

Modèles fluides pour les plasmas

Philippe Helluy
ULP/IRMA Strasbourg

Ces notes correspondent à un cours de M2 fait à l'IRMA de janvier à mars 2008. Elles sont très abrégées. Le lecteur intéressé souhaitant plus de détails est renvoyé à la bibliographie (en général, il est possible de télécharger les documents cités depuis l'ULP).

Table des matières

1	Établissement des équations	2
1.1	Rappels sur le calcul différentiel	2
1.2	Équations de Maxwell	3
1.3	Équations d'Euler	4
1.4	Du cinétique au fluide	6
1.5	Équations de la MHD idéale	7
2	Systèmes hyperboliques	8
2.1	Systèmes de Friedrichs	8
2.2	Chocs, entropie	9
2.3	Transformée de Legendre	10
2.4	Théorème de Mock	10
3	Méthode de Galerkin Discontinue (DG)	11
3.1	Schéma décentré	11
3.2	DG en variables entropiques	12
3.3	Un théorème de convergence dans le cas linéaire	14
4	Problème de Riemann pour la MHD	17
4.1	Cas linéaire	17
4.2	Théorème de Lax	17
4.3	Cas de la MHD	18
5	Schémas de volumes finis pour la MHD modimensionnelle	22
5.1	Schéma de type Godunov	22
5.2	Schémas de HLL	22
5.3	Schémas de Roe	22
5.4	Schémas VFRoe	22
6	Stabilisation de la divergence en dimension supérieure	23
6.1	Méthode de Powell	23
6.2	Symétrisation du système de la MHD	23
6.3	Nettoyage hyperbolique de la divergence	24

1 Établissement des équations

1.1 Rappels sur le calcul différentiel

Pour une présentation plus détaillée, voir [6] ou [4]

1) Espace vectoriel des n -formes différentielles : soit V une variété de dimension $d+1$ (ou un ouvert pour fixer les idées). Les coordonnées sont $(x_0, x_1 \cdots x_d)$. Souvent x_0 représente le temps. Une 0-forme est une application régulière de V dans \mathbb{R} . dx_i est la i -ème forme linéaire canonique sur \mathbb{R}^d

$$dx_i(a) = dx_i(a_0 \cdots a_d) = a_i \quad (1)$$

Une 1-forme ω une application de V dans l'ensemble des formes linéaires sur \mathbb{R}^d (en terme savant un élément du fibré cotangent T^*V)

$$\omega = \omega_0(x_0 \cdots x_d)dx_0 + \cdots + \omega_d(x_0 \cdots x_d)dx_d \quad (2)$$

Pour indiquer que α est une p -forme, on note α^p .

2) Produit extérieur : il existe un opérateur associatif de produit bilinéaire noté \wedge sur les formes différentielles qui vérifie

- $\alpha^p \wedge \beta^q$ est une $(p+q)$ -forme
- si α est une 0-forme et β une forme, $\alpha \wedge \beta = \alpha\beta$ (composante par composante).
- $\alpha^p \wedge \beta^q = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha$
- Base canonique des p -formes ($p \leq d+1$) constituée des

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_p} \text{ avec } i_1 < i_2 < \cdots < i_p \quad (3)$$

(chaque terme est une forme p -linéaire alternée. Par exemple : $dx_i \wedge dx_j(a, b) = dx_i(a)dx_j(b) - dx_j(a)dx_i(b) = a_i b_j - a_j b_i$).

3) Intégrale d'une p -forme : il est possible d'intégrer une p -forme sur une variété de dimension p . Exemple :

$$I = \int_S f(x, y, z)dx \wedge dy \quad (4)$$

Nous commençons par paramétrer S par $z = z(x, y)$. Alors, par définition,

$$I = \iint_{x,y} f(x, y, z(x, y))dxdy \quad (5)$$

L'intérêt est que I ne dépend pas du paramétrage choisi...

4) Dérivée extérieure : il existe une opération de dérivée des formes notée d vérifiant

- $d\alpha^0 = \alpha_{x_0}dx_0 + \cdots + \alpha_{x_d}dx_d$
- $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$
- $d(d\alpha) = 0$
- $d(\alpha^p \wedge \beta^q) = d\alpha^p \wedge \beta^q + (-1)^p \alpha^p \wedge d\beta^q$

5) Lemme de Poincaré : si $d\alpha = 0$ alors localement il existe une forme β telle que $\alpha = d\beta$.

6) Formule de Stokes : Ω variété de dimension p avec un bord $\partial\Omega$ de dimension $p-1$ et ω^{p-1} ($p-1$)-forme alors

$$\int_{\Omega} d\omega^{p-1} = \int_{\partial\Omega} \omega^{p-1} \quad (6)$$

7) Exemple 1 : soit D le disque centré sur l'origine O et de rayon R dans \mathbb{R}^2 . Son bord est le cercle C de centre O et de rayon R . Soit $\omega = xdy - ydx$. Vérifier que

$$\int_C \omega = \int_D d\omega \quad (7)$$

Le résultat reste vrai si D est une surface de \mathbb{R}^3 qui s'appuie sur C .

8) Exemple 2 : Conservation de la masse en mécanique des fluides. Version des physiciens pour $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Le vecteur normal sortant sur $\partial\Omega$ est noté n . $\rho(t, x, y)$ est la masse volumique et $u(t, x, y) = (u_1(t, x, y), u_2(t, x, y))$ le champ de vitesse.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\Omega} \rho(t, x, y) dx dy}_{\text{masse dans } \Omega} &= - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho u \cdot n}_{\text{flux de masse au bord}} \\ \Rightarrow \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Version géométrique. Nous introduisons la forme

$$\omega = \rho dx \wedge dy + dt \wedge (-\rho u_1 dy + \rho u_2 dx) \quad (9)$$

Alors la conservation de la masse s'écrit $d\omega = 0$. Nous constatons que forcément

$$ndS = \begin{pmatrix} -dy \\ dx \end{pmatrix} \quad (10)$$

1.2 Équations de Maxwell

Voir aussi [9]

9) Équations de Maxwell : dans le vide, adimensionnées de sorte que la vitesse de la lumière $c = 1$. *De plus nous ne considérons que le cas des repères cartésiens* (sinon, la métrique joue un rôle important). La densité de charges est notée $\rho(x_0, x_1, x_2, x_3)$. Elles se déplacent à la vitesse $v = (v_1, v_2, v_3)$. Le courant est noté j . En pratique, $j = \rho v$. Nous introduisons les formes

$$\begin{aligned} E &= E_1 dx_1 + E_2 dx_2 + E_3 dx_3 \\ B &= \sqrt{g} (B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2) \\ E' &= \sqrt{g} (E_1 dx_2 \wedge dx_3 + E_2 dx_3 \wedge dx_1 + E_3 dx_1 \wedge dx_2) \\ B' &= B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + B_3 dx_3 \\ \gamma &= \sqrt{g} (j_1 dx_2 \wedge dx_3 + j_2 dx_3 \wedge dx_1 + j_3 dx_1 \wedge dx_2) \wedge dx_0 - \rho \sqrt{g} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ F &= E \wedge dx_0 + B \\ G &= -B' \wedge dx_0 + E' \end{aligned} \quad (11)$$

où g est le déterminant du tenseur métrique. En coordonnées cartésiennes, $g = 1$. La relation entre E et E' et entre B et B' reste vraie après un changement de système de coordonnées. Les équations de Maxwell s'écrivent alors

$$\begin{aligned} dF &= 0 \\ dG + \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Conséquences : $d\gamma = 0$ ce qui donne l'équation de conservation de la charge

$$\rho_t + \nabla \cdot j = 0 \quad (13)$$

Loi d'Ampère

$$E_t - \nabla \times B = j \quad (14)$$

Loi de Faraday

$$B_t + \nabla \times E = 0 \quad (15)$$

Absence de charge magnétique (si vrai à $t = 0$)

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (16)$$

Loi de Gauss (si vrai à $t = 0$).

$$\nabla \cdot E = \rho \quad (17)$$

Sous forme dimensionnelle, on retrouve ($c^2 = \mu_0 \varepsilon_0$)

$$\begin{aligned} \frac{-1}{c^2} E_t + \nabla \times B &= \mu_0 J \\ B_t + \nabla \times E &= 0 \\ \nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Nous pouvons réécrire les équations sous la forme d'un système du premier ordre

$$A^0 \partial_t \varphi + \sum_i A^i \partial_i \varphi = 0 \quad (19)$$

Les matrices A^i sont symétriques et A^0 est définie positive (système de Friedrichs). Pour ces systèmes, il existe une équation de conservation de l'énergie qui s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t (A_0 \varphi \cdot \varphi) + \frac{1}{2} \sum_i \partial_i (A_i \varphi \cdot \varphi) &= 0, \\ \text{ou } \partial_t \left(\frac{E^2}{2c^2} + \frac{B^2}{2} \right) + \nabla \cdot (E \times B) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Le vecteur $E \times B$ est appelé vecteur de Poynting.

