisinage V de x_0 tel que $\forall x \in V, f(x) > \alpha_0 + \eta$. Il existe donc un voisinage W dans $E \times \mathbb{R}$ de (x_0, α_0) tel que $\forall (x, \alpha) \in W, f(x) > \alpha \Leftrightarrow (x, \alpha) \notin \text{epi} f$. Donc $\overline{\text{epi} f}$ est un convexe fermé non vide (car f est propre) de $E \times \mathbb{R}$ qui ne rencontre pas le convexe compact $\{(x_0, \alpha_0)\}$. D'après le théorème de Hahn-Banach on peut séparer ces deux ensembles strictement par un hyperplan, il existe donc $(p, \beta) \in E^* \times \mathbb{R}^*$ tel que

$$\forall (x, \alpha) \in \text{epi} f, (p, x) + \beta \alpha < (p, x_0) + \beta \alpha_0.$$

En faisant tendre α vers $+\infty$, on voit que forcément $\beta \geq 0$. De plus, $\beta > 0$ car sinon l'inégalité serait fautive pour $x = x_0$. Nous voyons alors que f est minorée par la fonction affine $x \rightarrow \alpha_0 + (\frac{1}{\beta}p, x_0 - x)$. Donc f^* est propre et $f^{**}(x_0) \geq \alpha_0$. En faisant tendre α_0 vers $f(x_0)$, on obtient le résultat. \square

Théorème 10. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe, propre et continue en 0. Alors f^* atteint son minimum sur E^* et $f(0) = f^{**}(0) = -\min f^*$.

Démonstration. Si f est continue en 0 alors elle est bornée sur un voisinage de 0. Il existe donc $\eta > 0$ et $M > 0$ tels que $\|x\| \leq \eta \Rightarrow |f(x)| \leq M$. Il s'ensuit que pour x dans ce voisinage et pour tout $p \in E^*$, $(p, x) - f(x) \geq (p, x) - M$. Cela implique que $f^*(p) \geq \eta \|p\| - M$. La conjuguée f^* qui est convexe et sci (fort et faible) est donc aussi coercive sur E^* . Elle admet donc un minimum sur E^* . Par ailleurs, la continuité forte en 0 implique la semi-continuité forte qui elle-même implique la semi-continuité faible en 0 car f est convexe. Il s'ensuit que $f(0) = f^{**}(0) = -\min f^*$. \square

Théorème 11. (conjuguée d'une somme) Soient f et $g : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexes telles que

$$\exists x_0 \in E, f \text{ est continue en } x_0 \text{ et } g(x_0) < +\infty.$$

Alors

$$(f + g)^*(p) = \min_q \{f^*(p - q) + g^*(q)\}.$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que $p = 0$ en remplaçant g par $x \mapsto g(x) - (p, x)$. Soit maintenant la fonction h définie par

$$h(y) = \inf \{f(x + y) + g(x), x \in E\}.$$

La fonction h est convexe (exercice). De plus, h est majorée par la fonction $y \mapsto f(x_0 + y) + g(x_0)$ qui est par construction continue en 0. Par conséquent, h est bornée sur un voisinage de 0 et d'après le théorème 1 h est continue sur l'intérieur de son domaine et donc en 0. Nous pouvons alors appliquer le théorème 10 et en déduire

que $h(0) = h^{**}(0)$ et que h^* atteint son minimum. Par ailleurs, $h(0) = \inf(f + g) = -(f + g)^*(0)$. Il nous reste à calculer

$$\begin{aligned} h^*(p) &= \sup\{(p, x) - h(x), x \in E\} \\ &= \sup\{(p, x) - f(x + y) - g(x), (x, y) \in E \times E\} \\ &= f^*(p) + g^*(-p). \end{aligned}$$

Nous en déduisons le résultat car $-h^{**}(0) = \min h^* = \min\{f^*(p) + g^*(-p)\}$. □

