# M2-Modèles fluides pour les plasmas-2008

Durée : 3h, tous documents et calculatrices autorisés

Soit le système de lois de conservation

$$\begin{aligned} &W_t + F(W)_x = 0, \\ &W = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} cu^2 + v^2 + w^2 \\ 2uv \\ 2uw \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ce modèle simplifié permet de décrire qualitativement les interactions entre les ondes d'Alfvèn et les ondes magnéto-acoustiques de la MHD. Dans ce cadre, $(v, w)$ peut représenter indifféremment le champ de vitesse transverse ou le champ magnétique transverse. D'autre part, $u$ est un paramètre thermodynamique du fluide. **Attention** : pour simplifier les calculs, on supposera que

$$c = 1. \tag{2}$$

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de ce système et d'en construire une approximation numérique.

1. Montrer que ce système est hyperbolique. Les valeurs propres, rangées par ordre croissant, sont notées $\lambda_1 = \lambda_s$, $\lambda_2 = \lambda_a$ et $\lambda_3 = \lambda_f$. Les vecteurs propres correspondants sont notés $r_1 = r_s$, $r_2 = r_a$ et $r_3 = r_f$. Les calculer. Pour chaque mode propre, indiquer s'il est Vraiment Non-Linéaire (VNL) ou Linéairement Dégénéré (LD).
2. En remarquant que le système est déjà sous forme symétrique, trouver un couple entropie-flux de Lax en appliquant la théorie de Mock.
3. Dans le cas des solutions régulières, réécrire le système dans les variables $(u, r, \theta)$ avec
$$\begin{aligned} v &= r\cos(\theta), \\ w &= r\sin(\theta). \end{aligned} \tag{3}$$
Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres dans ce nouveau jeu de variables.
4. Soient $(u, v, w) \to R(u, v, w)$. $R$ est un $i-$invariant de Riemann ssi
$$\nabla R_i \cdot r_i = 0. \tag{4}$$
On suppose que le champ $i$ est localement VNL. Montrer qu'un $i-$invariant de Riemann est constant à la traversée d'une $i-$onde simple. Montrer que cette notion ne dépend pas du jeu de variables choisi. Montrer que la propriété est encore vraie pour le cas LD.
5. Pour chacun des modes propres du système, calculer 2 invariants de Riemann (chercher des fonctions très simples de $u$, $r$ et $\theta$). Ces invariants seront notés $R_s^i$, $R_a^i$ et $R_f^i$, $i = 1, 2$.