1.3 Équations d'Euler

Il y a plusieurs façon d'établir les équations d'un gaz compressible. Commençons par l'approche des physiciens, basée sur des bilans de masse, quantité de mouvement et énergie.

La conservation de la masse a déjà été écrite plus haut. Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\Omega} \rho u}_{\text{quantité de mouvement (qdm)}} = - \underbrace{\int_{\partial\Omega} u \cdot n \rho u}_{\text{flux de qdm}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} p n}_{\text{force de pression}} \quad (21)$$

Nous trouvons

$$(\rho u)_t + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p = 0 \quad (22)$$

L'énergie totale massique est la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique

$$Q = \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \quad (23)$$

La conservation de l'énergie s'écrit

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\Omega} Q}_{\text{énergie}} = - \underbrace{\int_{\partial\Omega} Qu \cdot n}_{\text{flux d'énergie}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} pu \cdot n}_{\text{puissance de la force de pression}} \quad (24)$$

La loi de pression est souvent de la forme $p = (\gamma - 1)\rho e$ (gaz parfait).

Nous trouvons

$$Q_t + \nabla \cdot ((Q + p)u) = 0 \quad (25)$$

Posons

$$\begin{aligned} w &= (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, Q)^T, \\ f_0(w) &= w, \\ f_1(w) &= (\rho u_1, \rho u_1^2 + p, \rho u_1 u_2, \rho u_1 u_3, (Q + p)u_1)^T, \\ f_2(w) &= (\rho u_2, \rho u_2 u_1, \rho u_2^2 + p, \rho u_2 u_3, (Q + p)u_2)^T, \\ f_3(w) &= (\rho u_3, \rho u_3 u_1, \rho u_3 u_2, \rho u_3^2 + p, (Q + p)u_3)^T. \end{aligned} \quad (26)$$

Les équations d'Euler peuvent alors s'écrire

$$\begin{aligned} \omega &= f_0 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - f_1 dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad - f_3 dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ d\omega &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Il est possible d'obtenir les équations d'Euler à partir d'un modèle cinétique [15]. C'est plus facile lorsque $\gamma = 3$ en 1D. Nous notons $f(t, x, v)dv$ la densité de particules qui à l'instant t et à la position x ont une vitesse entre v et $v + dv$. L'équation de Boltzmann s'écrit

$$f_t + v \cdot \nabla f = N(f) \quad (28)$$

Le noyau de collision N modélise les effets des collisions entre particules. Lorsque les collisions sont nombreuses f tend rapidement vers une distribution Maxwellienne

$$\begin{aligned} f(t, x, v) &= \frac{\rho(t, x)}{2\sqrt{\pi e(t, x)}} \exp\left(-\frac{(v - u(t, x))^2}{4e(t, x)}\right) \\ p &= nkT, \quad nm = \rho, \quad p = 2\rho e \end{aligned} \quad (29)$$

Nous ne détaillons pas l'expression compliquée de N mais il est naturel de supposer que

$$\int_{v=-\infty}^{+\infty} N(f) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \frac{v^2}{2} \end{pmatrix} dv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

(pas de production de masse, de quantité de mouvement et d'énergie). On retrouve alors les équations d'Euler en intégrant l'équation de Boltzmann contre le vecteur $(1, v, v^2/2)^T$ (car $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi}$).

1.4 Du cinétique au fluide

Nous pouvons aussi établir des équations pour la MHD en partant de l'interprétation cinétique. Nous partons de l'équation de Vlasov-Maxwell (Boltzmann avec terme de force électromagnétique)

$$f_t + v \cdot \nabla_x f + q(E + v \times B) \cdot \nabla_v f = N(f) \quad (31)$$

Cette fois-ci nous considérons le cas 3D avec $\gamma = 5/3$. La distribution de Boltzmann s'écrit donc

$$f = \left(\frac{3}{4\pi e} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{-3(v-u)^2}{4e} \right) \quad (32)$$

En passant en coordonnées sphériques, il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \iiint_v f dv_1 dv_2 dv_3 &= \rho, & \iiint_v f v dv_1 dv_2 dv_3 &= \rho u, \\ \iiint_v f \frac{v^2}{2} dv_1 dv_2 dv_3 &= \rho e. \end{aligned} \quad (33)$$

Il est aussi facile de vérifier que

$$\iiint_v f v_i v_j dv_1 dv_2 dv_3 = \rho u_i u_j + \frac{2}{3} \rho e \delta_{ij} \quad (34)$$

Nous en déduisons les équations (d'un plasma d'ions par exemple)

$$\begin{aligned} (\rho u)_t + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p &= \frac{q}{m} \rho (E + u \times B) \\ (\rho Q)_t + \nabla \cdot ((\rho Q + p)u) &= \frac{q}{m} \rho E \cdot u \\ Q &= \frac{\rho u^2}{2} + \rho e, \quad p = (\gamma - 1) \rho e \end{aligned} \quad (35)$$

Il est possible d'obtenir des lois d'état différentes de $\gamma = 5/3$ en 3D et $\gamma = 3$ en 1D. Pour cela il faut considérer une Maxwellienne du type

$$\begin{aligned} M(\rho, e, v, I) &= \frac{\rho}{\alpha [(\gamma - 1)e]^{d/2 + 1/\delta}} \exp\left(-\frac{(v-u)^2/2 + I^\delta}{(\gamma - 1)e} \right) \\ \delta &= \frac{2(\gamma - 1)}{2 - d(\gamma - 1)}, \quad \alpha = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-v^2/2) dv \cdot \int_{\mathbb{R}^+} \exp(-I^\delta) dI \end{aligned} \quad (36)$$

Et le vecteur de collision devient

$$\begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2/2 + I^\delta \end{pmatrix} \quad (37)$$

Pour les calculs, utiliser la fonction

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \exp(-t) t^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0. \quad (38)$$

(si z est un entier ≥ 1 alors $\Gamma(z) = (z-1)!$).

1.5 Équations de la MHD idéale

Les équations de la MHD idéale permettent de décrire les plasmas spatiaux, les mouvements d'un fluide conducteur dans un champ magnétique (magma terrestre) ou, sous certaines hypothèses, les plasmas de Tokamak. Les hypothèses sont :

- le fluide est non relativiste (E/c négligeable devant les autres termes) et les effets magnétiques prédominent ;
- le fluide est quasi-neutre ;
- le fluide est infiniment conducteur.

On considère un fluide compressible, conducteur, de masse volumique $\rho(x, t)$, de vitesse $v(x, t)$ et d'énergie interne $e(x, t)$. De plus, $v = (v_1, v_2, v_3)$ et $x = (x_1, x_2, x_3)$. Conservation de la masse, la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\begin{aligned}
 \rho_t + \nabla \cdot (\rho v) &= 0, \\
 (\rho v)_t + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) + \nabla p &= j \times B, \\
 Q_t + \nabla \cdot ((Q + p)v + E \times B) &= 0, \\
 p = p(\rho, e) &= (\gamma - 1)\rho e, \\
 Q = e + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}B^2.
 \end{aligned} \tag{39}$$

où j est le courant et E et B sont respectivement le champ électrique et le champ magnétique. L'énergie Q est la somme de l'énergie interne, de l'énergie cinétique et de l'énergie magnétique (nous négligeons le terme en $E^2/2c^2$).