2. APPLICATIONS EN DIMENSION FINIE

2.1. Mécanique hamiltonienne.

2.1.1. *équations de Lagrange.* En physique, nous rencontrons souvent le principe de moindre action. Il peut se formuler de la façon suivante. Soit un lagrangien $L : (x, u, t) \mapsto L(x, u, t)$. Dans la suite, nous supposons que le lagrangien est régulier, coercif et strictement convexe par rapport à u . Le vecteur position $x \in \mathbb{R}^d$, le vecteur vitesse $u \in \mathbb{R}^d$ et le temps $t \in \mathbb{R}$. La tradition impose souvent la notation $q = x$, $\dot{q} = u$. Nous cherchons une courbe paramétrée $t \mapsto x(t)$ qui minimise "l'action"

$$A(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), x'(t), t) dt$$

avec

$$(2.1) \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

donnés. Pour cela, nous commençons par nous ramener à un problème de minimisation d'une fonction d'une seule variable. Soit x réalisant un minimum local de A . Soit φ une autre courbe paramétrée vérifiant

$$\varphi(t_0) = 0, \quad \varphi(t_1) = 0,$$

alors la courbe $y = x + \lambda\varphi$, où λ est un réel quelconque, vérifie bien les conditions aux limites (2.1). Il s'ensuit que $A(y) \geq A(x)$. La fonction d'une variable $g : \lambda \mapsto A(x + \lambda\varphi)$ admet donc un minimum en $\lambda = 0$ et donc nécessairement $g'(0) = 0$. Un calcul classique, utilisant une intégration par parties et le fait que la fonction φ est arbitraire nous donne

Proposition 12. *Si la courbe x minimise l'action alors, le long de cette courbe*

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad i = 1 \cdots d$$

(conditions d'Euler-Lagrange). La notation (traditionnelle) $\frac{\partial L}{\partial q}$ doit être comprise comme $\nabla_q L$.

Un exemple fondamental issu de la physique consiste à étudier le mouvement de N particules de positions q_i de vitesses \dot{q}_i et de masse m_i , $i = 1 \cdots N$ dans un champ de forces de potentiel $U(q_1 \cdots q_N)$. Le lagrangien s'écrit alors

$$L = T - U$$

où T est l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{q}_i^2.$$

Les équations du mouvement sont

$$(2.3) \quad m_i \ddot{q}_i = \nabla_{q_i} U(q_1 \cdots q_N), \quad i = 1 \cdots N.$$

L'intérêt de cette approche est que, le principe d'optimisation ne dépendant pas du système de coordonnées choisies, nous pouvons nous placer dans n'importe quel jeu de coordonnées curvilignes. Il n'est pas indispensable de se placer dans un repère galiléen. En exercice, le lecteur pourra calculer par exemple le mouvement d'un pendule $q(t) = \theta(t)$ et $\dot{q}(t) = \theta'(t)$, où θ désigne l'angle que fait le pendule avec la verticale.

2.1.2. *équations de Hamilton.* Nous introduisons le hamiltonien $H(p, q, t)$ comme étant la transformée de Legendre du lagrangien par rapport à la variable \dot{q}

$$H(p, q, t) = \sup_{\dot{q}} (p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}, t)).$$

Grâce à l'hypothèse de coercivité et de stricte convexité, le supremum est atteint en un unique point \dot{q} tel que $\nabla_{\dot{q}}L = p$, le hamiltonien est donné par

$$\begin{aligned} H(p, q, t) &= p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}, t), \\ p &= \nabla_{\dot{q}}L(q, \dot{q}, t). \end{aligned}$$

De part la relation (1.1) nous avons aussi

$$(2.4) \quad \dot{q} = \nabla_p H(p, q, t).$$

Calculons alors la différentielle du hamiltonien, nous trouvons

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}dp + pd\dot{q} - \nabla_q Ldq - \nabla_{\dot{q}}Ld\dot{q} - \partial_t Ldt \\ &= \dot{q}dp - \nabla_q Ldq - \partial_t Ldt \\ &= \partial_p Hdp + \partial_q Hdq + \partial_t Hdt. \end{aligned}$$