6. Soit une discontinuité se propageant à la vitesse $\sigma$. Écrire les relations de saut de Rankine-Hugoniot. Montrer quelles peuvent se mettre sous la forme
$$F'(\overline{W})(W_R - W_L) = \sigma(W_R - W_L) \tag{5}$$
où $\overline{W}$ est à déterminer.
7. Vérifier que les invariants de Riemann sont aussi des invariants de choc. En déduire les paramétrages des courbes d'ondes $M_s$, $M_a$ et $M_f$ (choisir comme paramètre $\xi = r$ pour $M_s$ et $M_f$ et $\xi = \theta$ pour $M_a$).
8. Écrire la condition caractéristique de Lax pour les chocs $s$ et $f$.
9. Écrire la condition d'entropie de Lax pour les chocs $s$ et $f$. Vérifier que cette condition est équivalente à la condition caractéristique.
10. Vérifier qu'on peut chercher une solution du problème de Riemann sous la forme
$$W(x,t) = \begin{cases} W_L \text{ si } x/t < \lambda_s^-, \\ V_s(x/t) \text{ si } \lambda_s^- < x/t < \lambda_s^+, \\ W_I \text{ si } \lambda_s^+ < x/t < \lambda_a^*, \\ W_{II} \text{ si } \lambda_a^* < x/t < \lambda_f^-, \\ V_f(x/t) \text{ si } \lambda_f^- < x/t < \lambda_f^+, \\ W_R \text{ si } x/t > \lambda_f^+, \end{cases} \tag{6}$$
avec
$$\theta_I = \theta_L, \quad \theta_{II} = \theta_R, \quad u_I = u_{II} = u^*, \quad r_I = r_{II} = r^*, \quad \lambda_{f,s}^+ \geqslant \lambda_{f,s}^-. \tag{7}$$
On suppose connus $u^*$ et $r^*$. Calculer $\lambda_{s,f}^\pm$ et $\lambda_a^*$ ainsi que $V_s$ et $V_f$.
11. Trouver une solution entropique au problème de Riemann pour le système (1).
12. Soit la condition initiale
$$W_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_R = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$
Montrer que $W_L$ peut-être relié à $W_R$ par un choc qui satisfait la condition d'entropie de Lax. Montrer que le problème de Riemann associé à $(W_L, W_R)$ admet au moins une autre solution entropique.
13. On considère une approximation par un schéma de Galerkin Discontinu avec des polynômes de degré zéro (schéma de volumes finis) et un flux numérique $F(W_L, W_R)$. On cherche donc dans chaque cellule $C_i$ un vecteur dépendant du temps $W_i(t)$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $W_i$.
14. On souhaite que le schéma soit entropique. Quelle condition suffisante sur le flux numérique permet d'obtenir cette propriété ?
15. Le schéma de Roe consiste à prendre comme flux numérique
$$F(W_L, W_R) = \frac{1}{2}\left(F(W_L) + F(W_R)\right) - \left|F'(\overline{W})\right|(W_R - W_L). \tag{9}$$
Montrer que le schéma obtenu préserve exactement les chocs de vitesse $\sigma = 0$ et qu'il ne peut donc pas être entropique.

16. On propose la modification suivante

$$F(W_L, W_R) = \int_{t=0}^{1} F(tW_R + (1-t)W_L)dt - \left|F'(\overline{W})\right|(W_R - W_L). \quad (10)$$

Montrer que ce nouveau flux est entropique. Simplifier son écriture.

17. Programmer un schéma de volumes finis entropique. Le tester sur le problème de Riemann suggéré à la question 12. Que constatez-vous ?

## Corrigé rapide

1. La jacobienne du flux
$$A(W) = F'(W) = \begin{pmatrix} 2cu & 2v & 2w \\ 2v & 2u & 0 \\ 2w & 0 & 2u \end{pmatrix} \tag{11}$$
est symétrique. Elle est donc diagonalisable avec des valeurs propres réelles et le système est donc hyperbolique. Les valeurs propres et vecteurs propres sont
$$\begin{aligned} &\lambda_{f,s} = (c+1)u \pm \sqrt{(c-1)^2u^2 + 4(v^2+w^2)} \\ &\lambda_a = 2u \\ &r_a = \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ -v \end{pmatrix} \quad r_{f,s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_{f,s} - u \\ v \\ w \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$
Dans le cas $c = 1$, les calculs se simplifient
$$\begin{aligned} &\lambda_{f,s} = 2u \pm 2r \quad r = \sqrt{v^2+w^2} \\ &\lambda_a = 2u \\ &r_a = \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ -v \end{pmatrix} \quad r_{f,s} = \begin{pmatrix} \pm r \\ v \\ w \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

2. Le système est déjà sous forme symétrique. Les variables entropiques sont donc les variables conservatives $\Phi = W$. Comme $\Phi = \nabla_W S_0$, on trouve
$$S_0 = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) \tag{14}$$
qui est strictement convexe par rapport à $(u, v, w)$. Par ailleurs, en intégrant $F = \nabla_\Phi S_1^*$, nous trouvons
$$S_1^* = c\frac{u^3}{3} + uv^2 + uw^2 \tag{15}$$
enfin grâce à la relation
$$S_1 = \Phi \cdot F - S_1^* \tag{16}$$
nous trouvons
$$S_1 = 2u\left(\frac{cu^2}{3} + v^2 + w^2\right) \tag{17}$$