Nous constatons que la force électrique a disparu. C'est parce que l'on considère le mouvement global des charges positives (ions) et négatives (électrons). Les électrons étant très légers, ils viennent rapidement équilibrer la charge en tout point et la force électrique $n(q_i - q_e)E = 0$. C'est l'hypothèse de quasi-neutralité. En revanche, le courant n'est lui pas nul : les électrons et les ions se déplacent souvent en sens inverse mais comme les charges sont opposées, les contributions au courant viennent s'ajouter.

Il nous manque l'évolution de E et B . Pour cela on commence par écrire la loi d'Ohm dans un repère lié au fluide

$$j = \sigma(E + v \times B). \tag{40}$$

Lorsque la conductivité σ devient infinie (hypothèse de conducteur parfait) nous trouvons

$$E = -v \times B \tag{41}$$

Ce qui conduit à l'équation d'induction magnétique (grâce à la loi de Faraday)

$$B_t - \nabla \times (v \times B) = 0 \tag{42}$$

D'autre part, la loi d'Ampère nous donne

$$\nabla \times B = \mu_0 j - \frac{1}{c_0^2} E_t \tag{43}$$

On néglige le terme en E_t (et on pose $\mu_0 = 1$) pour trouver

$$\nabla \times B = j \tag{44}$$

En utilisant $\nabla \cdot B = 0$, nous obtenons ainsi les équation de la MHD idéale. Elle s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ B \\ Q \end{pmatrix}_t + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho u \otimes u + (p + \frac{B \cdot B}{2})I - B \otimes B \\ u \otimes B - B \otimes u \\ (Q + p + \frac{B \cdot B}{2})u - (B \cdot u)B \end{pmatrix} = 0 \quad (45)$$

On passe au 1D c'est à dire qu'on suppose (avec un changement de notations)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} = 0, \\ x &= x_1 \\ B &= \underbrace{(0, B_2, B_3)}_B + (b, 0, 0) \\ v &= (u, 0, 0) + \underbrace{(0, v_2, v_3)}_v \end{aligned} \quad (46)$$

Comme $\nabla \cdot B = 0$, b est un paramètre (par exemple > 0). Et nous obtenons les équations de la MHD 1D dont nous résolvons le problème de Riemann plus loin.

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p + \frac{1}{2}B^2)_x &= 0, \\ (\rho v)_t + (\rho uv - bB)_x &= 0, \\ B_t + (uB - bv)_x &= 0, \\ Q_t + ((Q + p + \frac{1}{2}B^2)u - bB \cdot v)_x &= 0, \\ Q &= \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}B^2. \end{aligned} \quad (47)$$

2 Systèmes hyperboliques

2.1 Systèmes de Friedrichs

Un système de Friedrichs est un cas particulier de système hyperbolique linéaire. Ce système s'écrit

$$A_0 \partial_t \varphi + \sum_{i=1}^d A_i \partial_i \varphi = 0 \quad (48)$$

Les matrices A_i , $i = 0 \dots d$ sont symétriques et A_0 est uniformément définie positive. Avec des conditions aux limites adéquates et une condition initiale, ce problème est bien posé. Nous allons voir que nous pouvons lui associer un semi-groupe d'évolution S

$$\varphi(x, t) = S^t \varphi(x, 0) \quad (49)$$

Le cas inhomogène

$$A_0 \partial_t \varphi + \sum_{i=1}^d A_i \partial_i \varphi = g(x, t) \quad (50)$$

se ramène au cas homogène par la formule de Duhamel. Dans ce cas, la solution est donnée par

$$\varphi(\cdot, t) = S^t \varphi(\cdot, 0) + \int_0^t S^{t-s} g(\cdot, s) ds \quad (51)$$

Il est aussi possible de se ramener au cas où $A_0 = I$ en diagonalisant la forme quadratique associée à A_0 . Si l'on cherche une solution dans tout l'espace, il est possible de transformer l'équation par Fourier en x

$$\widehat{\varphi}(\xi, t) = \exp(-iA^j \xi_j) \widehat{\varphi}(\xi, 0) \quad (52)$$

Les valeurs propres de l'exponentielle de matrice sont toutes de module 1. Le semi-groupe est donc un semi-groupe d'isométries de L^2 .

2.2 Chocs, entropie

Il est bien connu que les solutions du système

$$w_t + \sum_i f^i(w)_{x_i} = 0 \quad (53)$$

peuvent devenir discontinues en un temps fini même si la condition initiale est très régulière. Il faut donc définir une notion de solution faible. Soit φ un vecteur de fonctions test dans $D(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ (Remarque : φ n'est pas forcément nulle en $t = 0$). Soit w_0 la condition initiale. Une solution faible w dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ vérifie

$$\int_{t \geq 0, x} -w \varphi_t - f^i(w) \varphi_{x_i} + \int_{t=0, x} w_0 \varphi = 0. \quad (54)$$

Si w est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ sauf sur des surfaces de discontinuité spatio-temporelles, alors w est solution classique là où elle est dérivable. Sur une discontinuité admettant un vecteur normal $n = (n^x, n^t) =$, on note $[w]$ le saut de w . Une solution faible w satisfait les relations de Rankine-Hugoniot

$$[w] n^t + [f^i(w)] n^i = 0 \quad (55)$$

Les solutions faibles ne sont en général pas uniques. Un critère supplémentaire permet de sélectionner une solution. Un critère classique est le critère d'entropie de Lax. Pour cela nous supposons qu'il est possible formellement d'écrire une loi de conservation supplémentaire

$$S(w)_t + \nabla \cdot G(w) = 0. \quad (56)$$

C'est possible lorsque

$$S' f' = G' \quad (57)$$

Supposons que S est de plus strictement convexe par rapport à w . S est appelée une entropie de Lax du système et G le flux d'entropie. On ajoute la contrainte suivante

$$S(w)_t + \nabla \cdot G(w) \leq 0 \quad (58)$$

dans les discontinuités. Le critère d'entropie de Lax est compatible avec le critère de viscosité évanescence.

Il est remarquable de constater que dans les variables dites entropiques $\varphi = \nabla_w S(w)$ le système devient symétrique. Donc le système linéarisé autour d'un état constant est un système de Friedrichs.

2.3 Transformée de Legendre

Une fonction convexe S étant donnée, la transformée de Legendre S^* est définie par

$$S^*(\varphi) = \max_w (w \cdot \varphi - S(w)) \quad (59)$$

Quand tout est régulier, le maximum est atteint en un point w tel que

$$\varphi = \nabla_w S(w) \quad (60)$$

Cette formule définit bien un changement de variable admissible car le jacobien de ce changement de variables est inversible (c'est la hessienne de S).

De plus, la transformée de Legendre est une involution. Faisons la démonstration dans le cas régulier. Pour cela, calculons le gradient de $S^*(\varphi)$

$$\nabla_\varphi S^*(\varphi) = w'(\varphi)\varphi + w(\varphi) - \nabla_w S(w(\varphi))w'(\varphi) \quad (61)$$

mais par définition de la transformée de Legendre,

$$\varphi = \nabla_w S(w(\varphi)) \quad (62)$$

Il s'ensuit que

$$\nabla_\varphi S^*(\varphi) = w \Leftrightarrow \varphi = \nabla_w S(w) \quad (63)$$

En d'autres termes le gradient de S^* définit le changement de variables inverse à celui défini par le gradient de S . Nous avons alors

$$\begin{aligned} S^*(\varphi) &= w \cdot \varphi - S(w) \text{ avec } \varphi = \nabla_w S(w) \\ S^*(\varphi) &= w \cdot \varphi - S(w) \text{ avec } \nabla_\varphi S^*(\varphi) = w \\ S(w) &= w \cdot \varphi - S^*(\varphi) \text{ avec } \nabla_\varphi S^*(\varphi) = w \end{aligned} \quad (64)$$

Dans la dernière formule nous reconnaissons la transformée de Legendre de S^* , nous avons bien montré que $S^{**} = S$.

2.4 Théorème de Mock

Un système de lois de conservation du premier ordre est dit symétrisable si il existe un changement de variables $w = w(\varphi)$ tel que le système se mette sous la forme d'un système de Friedrichs (avec des matrices A_i dépendant éventuellement de φ). Le théorème de Mock [14] assure qu'un système est symétrisable ssi il admet une entropie.