Nous en déduisons, par identification

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \partial_p H, \\ -\partial_q L &= \partial_q H, \end{aligned}$$

mais d'après (2.2) la dernière égalité est aussi $\partial_q H = -\partial_t \partial_{\dot{q}}L$ et donc $\dot{p} = -\partial_q H$ d'après (2.4). Nous en déduisons les équations de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \partial_p H, \\ \dot{p} &= -\partial_q H. \end{aligned}$$

Au cours du mouvement, il est facile de vérifier que le Hamiltonien est constant. Nous en déduisons par exemple que dans le mouvement des particules défini par (2.3) le hamiltonien $H = T + U$ qui est ici l'énergie totale est conservé.

2.2. Transition de phase.

2.2.1. *Construction de Maxwell pour un fluide de van der Waals.* En physique, pour modéliser la transition de phase liquide-vapeur, il est fréquent d'utiliser le modèle de van der Waals. Dans ce modèle, l'énergie du fluide (à l'état liquide ou vapeur) dépend du volume τ occupé par une masse donnée de fluide et de l'entropie s de cette même masse

$$\begin{aligned} e(\tau, s) &= \frac{e^s}{(3\tau - 1)^{8/3}} - \frac{3}{\tau} \text{ si } \tau > 1/3, s > 0, \\ &= +\infty \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Comme souvent en physique, cette équation d'état est adimensionnée (nous nous sommes ramenés au cas où le point critique, défini plus loin, est caractérisé par une température $T_c = 1$, une pression $p_c = 1$ et un volume $\tau_c = 1$). Or cette énergie n'est pas convexe, ce qu'interdit la thermodynamique (les zones non convexes sont instables). Mathématiquement, nous remplaçons donc e par sa biconjuguée $e^{**} = co(e)$. Vérifions que cette construction permet de retrouver la construction de Maxwell.

Nous constatons d'abord que e est strictement convexe par rapport à s pour tout $\tau \in dom(e)$. Nous définissons la température $T = \partial_s e$. À τ fixé, $T = T(s)$ est un changement de variable bijectif. La transformée de Legendre partielle de e par rapport à s notée $e^{*,s}$ est donc convexe par rapport à T et on a

$$f(\tau, T) := e^{*,s}(\tau, T) = Ts - e(\tau, s), \quad T = \partial_s e.$$

Au signe près, la fonction f est connue sous le nom d'énergie libre de Helmholtz. Par ailleurs, la pression est définie par $p = -\partial_\tau e$. Nous avons donc

$$de = Tds - pd\tau,$$

soit

$$df = sdT + pd\tau.$$

Il est classique de représenter les courbes dites isothermes dans le plan (τ, p) qui sont les courbes $\tau \mapsto p(\tau) = \partial_\tau f(\tau, T)$ pour diverses températures T fixées. Comme f n'est pas concave par rapport à τ ces courbes de pression ne sont pas toujours décroissantes quand le volume augmente à température fixée, ce qui n'est pas physique. Voir Figure 2.1. Si on remplace f par $\bar{f} = co(e)^{*,s}$, cette fois-ci \bar{f} est concave par rapport à τ et donc les isothermes