3. Dans les nouvelles variables, le système devient
$$\begin{aligned} &Y_t + B(Y)Y_x \\ &Y = \begin{pmatrix} u \\ r \\ \theta \end{pmatrix} \quad B(Y) = \begin{pmatrix} 2cu & 2r & 0 \\ 2r & 2u & 0 \\ 0 & 0 & 2u \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$
Les valeurs propres sont bien sûr inchangées. Les vecteurs propres deviennent
$$r'_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r'_{f,s} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

4. Les ondes simples s'obtiennent en résolvant l'équation différentielle
$$V'(\xi) = r_i(\xi) \tag{20}$$
or
$$\frac{d}{d\xi}R(W(\xi)) = \nabla R \cdot W'(\xi) = \nabla R \cdot r_i = 0 \tag{21}$$
donc $R$ est constant dans la détente. Cette propriété ne dépend pas des variables choisies. Elle reste vraie dans une discontinuité LD qui se paramètre avec la même équation différentielle. En général, les invariants de Riemann ne sont pas constants dans un choc.
5. On calcule les invariants dans les variables $(u, r, \theta)$. Nous trouvons
$$\begin{array}{ll} R_a^1 = u & R_a^2 = r \\ R_s^1 = \theta & R_s^2 = u + r \\ R_f^1 = \theta & R_f^2 = u - r \end{array} \tag{22}$$
D'autres choix sont possibles. Ce qui est important c'est de choisir pour chaque onde $i$ deux invariants dont les gradients sont linéairement indépendants.
6. Les relations de Rankine-Hugoniot s'écrivent ici
$$\begin{aligned} &\sigma(u_R - u_L) = 2c\overline{u}(u_R - u_L) + 2\overline{v}(v_R - v_L) + 2\overline{w}(w_R - w_L) \\ &\sigma(v_R - v_L) = 2\overline{v}(u_R - u_L) + 2\overline{u}(v_R - v_L) \\ &\sigma(w_R - w_L) = 2\overline{w}(u_R - u_L) + 2\overline{u}(w_R - w_L) \\ &\overline{\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha_L + \alpha_R) \\ &\text{soit } A(\overline{W})(W_R - W_L) = \sigma(W_R - W_L) \end{aligned} \tag{23}$$
7. Si $\sigma = 2\overline{u}$, il s'agit de l'onde LD. Seul $\theta$ est discontinu. Si $\sigma \neq \overline{u}$ les deux dernières relations de saut montrent que $\theta$ est alors forcément constant : il s'agit d'un $f-$choc ou d'un $s-$choc. Pour résoudre ce type de choc, on passe en coordonnées polaires. Choisissons comme paramètre $r_R$ à droite du choc. Nous voyons que les autres variables sont
$$\begin{array}{ll} \sigma = 2u_L - 2r_R & u_R = u_L - r_R + r_L \ (s-\text{choc}) \\ \sigma = 2u_L + 2r_R & u_R = u_L + r_R - r_L \ (f-\text{choc}) \end{array} \tag{24}$$
On constate que dans les chocs, les invariants de Riemann sont encore conservés, ce qui est une propriété des systèmes dits de Temple.
En conclusion, nous avons
$$M_s(r) = \begin{pmatrix} u_L - r + r_L \\ r \\ \theta_L \end{pmatrix}, \quad M_a(\theta) = \begin{pmatrix} u_L \\ r_L \\ \theta \end{pmatrix}, \quad M_f(r) = \begin{pmatrix} u_L + r - r_L \\ r \\ \theta_L \end{pmatrix} \tag{25}$$
8. Dans un choc reliant un état gauche $L$ à un état droit $R$
$$\lambda_L > \sigma > \lambda_R \tag{26}$$