Démonstration : supposons que système admette une entropie S notons $\varphi = \nabla_w S(w)$. D'après ce qui précède, le changement de variables inverse est donné par la transformée de Legendre de S . Par ailleurs nous pouvons aussi définir des "transformées de Legendre" des flux par la formule

$$S^{k*}(\varphi) = f^k(w(\varphi)) \cdot \varphi - S^k(w(\varphi)) \quad (65)$$

(nous avons noté $S^0 = S$ et $S^i = G^i, i \geq 1$). Nous voyons alors que comme pour l'entropie S^0 , nous avons

$$\nabla_\varphi S^{k*}(\varphi) = f^k(w(\varphi)) \quad (66)$$

Nous en déduisons que dans les variables φ le système devient

$$\sum_{k=0}^d \nabla_{\varphi}^2 S^{k*} \varphi_{x_k} = 0 \quad (67)$$

C'est bien un système de Friedrichs.

Pour la réciproque, on utilise le lemme de Poincaré : les jacobienues de $w(\varphi)$ et de $g(\varphi) = f(w(\varphi))$ sont symétriques donc $w(\varphi)$ et $g(\varphi)$ sont des gradients de fonctions notées $S^*(\varphi)$ et $S^{k*}(\varphi)$. En utilisant les mêmes calculs que dans la condition nécessaire, nous voyons que $S^{**} = S$ est bien une entropie.

Le système de la MHD ne rentre pas dans ce cadre. Il faut modifier l'approche en tenant compte de la condition de divergence sur le champ magnétique. Voir Section 6.2

3 Méthode de Galerkin Discontinue (DG)

3.1 Schéma décentré

Une introduction classique aux schémas décentrés se trouvent dans [8]

Pour discrétiser l'équation de transport à vitesse constante u

$$\rho_t + u\rho_x = 0, \quad (68)$$

nous considérons des cellules $C_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ de centres $x_i = ih$. Nous cherchons une approximation ρ_i^n de la valeur moyenne de ρ sur la cellule C_i à l'instant t_n . Le pas de temps est noté $\tau_n = t_{n+1} - t_n$. Il est bien connu que le schéma avec flux numériques centrés explicite en temps

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau_n} + \frac{f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n}{h} &= 0, \\ f_{i+1/2}^n &= f(\rho_i^n, \rho_{i+1}^n), \\ f(\rho_L, \rho_R) &= \frac{u\rho_L + u\rho_R}{2} \end{aligned} \quad (69)$$

est inconditionnellement instable. Il est préférable d'utiliser un flux numérique décentré

$$f(\rho_L, \rho_R) = \begin{cases} u\rho_L & \text{si } u > 0 \\ u\rho_R & \text{si } u < 0 \end{cases} \quad (70)$$

Nous notons alors

$$\begin{aligned} x^+ &= \max(x, 0) \\ x^- &= \min(x, 0) \end{aligned} \quad (71)$$

Le flux numérique du schéma décentré peut s'écrire

$$f(\rho_L, \rho_R) = u^+ \rho_L + u^- \rho_R \quad (72)$$

ou encore

$$f(\rho_L, \rho_R) = \frac{u\rho_L + u\rho_R}{2} - \frac{|u|}{2} (\rho_R - \rho_L) \quad (73)$$

Le terme

$$\frac{|u| h}{2} \quad (74)$$

est appelé viscosité numérique du schéma car à l'ordre deux, le schéma décentré approche l'équation de convection-diffusion

$$\rho_t + u\rho_x - \frac{|u|h}{2}\rho_{xx} = 0 \quad (75)$$

Il est facile de vérifier que le schéma décentré est stable dans L^2 et vérifie un principe du maximum sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

$$\tau_n \leq \frac{h}{|u|} \quad (76)$$

Le schéma décentré se généralise très naturellement aux systèmes de Friedrichs. Il suffit d'écrire un schéma décentré sur chaque variable caractéristique et de revenir aux variables de départ. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{A_0\varphi_i^{n+1} - A_0\varphi_i^n}{\tau_n} + \frac{f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n}{h} &= 0, \\ f_{i+1/2}^n &= f(\varphi_i^n, \varphi_i^{n+1}) \\ f(\varphi_L, \varphi_R) &= A_1^+ \varphi_L + A_1^- \varphi_R \end{aligned} \quad (77)$$

Cette formule a un sens lorsque l'on sait définir $g(A)$ quand A est une matrice carrée. Si la matrice est diagonalisable

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}DP \\ D &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \\ g(A) &= P \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(\lambda_m) \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned} \quad (78)$$

Remarques : on construit ainsi toutes les matrices qui commutent avec A . Si A n'est pas diagonalisable, nous définissons le polynôme d'interpolation G de g sur les valeurs propres de A . G satisfait donc

$$\begin{aligned} G \text{ polynôme,} \\ \forall i = 1 \dots m, \quad G(\lambda_i) &= g(\lambda_i). \end{aligned} \quad (79)$$

Nous avons alors

$$g(A) = G(A) \quad (80)$$

3.2 DG en variables entropiques

Il est possible de généraliser le schéma décentré aux dimensions supérieures et à des ordres quelconques. Pour cela, nous allons suivre une approche qui emprunte à la fois à la méthode des éléments finis et à la méthode des volumes finis. La présentation est basée sur [1]. Nous ne nous préoccupons pas de la discrétisation en temps. Nous cherchons à approcher la solution du problème suivant

$$\partial_t w + \partial_i f_i = 0 \quad (81)$$

posé dans tout l'espace (pour simplifier). Nous disposons d'un maillage de tout l'espace par une familles d'ouverts appelés cellules de contrôle (ou volumes finis) K tel que

- les cellules sont des ouverts disjoints;
- l'adhérence de la réunion des cellules est égale à tout l'espace.

Nous cherchons une approximation de la solution w en approchant les variables entropiques φ par des polynômes dans chaque cellule K . L'approximation dans tout l'espace est donc discontinue sur les frontières ∂K des cellules (d'où le nom de la méthode). Les fonctions test ψ sont prises dans le même espace de vecteurs dont chaque composante est polynomiale par morceaux. En multipliant le système de lois de conservation par ψ et en intégrant par partie sur une cellule K , nous trouvons la formulation de Galerkin

$$\int_K \partial_t w \psi + \int_{\partial K} f(w_L, w_R, n) \psi_L - \int_K f_i \partial_i \psi = 0 \quad (82)$$

Il est nécessaire d'introduire un flux numérique $f(w_L, w_R, n)$ car w est discontinu sur ∂K . Ce flux doit vérifier

$$\begin{aligned} f(w, w, n) &= f \cdot n = f_i n_i \text{ (consistance)} \\ f(w_L, w_R, n) &= -f(w_R, w_L, -n) \text{ (conservation)} \end{aligned} \quad (83)$$

L'exemple le plus simple est de prendre le flux centré

$$f(w_L, w_R, n) = \frac{1}{2} (f_i(w_L) + f_i(w_R)) n_i \quad (84)$$

Mais ce choix conduit à des oscillations même si une intégration en temps de Runge-Kutta peut rendre le schéma linéairement stable. Le choix le plus simple sans oscillation est le flux de Rusanov (ou Lax-Friedrichs)

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} &= \max_{0 \leq \xi \leq 1} \max_{1 \leq j \leq m} |\lambda_j(w(\varphi(\xi)))| \\ \varphi(\xi) &= \xi \varphi_L + (1 - \xi) \varphi_R \\ f(w_L, w_R, n) &= \frac{f(w_L) + f(w_R)}{2} \cdot n - \frac{\lambda_{\max}}{2} (w_R - w_L) \end{aligned} \quad (85)$$