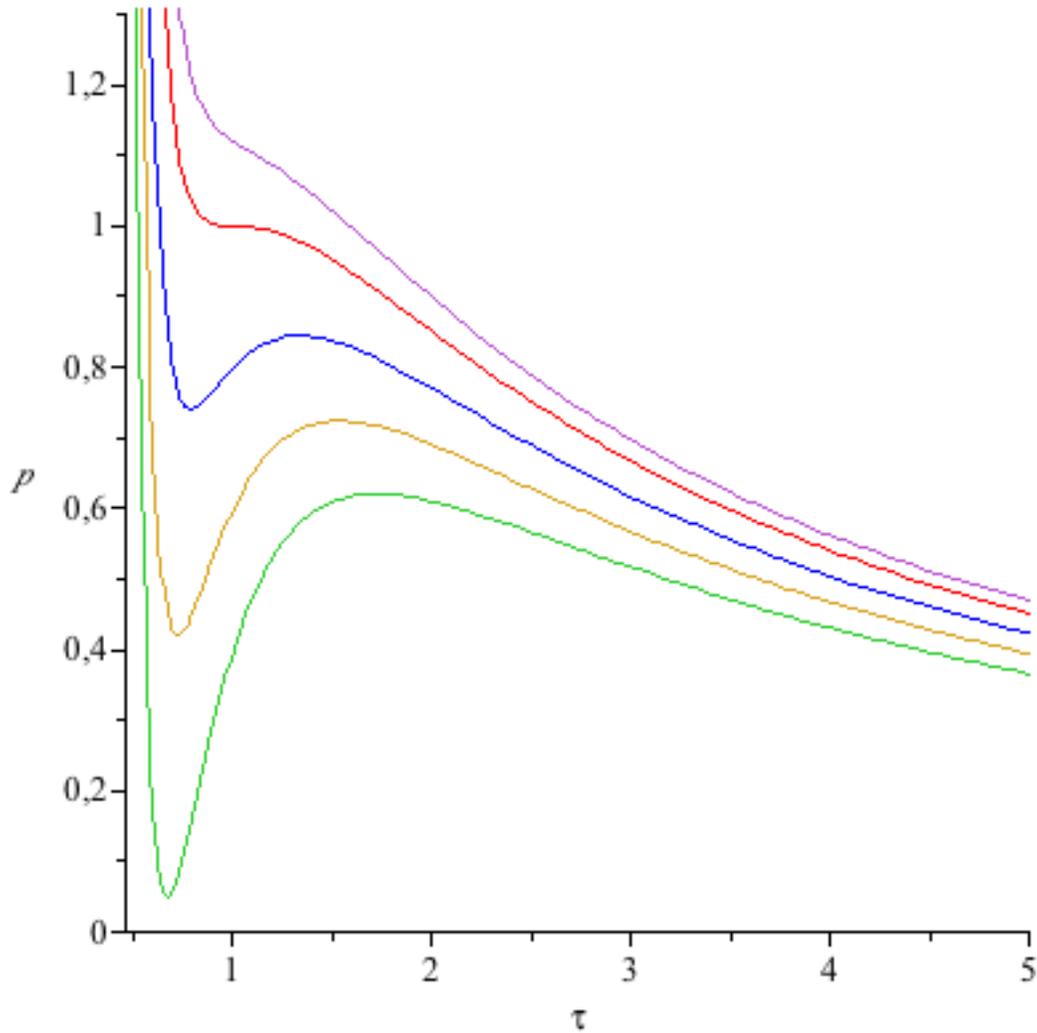


FIGURE 2.1. Isothermes non monotones, la courbe rouge correspond à $T = T_c = 1$.

seront décroissantes. Plus précisément, pour une température T donnée, il existe deux valeurs $\tau_1 < \tau_2$ telles que $p(\tau_1) = p(\tau_2) = p_0$ et l'isotherme modifiée $\bar{p}(\tau)$ est constante égale à p_0 entre τ_1 et τ_2 . On peut aussi montrer que

$$\int_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} p(\tau) d\tau = p_0(\tau_2 - \tau_1) = \int_{\tau=\tau_1}^{\tau_2} \bar{p}(\tau) d\tau$$

(règle de Maxwell).