Dans un $s$-choc, $\sigma = 2u_L - 2r$ et dans un $f$-choc, $\sigma = 2u_L + 2r$, nous trouvons donc les conditions pour qu'un choc satisfasse la condition de Lax

$$\begin{array}{lll} r_L < r_R, & u_L > u_R, & s-\text{choc} \\ r_L > r_R, & u_L < u_R, & f-\text{choc} \end{array} \tag{27}$$

9. La condition d'entropie de Lax s'écrit

$$\sigma\,[S_0] \geqslant [S_1] \tag{28}$$

soit

$$(u_L \mp r_R)\left[u^2 + r^2\right] - \left[2u\left(\frac{cu^2}{3} + v^2 + w^2\right)\right] \geqslant 0 \tag{29}$$

Dans un $s-$choc, le paramétrage nous donne aussi $r = u_L - u + \sqrt{v^2 + w^2}$. Après calculs, la condition d'entropie devient

$$\sigma\,[S_0] - [S_1] = -\frac{2}{3}(u_L - u_R)^3 \geqslant 0. \tag{30}$$

Nous retrouvons la condition caractéristique $u_L > u_R$. Les calculs sont analogues pour un $f-$choc avec un changement de signe.

10. Récapitulatif des questions précédentes ($\theta$ est constant dans les ondes 1 et 2, $u$ et $r$ sont constants dans l'onde d'Alfvèn). La nature des ondes (chocs ou détentes) est donnée par la condition de Lax (question 8).

11. Nous pouvons maintenant résoudre le système de Riemann. Il suffit de calculer $(u^*, r^*)$ de l'état intermédiaire car seul $\theta$ est discontinu dans l'onde d'Alfvèn. Les invariants de Riemann sont aussi des invariants de choc. Nous trouvons donc

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u_L + u_R + r_L - r_R}{2} \\ r^* &= \frac{r_L + r_R + u_L - u_R}{2} \end{aligned} \tag{31}$$

Il est ensuite facile de déterminer les autres paramètres et si les ondes $s$ et $f$ sont des chocs ou des détentes.

12. Pour la vitesse $\sigma = 3/2$, les conditions de Rankine-Hugoniot sont bien satisfaites. Par ailleurs,

$$\sigma\,[S_0] - [S_1] = \frac{49}{48} > 0, \tag{32}$$

le choc est donc entropique. Mais d'après les questions précédentes, il est aussi possible de construire une solution entropique au problème de Riemann par la méthode usuelle. Conclusion : le problème de Riemann admet plusieurs solutions. Il faudrait trouver un autre critère de sélection.

13.

$$\frac{d}{dt}W_i(t) + \frac{1}{h}\left(F\left(W_i(t), W_{i+1}(t)\right) - F\left(W_{i-1}(t), W_i(t)\right)\right) = 0 \tag{33}$$

14. Comme $\Phi = W$, une condition suffisante est

$$\int_0^1 W'(\xi)\cdot(F(W_L, W_R, n) - F(W(\xi)))d\xi \leqslant 0 \tag{34}$$

pour tout chemin $\xi \to W(\xi)$ liant $W_L$ à $W_R$.

15. Les états suivants correspondent à un choc stationnaire entropique

$$W_L = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Le schéma de Roe préserve exactement cette condition initiale. Mais il conserve la même solution si on échange l'état gauche et l'état droit. Donc il ne peut pas être entropique.

16. Il suffit d'appliquer la condition suffisante (34) avec le chemin $W(\xi) = \xi W_R + (1-\xi)W_L$. Le flux numérique se simplifie en

$$\begin{aligned} F(W_L, W_R) = {} & \frac{1}{2}\left(F(W_L) + F(W_R)\right) - \frac{1}{6}F(W_R - W_L) \\ & - \left|F'(\overline{W})\right|(W_R - W_L). \end{aligned} \tag{36}$$

17. Projet alternatif au projet sur la MHD...