En faisant $\psi = 1$ dans la formule de Galerkin, nous voyons que l'intégrale de w sur tout l'espace reste constante au cours du temps grâce à la propriété de conservation du flux. Nous allons maintenant établir une propriété de dissipation discrète de l'entropie qui assurera que si la solution discrète converge vers une limite quand le diamètre des cellules tend vers zéro alors cette limite est bien une solution entropique faible du problème continu (théorème de Lax-Wendroff, voir [12]). On voudrait que

$$\frac{d}{dt} \int_K S_0 + \int_{\partial K} S(w_L, w_R, n) \leq 0 \quad (86)$$

où $S(w_L, w_R, n)$ est un flux numérique d'entropie consistant avec le flux d'entropie $S_i n_i$. Or, en faisant $\psi = \varphi$ dans la formulation Galerkin, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_K \nabla_w S_0 \cdot \partial_t w + \int_{\partial K} f(w_L, w_R, n) \varphi_L - \int_K \nabla_\varphi S_i^* \partial_i \varphi &= 0 \\
\frac{d}{dt} \int_K \partial_t S_0 + \int_{\partial K} f(w_L, w_R, n) \varphi_L - \int_K \partial_i S_i^* &= 0 \\
\frac{d}{dt} \int_K \partial_t S_0 + \int_{\partial K} f(w_L, w_R, n) \varphi_L - S_i^*(\varphi_L) n_i &= 0
\end{aligned} \tag{87}$$

Nous décomposons alors le flux d'entropie en une partie conservative et une partie non-conservative

$$\begin{aligned}
f(w_L, w_R, n) \varphi_L - S_i^*(\varphi_L) n_i &= S(w_L, w_R, n) + D(w_L, w_R, n) \\
S(w_L, w_R, n) &= f(w_L, w_R, n) \frac{\varphi_L + \varphi_R}{2} - \frac{S_i^*(\varphi_L) + S_i^*(\varphi_R)}{2} \cdot n_i \\
D(w_L, w_R, n) &= -\frac{1}{2} (f(w_L, w_R, n)(\varphi_R - \varphi_L) - (S_i^*(\varphi_R) n_i - S_i^*(\varphi_L) n_i))
\end{aligned} \tag{88}$$

En utilisant le fait que

$$f_i = \nabla_\varphi S_i^* \tag{89}$$

Nous pouvons aussi écrire la dissipation numérique d'entropie comme

$$D(w_L, w_R, n) = -\frac{1}{2} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \varphi'(\xi) \cdot (f(w_L, w_R, n) - f(w(\varphi(\xi)))) d\xi \tag{90}$$

où $\xi \rightarrow \varphi(\xi)$ est une courbe paramétrée quelconque allant de φ_L à φ_R

$$\begin{aligned}
\varphi(\xi_{\min}) &= \varphi_L \\
\varphi(\xi_{\max}) &= \varphi_R
\end{aligned} \tag{91}$$

Une condition suffisante pour que le schéma vérifie une condition d'entropie discrète est donc

$$\int_0^1 \varphi'(\xi) \cdot (f(w_L, w_R, n) - f(w(\varphi(\xi)))) d\xi \leq 0 \tag{92}$$

3.3 Un théorème de convergence dans le cas linéaire

Dans le cas d'un système linéaire, il est relativement facile de prouver un résultat de convergence de la méthode DG.

Nous cherchons à approcher la solution du problème suivant

$$\begin{aligned}
\varphi_t + A^i \partial_i \varphi &= 0, \quad \text{sur } \Omega, \\
\varphi(x, 0) &= \varphi_0(x), \quad t = 0, \\
A^i n_i^- \varphi &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{93}$$

On considère un maillage de Ω en volumes q_i :

- Les q_i sont des ouverts disjoints,
- $\bigcup_i \overline{q_i} = \overline{\Omega}$,
- le diamètre maximum des q_i est égal à h .

Nous introduisons les notations suivantes

$$D_h = \bigcup_i \partial q_i \quad (94)$$

Le vecteur normal unitaire à D_h est noté n . Sur la partie commune avec $\partial\Omega$, il est orienté vers l'extérieur de Ω . Soit x un point de D_h et φ un champ de vecteur discontinu sur D_h . Nous notons

$$\begin{aligned} \varphi_L &= \varphi(x + 0^- n) \quad (L = \text{Left} = \text{gauche}) \\ \varphi_R &= \varphi(x + 0^+ n) \quad (R = \text{Right} = \text{droite}) \end{aligned} \quad (95)$$

$$[\varphi]_{D_h} = \varphi_R - \varphi_L \quad (96)$$

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) &= \int_{\Omega} \varphi \psi \\ [\varphi, \psi] &= \int_{D_h} \varphi \psi \end{aligned} \quad (97)$$

Nous convenons d'étendre par 0 tous les champs en dehors de Ω de sorte que

$$[\varphi]_{\partial\Omega} = \varphi_{\partial\Omega} \quad (98)$$

Soit la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} B(\varphi, \psi) &= (A^i \partial_i \varphi, \psi) + [A^i n_i^- (\varphi_R - \varphi_L), \psi_L] \\ &+ [A^i n_i^+ (\varphi_R - \varphi_L), \psi_R] \end{aligned} \quad (99)$$

Un calcul simple montre que

$$B(\varphi, \varphi) = \frac{1}{2} [|A^i n_i| (\varphi_R - \varphi_L)(\varphi_R - \varphi_L)] \geq 0 \quad (100)$$

Le problème continu est équivalent à trouver φ (de régularité convenable : H^k par morceaux que nous notons H_m^k) tel que

$$\begin{aligned} (\partial_t \varphi, \psi) + B(\varphi, \psi) &= 0 \\ (\varphi(x, 0), \psi) &= (\varphi_0, \psi), \\ \forall \psi \in H_m^k. \end{aligned} \quad (101)$$

Le problème discret choisi est trouver $\varphi \in P_m^k$ (polynomial par morceaux) tel que

$$\begin{aligned} (\partial_t \varphi_h, \psi_h) + B(\varphi_h, \psi_h) &= 0 \\ (\varphi_h(x, 0), \psi_h) &= (\varphi_0, \psi_h), \\ \forall \psi_h \in P_m^k. \end{aligned} \quad (102)$$

Nous notons Δ l'écart entre la solution φ et son projeté L^2 sur P_m^k

$$\Delta = p(\varphi) - \varphi \in H_m^k \quad (103)$$

Nous notons Δ_h l'écart entre le projeté L^2 de φ et la solution discrète φ_h

$$\Delta_h = p(\varphi) - \varphi_h \in P_m^k \quad (104)$$

En retranchant le problème discret au problème continu, nous obtenons

$$(\partial_t(\varphi - \varphi_h), \psi_h) + B(\varphi - \varphi_h, \psi) = 0 \quad (105)$$

soit encore

$$(\partial_t \Delta_h, \Delta_h) + B(\Delta_h, \Delta_h) = (\partial_t \Delta, \Delta_h) + B(\Delta, \Delta_h) \quad (106)$$

Dans la suite, C est une constante qui ne dépend que de Ω et de "l'applatissage" des volumes q_i . La forme bilinéaire B est positive mais n'est pas symétrique. L'inégalité de Cauchy schwartz ne s'applique qu'à la partie symétrique de B . Calculons donc la partie antisymétrique

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(B(\varphi, \psi) - B(\psi, \varphi)) &= \frac{1}{2}(A^i \partial_i \varphi, \psi) - \frac{1}{2}(\varphi, A^i \partial_i \psi) + \\ &\left[\frac{1}{2} A^i n_i^- (\varphi_R - \varphi_L), \psi_L \right] + \left[\frac{1}{2} A^i n_i^+ (\varphi_R - \varphi_L), \psi_R \right] + \\ &\left[-\frac{1}{2} A^i n_i^- (\psi_R - \psi_L), \varphi_L \right] + \left[-\frac{1}{2} A^i n_i^+ (\psi_R - \psi_L), \varphi_R \right] \\ &= -(\varphi, A^i \partial_i \psi) + \\ &\left[\frac{1}{2} A^i n_i^- (\varphi_R - \varphi_L), \psi_L \right] + \left[\frac{1}{2} A^i n_i^+ (\varphi_R - \varphi_L), \psi_R \right] + \\ &\left[-\frac{1}{2} A^i n_i^- (\psi_R - \psi_L), \varphi_L \right] + \left[-\frac{1}{2} A^i n_i^+ (\psi_R - \psi_L), \varphi_R \right] \\ &\left[\frac{1}{2} A^i n_i \varphi_L, \psi_L \right] - \left[\frac{1}{2} A^i n_i \varphi_R, \psi_R \right] \\ &= -(\varphi, A^i \partial_i \psi) + \left[\frac{1}{2} A^i n_i (\varphi_L + \varphi_R), (\psi_L - \psi_R) \right] \end{aligned} \quad (107)$$