2.3. **Transformée de Legendre rapide.** voir <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00424061/fr/>

2.4. **Théorie de Mocke.** voir <http://www-irma.u-strasbg.fr/~helluy/mhd/mhd.pdf>

3. APPLICATIONS EN DIMENSION INFINIE

3.1. **Formule de Lax-Oleinik.** voir [7]

3.2. **Dualité et optimisation : problème de Stokes.** voir [4]

3.3. **Introduction à l'analyse idempotente.** [10]

RÉFÉRENCES

- [1] Arnold, V. Les méthodes mathématiques de la mécanique classique. (French) Traduit du russe par Djilali Embarek. Éditions Mir, Moscow, 1976.
- [2] Bouchitté, Guy. Convex analysis and duality. To appear in Encyclopedia of Mathematical Physics. 2009
- [3] Brenier, Yann. Un algorithme rapide pour le calcul de transformées de Legendre-Fenchel discrètes. (French. English summary) [A fast algorithm for the computation of the discrete Legendre-Fenchel transform] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 308 (1989), no. 20, 587–589.
- [4] Ekeland, Ivar ; Temam, Roger . Analyse convexe et problèmes variationnels. (French) Collection Études Mathématiques. Dunod ; Gauthier-Villars, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974.
- [5] Glowinski, Roland ; Lions, Jacques-Louis ; Trémolières, Raymond . Numerical analysis of variational inequalities. Translated from the French. Studies in Mathematics and its Applications, 8. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981.
- [6] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste ; Lemaréchal, Claude . Fundamentals of convex analysis. Abridged version of Convex analysis and minimization algorithms. I [Springer, Berlin, 1993 ; MR1261420 (95m :90001)] and II [ibid. ; MR1295240 (95m :90002)]. Grundlehren Text Editions. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [7] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste Optimisation et analyse convexe. Presses Universitaires de France, Paris, 1998.
- [8] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste ; Lemaréchal, Claude . Convex analysis and minimization algorithms. I. Fundamentals. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 305. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [9] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste ; Lemaréchal, Claude . Convex analysis and minimization algorithms. II. Advanced theory and bundle methods. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 306. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [10] Kolokoltsov, Vassili N. ; Maslov, Victor P. Idempotent analysis and its applications. Mathematics and its Applications, 401. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.
- [11] Lucet, Yves ; Bauschke, Heinz H. ; Trienis, Mike . The piecewise linear-quadratic model for computational convex analysis. Comput. Optim. Appl. 43 (2009), no. 1, 95–118.
- [12] Lucet, Yves . Faster than the fast Legendre transform, the linear-time Legendre transform. Numer. Algorithms 16 (1997), no. 2, 171–185 (1998).
- [13] Maslov, V. Méthodes opératorielles. Éditions Mir, Moscou, 1987.
- [14] Mazet, Pierre. Approximations des lois de conservation. Cours de DEA, Toulouse, 1993.
- [15] Bourdel, Françoise ; Croisille, Jean-Pierre ; Delorme, Philippe ; Mazet, Pierre-Alain . On the approximation of K -diagonalizable hyperbolic systems by finite elements. Applications to the Euler equations and to gaseous mixtures. (French) ; translated from Rech. Aérospat. 1989, no. 5, 15–34 Rech. Aérospat. (English Edition) 1989, no. 5, 15–34 (1990).
- [16] Perthame, B. Boltzmann type schemes for gas dynamics and the entropy property. SIAM J. Numer. Anal. 27 (1990), no. 6, 1405–1421.
- [17] Rockafellar, R. Tyrrell . Convex analysis. Princeton Mathematical Series, No. 28 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1970
- [18] Samuélidès, M. ; Touzillier, L. Problèmes d’analyse fonctionnelle et d’analyse harmonique. Collection La Chevêche. Cepaduès Éditions, Toulouse, 1993.
- [19] Samuélidès, M. ; Touzillier, L. Analyse fonctionnelle. Collection La Chevêche. Cepaduès Éditions, Toulouse, 1989.