Nous en déduisons l'inégalité

$$B(\Delta, \Delta_h) \leq B(\Delta, \Delta)^{1/2} B(\Delta_h, \Delta_h)^{1/2} + \left| \left[\frac{1}{2} A^i n_i (\Delta_L + \Delta_R), (\Delta_{h,L} - \Delta_{h,R}) \right] \right| \quad (108)$$

Cauchy-Schwartz sur le second membre donne

$$\left| \left[\frac{1}{2} A^i n_i (\Delta_L + \Delta_R), (\Delta_{h,L} - \Delta_{h,R}) \right] \right| \leq C B(\Delta_h, \Delta_h)^{1/2} \|\Delta\|_{L^2(D_h)} \quad (109)$$

Ensuite, nous disposons des estimations suivantes sur les projetés L^2

$$\begin{aligned} \|\Delta\|_{L^2(\Omega)} &\leq C h^{k+1} \|\varphi\|_{k+1,m} \\ \|\Delta\|_{L^2(D_h)} &\leq C h^{k+1/2} \|\varphi\|_{k+1,m} \end{aligned} \quad (110)$$

Par ailleurs, $p(\varphi)$ étant le projeté L^2 de φ , nous avons

$$\begin{aligned} (\Delta, \Delta_h) &= 0 \\ (\Delta, A^i \partial_i \Delta_h) &= 0 \end{aligned} \quad (111)$$

De même,

$$\begin{aligned} \partial_t(\Delta, \Delta_h) &= (\partial_t \Delta, \Delta_h) + (\Delta, \partial_t \Delta_h) = (\partial_t \Delta, \Delta_h) \\ \Rightarrow (\partial_t \Delta, \Delta_h) &= 0 \end{aligned} \quad (112)$$

Tout ce qui précède nous conduit à l'estimation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t (\Delta_h, \Delta_h) + B(\Delta_h, \Delta_h) &\leq B(\Delta, \Delta)^{1/2} B(\Delta_h, \Delta_h)^{1/2} + B(\Delta_h, \Delta_h)^{1/2} \|\Delta\|_{L^2(D_h)} \\ &\leq CB(\Delta_h, \Delta_h)^{1/2} h^{k+1/2} \|\varphi\|_{k+1,m} \end{aligned} \quad (113)$$

L'inégalité suivante est très utile

$$\forall \alpha \neq 0, \quad ab \leq \frac{\alpha^2 a^2}{2} + \frac{b^2}{2\alpha^2} \quad (114)$$

Nous obtenons

$$\frac{1}{2} \partial_t (\Delta_h, \Delta_h) + B(\Delta_h, \Delta_h) \leq \frac{\alpha^2 C}{2} B(\Delta_h, \Delta_h) + \frac{C}{2\alpha^2} h^{2k+1} \|\varphi\|_{k+1,m}^2 \quad (115)$$

Un choix simple consiste à prendre $\alpha^2 = 1/C$. Nous arrivons à

$$\partial_t \|\Delta_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + B(\Delta_h, \Delta_h) \leq Ch^{2k+1} \|\varphi\|_{k+1,m}^2 \quad (116)$$

Nous intégrons alors cette inégalité de $t = 0$ à $t = T$, ce qui conduit à

$$\sqrt{\|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t=0}^T B(\varphi - \varphi_h, \varphi - \varphi_h)} \leq Ch^{k+1/2} \sqrt{\int_{t=0}^T \|\varphi\|_{k+1,m}^2} \quad (117)$$

Il y a convergence un peu plus forte que dans L^2 (petit contrôle des discontinuités de φ_h). Enfin, grâce à l'inégalité triangulaire, nous trouvons l'estimation d'erreur

4 Problème de Riemann pour la MHD

4.1 Cas linéaire

Nous considérons le système de Friedrichs (48) avec $A_0 = I$.

Le cas particulier $d = 1$ est très utile dans les applications lorsque la condition initiale est de la forme

$$\varphi(x, 0) = \begin{cases} \varphi_L & \text{si } x < 0, \\ \varphi_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (118)$$

Dans ce cas, la solution est donnée pour $t > 0$ par la formule (nous notons $A = A_1$)

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi_L + \varphi_R) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \left(A - \frac{x}{t} I \right) (\varphi_R - \varphi_L). \quad (119)$$

4.2 Théorème de Lax

Voir [11]

4.3 Cas de la MHD

Les équations de la MHD 1D s'écrivent

$$\begin{aligned}
\rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\
(\rho u)_t + (\rho u^2 + p + \frac{1}{2}B^2)_x &= 0, \\
(\rho v)_t + (\rho uv - bB)_x &= 0, \\
B_t + (uB - bv)_x &= 0, \\
E_t + ((E + p + \frac{1}{2}B^2)u - bB \cdot v)_x &= 0, \\
E &= \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}B^2.
\end{aligned} \tag{120}$$

Le champ magnétique vectoriel s'écrit

$$\mathbf{B} = (B^x, B^y, B^z), \quad b = B^x, \quad B = (B^y, B^z). \tag{121}$$

Sa composante normale $b > 0$ est un paramètre constant. Seule la composante tangentielle B est variable.

De même, on décompose la vitesse en composante normale et tangentielle

$$u = (u^x, u^y, u^z), \quad u = u^x, \quad v = (u^y, u^z). \tag{122}$$

Les variables conservatives sont

$$W = (\rho, \rho u, \rho v, B, E), \tag{123}$$

et les variables primitives sont

$$Y = (\rho, u, p, v, B). \tag{124}$$

On peut écrire le système dans les variables primitives. Détails des calculs

$$\begin{aligned}
\rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\
u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}p_x + \frac{1}{\rho}BB_x &= 0, \\
v_t + uv_x - \frac{1}{\rho}bB_x &= 0, \\
B_t + Bu_x + uB_x - bv_x &= 0, \\
\frac{1}{\gamma - 1}p_t + \frac{1}{2}(\rho(u^2 + v^2))_t + BB_t \\
+ ((\frac{\gamma}{\gamma - 1}p + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) + B^2)u - bBv)_x &= 0.
\end{aligned} \tag{125}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\gamma - 1}(p_t + \gamma pu_x + \gamma up_x) + 2uBB_x + B^2u_x \\
&- bBv_x - bvB_x - u_xB^2 + bBv_x - uBB_x \\
&+ \rho \left(\left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right)_t + u \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right)_x \right) = 0
\end{aligned} \tag{126}$$

Un champ est vraiment non-linéaire ssi en tout point Y

$$\nabla\lambda_i(Y) \cdot r_i(Y) \neq 0. \quad (133)$$

Quitte à retourner le vecteur propre r_i , il est loisible de supposer dans ce cas que

$$\nabla\lambda_i(Y) \cdot r_i(Y) > 0. \quad (134)$$

Les champs 2, 4 et 6 sont linéairement dégénérés (LD) tandis que les autres champs sont vraiment non-linéaires (VNL). Le champ 4 est une discontinuité de contact à travers laquelle seul ρ est discontinu. Pour les champs 2 et 4, les invariants de Riemann sont ρ, u, p, B^2 et les deux composantes de $\mp B + \sqrt{\rho}v$. Nous notons que si $B = 0$ alors les valeurs propres 1,2,3 sont égales, de même que les valeurs propres 5,6,7. Le système reste cependant diagonalisable. D'autre part, il est possible que $\nabla\lambda_i(Y) \cdot r_i(Y) = 0$ pour certains vecteurs Y (non convexité, défaut de VNL). Le théorème de Lax ne s'applique donc pas toujours et il faut s'attendre à des comportements exotiques (non unicité).

À chaque mode propre VNL nous pouvons associer dans le cas régulier (non exotique...) des solutions détente ou choc. Commençons par les détentes. Nous nous donnons un état W_L et voulons le relier à un état W dépendant d'un paramètre η . Pour cela nous résolvons le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} Y'(\eta) &= r_i(Y(\eta)), \\ Y(\eta_0) &= Y_L. \end{aligned} \quad (135)$$

La solution de cette équation différentielle dépend bien sûr du choix de normalisation du vecteur propre r_i . Nous pouvons aussi calculer l'évolution de la valeur propre le long de la courbe en résolvant

$$\begin{aligned} \xi'(\eta) &= \nabla\lambda_i(Y(\eta)) \cdot Y'(\eta) = \nabla\lambda_i(Y(\eta)) \cdot r_i(Y(\eta)), \\ \xi(\eta_0) &= \lambda_i(Y_L). \end{aligned} \quad (136)$$

D'après l'hypothèse de VNL, le changement de variable $\xi = \xi(\eta)$ est monotone et donc bien bijectif. Posons

$$Z(x, t) = Y(\xi^{-1}(x/t)). \quad (137)$$

Le vecteur Z est bien solution de $Z_t + A(Z)Z_x = 0$. Nous venons de construire la i - courbe de détente. Nous noterons

$$\begin{aligned} Y &= D_i(Y_L, \eta_i) \\ D_i(Y_L, \eta_{0,i}) &= Y_L. \end{aligned} \quad (138)$$

Le choix du paramètre η n'est pas important sauf en pratique (donc finalement il l'est !). Choix idiot : un invariant de Riemann R (qui vérifie $\nabla R \cdot \lambda_i = 0$). Choix utile théoriquement : $\eta = \lambda_i$, la normalisation naturelle est alors $\nabla\lambda_i \cdot r_i = 1$. Choix utile en pratique : une composante (numéro k) de Y (qui n'est pas un invariant de riemann). Il faut alors normaliser r_i de sorte que $r_{i,k} = 1$. Dans la suite, pour fixer les idées, nous supposerons que $\xi(\eta)$ est croissante par rapport au paramètre et que donc la partie admissible de la courbe de détente correspond à $\eta > \eta_0$. En pratique, c'est souvent faux (par exemple si on paramètre

avec la masse volumique ρ) : il faut alors changer l'état gauche Y_L en état droit Y_R ou décider que la partie admissible de la courbe est $\eta < \eta_0$.

Les chocs sont plus difficiles à paramétrer. Les conditions de Rankine-Hugoniot s'écrivent pour un choc de vitesse s

$$\begin{aligned} s(\eta)(W(\eta) - W_L) &= f(W(\eta)) - f(W_L), \\ W(\eta_0) &= W_L. \end{aligned} \quad (139)$$

En dérivant et en posant $\eta = \eta_0$, nous trouvons

$$s(\eta_0)W'(Y(\eta_0))Y'(\eta_0) = f'(W_L)W'(Y(\eta_0))Y'(\eta_0) \quad (140)$$

et en multipliant par $W'(Y(\eta_0))^{-1}$ nous trouvons

$$s(\eta_0)Y'(\eta_0) = A(Y_L)Y'(\eta_0). \quad (141)$$

donc $s(\eta_0)$ est une valeur propre de A et $Y'(\eta_0)$ un vecteur propre correspondant. Nous nous attendons donc à trouver (localement au moins et dans le cas régulier) m courbes de choc C_i , $i = 1 \dots m$ tangentes à D_i en $\eta = \eta_0$. C'est le cas (preuve par le théorème des fonctions implicites). De plus, si le paramètre η est une composante de Y ou la vitesse $\lambda_i(Y)$ alors, le raccord est de classe C^2 .

Le problème est de classer globalement les chocs car les courbes C_i peuvent être tangentes en certains points et nous ne savons plus à quelle valeur propre le choc est associé.

Le critère habituel consiste à dire que le choc appartient à la famille i et est admissible ssi

$$\lambda_i(Y_L) > s(\eta) > \lambda_i(Y(\eta)). \quad (142)$$

Interprétation : les caractéristiques du champ i venant de la gauche et de la droite rencontrent le choc.

Avec un peu de chance, nous réussissons ainsi à construire les courbes de choc

$$\begin{aligned} Y(\eta) &= C_i(Y_L, \eta), \\ Y(\eta_0) &= Y_L. \end{aligned} \quad (143)$$

Nous collons alors ces deux types de solutions et nous pouvons alors introduire les courbes M_i qui permettent de construire tous les états Y reliés à Y_L par une détente ou un choc de la famille i

$$M_i(Y_L, \eta) = \begin{cases} D_i(Y_L, \eta) & \text{si } \eta > \eta_0^i, \\ C_i(Y_L, \eta) & \text{si } \eta < \eta_0^i. \end{cases} \quad (144)$$

Ces courbes sont de classe C^2 avec un choix correct des paramètres η^i .

dans le cas où le champ est LD, il n'y a plus de distinction entre les chocs et les détente. Il n'est plus possible de paramétrer l'onde avec la vitesse de la discontinuité. Cependant, le mécanisme reste très similaire. Pour une onde LD, nous écrivons

$$\begin{aligned} Y'(\eta) &= r_i(Y(\eta)), \\ Y(0) &= Y_L, \\ Y(\eta) &= M_i(Y_L, \eta). \end{aligned} \quad (145)$$

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème de Riemann. Étant donnés deux états Y_L et Y_R . Le système à résoudre se ramène à trouver m paramètres η_1, \dots, η_m tels que

$$M_m(\dots M_2(M_1(Y_L, \eta_1), \eta_2) \dots, \eta_m) = Y_R. \quad (146)$$

La démonstration utilise le théorème des fonctions implicites. Les relations de Rankine-Hugoniot pour la MHD s'écrivent

$$\begin{aligned} m^2 [\tau] + \left[p + \frac{1}{2} B^2 \right] &= 0, \\ m [v] - b [B] &= 0, \\ m^2 [\tau B] - b^2 [B] &= 0, \\ \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} p\tau + \frac{1}{2} m^2 \tau^2 + \left(\tau - \frac{b^2}{2m^2} \right) B^2 \right] &= 0, \\ \tau &= 1/\rho. \end{aligned} \quad (147)$$

Une feuille de calcul permettant de résoudre le problème de Riemann de la MHD se trouve sur mon site

<http://www-irma.u-strasbg.fr/~helluy/mhd>

Il est possible de construire, dans certains cas, plusieurs solutions au problème de Riemann. Ces solutions satisfont toutes le critère caractéristique de Lax. Voir [18] pour la théorie et [17] pour les implications numériques.

5 Schémas de volumes finis pour la MHD modimensionnelle

5.1 Schéma de type Godunov

Voir [10] et [8].

5.2 Schémas de HLL

Voir [10] et [8]. Le schéma de HLL admet une interprétation intéressante en terme de schéma de relaxation. Cette approche peut s'appliquer à la MHD. Voir [2].

5.3 Schémas de Roe

Le schéma de Roe, bien qu'il ne soit pas entropique, est un des schémas les plus utilisés en pratique. Nous renvoyons à [10] et [8] pour la théorie générale. La construction d'une matrice de Roe pour la MHD est décrite dans [7] et [3]

5.4 Schémas VFRoe

Le schéma VFRoe est décrit dans [13]. Il est plus simple à mettre en oeuvre que le schéma de Roe. Mais il est plus difficile à étudier mathématiquement. Une implémentation de ce schéma se trouve sur mon site web dans le cas des équations de Saint-Venant

<http://www-irma.u-strasbg.fr/~helluy/mhd/index.html>

6 Stabilisation de la divergence en dimension supérieure

6.1 Méthode de Powell

Rappelons les équations de la MHD idéale

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \\ B \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho u u^T + \left(p + \frac{B^2}{2}\right) I - BB^T \\ \left(E + p + \frac{B^2}{2}\right) u - (u \cdot B) B \\ u B^T - B u^T \end{pmatrix} = 0 \quad (148)$$

A ces équations, il faut ajouter la condition de divergence nulle sur le champ magnétique

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (149)$$

En 1D, cette condition devient

$$B_1 = Cste \quad (150)$$

Powell [16] propose de remplacer cette contrainte par une équation compatible

$$\partial_t B_1 + u_1 \partial_x B_1 = 0 \quad (151)$$

En utilisant l'invariance par rotation des équations, il retombe sur le système

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \\ B \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho u u^T + \left(p + \frac{B^2}{2}\right) I - BB^T \\ \left(E + p + \frac{B^2}{2}\right) u - (u \cdot B) B \\ u B^T - B u^T \end{pmatrix} = -\nabla \cdot B \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ u \cdot B \\ u \end{pmatrix} \quad (152)$$

La structure des ondes n'est pas modifiée. Si $\nabla \cdot B = 0$ à l'instant initial, nous retrouvons le système de départ. Si une petite perturbation est introduite sur la divergence, elle est propagée à la vitesse u et donc évacuée hors du domaine de calcul (avec des conditions aux limites adéquates). En pratique, on observe une stabilisation des perturbations de la divergence du champ magnétique qui pouvait apparaître sur le modèle initial. Les termes correctifs étant non-conservatifs, dans certains cas des solutions non physiques peuvent apparaître.

6.2 Symétrisation du système de la MHD

Il est possible d'interpréter de façon plus claire la correction de Powell en cherchant à symétriser le système de la MHD [1].

Pour cela, introduisons l'entropie du fluide

$$s = \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) \quad (153)$$

Cette entropie satisfait l'EDP

$$s_t + u \cdot \nabla s + (\gamma - 1) \frac{u \cdot B}{p} \nabla \cdot B = 0 \quad (154)$$

En combinant avec la conservation de la masse, nous trouvons

$$(\rho s)_t + \nabla \cdot (\rho u s) + (\gamma - 1) \rho \frac{u \cdot B}{p} \nabla \cdot B = 0 \quad (155)$$

Si la divergence de B est nulle, la quantité $S_0 = \rho s$ satisfait donc une équation de conservation supplémentaire. Il est aussi possible de montrer que S_0 est convexe par rapport aux variables conservatives mais ce n'est pas une entropie de Lax (car le système d'évolution ne contient pas la condition $\nabla \cdot B = 0$: elle provient de la condition initiale). Le changement de variables $\phi = \nabla_w S_0(w)$ ne symétrise d'ailleurs pas le système de la MHD.

Pour symétriser, écrivons les équations de la MHD sous la forme

$$\begin{aligned} \partial_t w + \partial_i F_i(w) &= 0, \\ \partial_i B_i &= 0 \end{aligned} \quad (156)$$

avec la condition d'entropie

$$\partial_t S_0 + \partial_i S_i \leq 0 \quad (157)$$

Nous ajoutons aux équations de la MHD des multiples de $\nabla \cdot B$. Ces multiples sont donnés par une fonction $\Lambda(\varphi)$ où φ sont les variables de symétrisation

$$\partial_t w + \partial_i F_i(w) + \partial_i B_i \nabla_\varphi \Lambda(\varphi) = 0, \quad (158)$$

Des calculs simples montrent que le système devient symétrique avec le changement de variables

$$w = \nabla_\varphi S_0^* \quad (159)$$

Les flux sont donnés par

$$F_i = \nabla_\varphi S_i^* - B_i \nabla_\varphi \Lambda(\varphi) \quad (160)$$

et nous obtenons les relations de dualité généralisées

$$\begin{aligned} S_0 &= \varphi \nabla_\varphi S_0^* - S_0^* \\ S_i &= \varphi \nabla_\varphi S_i^* - S_i^* \end{aligned} \quad (161)$$

Dans le cas considéré, nous trouvons

$$\Lambda = (\gamma - 1) \rho \frac{u \cdot B}{p} \quad (162)$$

Cette fonction est homogène de degré un en φ ce qui conduit à

$$\Lambda = \nabla_\varphi \Lambda \cdot \varphi \quad (163)$$

Nous retrouvons par une autre méthode les multiplicateurs de Powell.

6.3 Nettoyage hyperbolique de la divergence

Il est possible de faire mieux : rester conservatif et propager les erreurs de divergence à des vitesses plus grandes [5]. Pour cela, nous modifions l'équation d'induction magnétique et l'équation de divergence nulle par

$$\begin{aligned} \partial_t B + \nabla \cdot (u B^T - B u^T) + \nabla \psi &= 0 \\ D(\psi) + \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned} \quad (164)$$

où D est un opérateur différentiel à déterminer. Nous voyons alors que la divergence de B et la nouvelle inconnue ψ satisfont

$$\begin{aligned} \partial_t D(\nabla \cdot B) - \Delta(\nabla \cdot B) &= 0 \\ \partial_t D(\psi) - \Delta(\psi) &= 0 \end{aligned} \tag{165}$$

Il est possible de prendre $D = 0$ (correction elliptique), $D = 1/c_p^2 \psi$ (correction parabolique), $D = 1/c_h^2 \partial_t \psi$ (correction hyperbolique). Un choix particulièrement efficace consiste à choisir

$$D(\psi) = \frac{1}{c_h^2} \partial_t \psi + \frac{1}{c_p^2} \psi \tag{166}$$

l'équation de divergence devient

$$\partial_t \psi + c_h^2 \nabla \cdot B = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi \tag{167}$$

Cette construction conserve les modes propres de la MHD. Deux valeurs propres supplémentaires viennent s'ajouter : $-c_h$ et c_h . Le système modifié est conservatif, ce qui présente un avantage sur la méthode de Powell. En pratique, c_h doit être supérieur aux valeurs propres du système original. Les calculs sont légèrement plus lourds (9 équations en 1D au lieu de 7). Les résultats obtenus sont meilleurs qu'avec la méthode de Powell.

Références

- [1] T. Barth. On the role of involutions in the discontinuous Galerkin discretization of Maxwell and magnetohydrodynamic systems. In *Compatible spatial discretizations*, volume 142 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 69–88. Springer, New York, 2006.
- [2] F. Bouchut, C. Klingenberg, and K. Waagan. A multiwave approximate Riemann solver for ideal MHD based on relaxation. I. Theoretical framework. *Numer. Math.*, 108(1) :7–42, 2007.
- [3] P. Cargo and G. Gallice. Roe matrices for ideal MHD and systematic construction of Roe matrices for systems of conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 136(2) :446–466, 1997.
- [4] H. Cartan. *Calcul différentiel*. Hermann, Paris, 1967.
- [5] A. Dedner, F. Kemm, D. Kröner, C.-D. Munz, T. Schnitzer, and M. Wesenberg. Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations. *J. Comput. Phys.*, 175(2) :645–673, 2002.
- [6] T. Frankel. *The geometry of physics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2004. An introduction.
- [7] G. Gallice. Approximation numérique de systèmes hyperboliques non-linéaires conservatifs ou non conservatifs. Thèse de HDR, 2002.
- [8] A. Harten, P. D. Lax, and B. Van Leer. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1) :35–61, 1983.

- [9] P. Helluy. *Résolution numérique des équations de Maxwell harmoniques par une méthode d'éléments finis discontinus*. PhD thesis, Sup'aéro, janvier 1994.
- [10] P. Helluy. Approximation des systèmes hyperboliques. Technical report, ULP, 2005. <http://www-irma.u-strasbg.fr/~helluy/hyper.html>.
- [11] P. D. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. In *CBMS Regional Conf. Ser. In Appl. Math. 11*, Philadelphia, 1972. SIAM.
- [12] Randall J. LeVeque. *Numerical methods for conservation laws*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 1992.
- [13] Jean-Marie Masella, Isabelle Faille, and Thierry Gallouët. On an approximate Godunov scheme. *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, 12(2) :133–149, 1999.
- [14] M. S. Mock. Systems of conservation laws of mixed type. *Journal of Differential Equations*, 37(1) :70–88, 1980.
- [15] B. Perthame. Boltzmann type schemes for gas dynamics and the entropy property. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 27(6) :1405–1421, 1990.
- [16] K. G. Powell. An approximate Riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one space dimension). Technical Report NASA/CR-194902 ICASE Report No. 94-24, ICASE-NASA Langley, ICASE, NASA Langley Research Center, April 1994.
- [17] M. Torrilhon. Non-uniform convergence of finite volume schemes for Riemann problems of ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 192(1) :73–94, 2003.
- [18] M. Torrilhon. Uniqueness conditions for Riemann problems of ideal magnetohydrodynamics. *J. Plasma Phys.*, 69(3) :253–276, 2003.