Flots dans les graphes

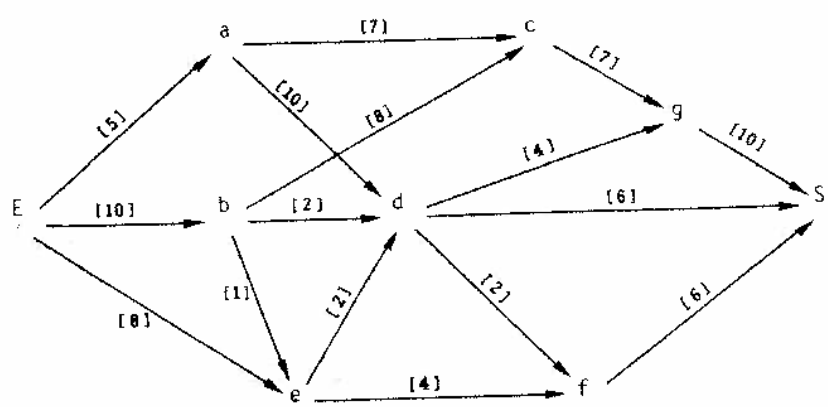
Exercice 1

(•) CAPACITÉ D'UN RÉSEAU ROUTIER

Avant d'établir un projet de construction d'autoroute on désire étudier la capacité du réseau routier, représenté par le graphe ci-dessous, reliant la ville E à la ville S.

Pour cela, on a évalué le nombre maximal de véhicules que chaque route peut écouler par heure, compte tenu des ralentissements aux traversées des villes et villages, des arrêts aux feux etc...Ces évaluations sont indiquées en centaines de véhicules par heure sur les arcs du graphe. Les temps de parcours entre villes sont tels que les automobilistes n'emprunteront que les chemins représentés par le graphe.

Quel est le débit horaire total maximal de véhicules susceptible de s'écouler entre les villes E et S ?



Exercice 2

(*) BISON FUTÉ CONTRE LES BOUCHONS

La connaissance du réseau routier défini dans l'exercice *Capacité d'un réseau routier* peut être complétée par l'évaluation du nombre maximal de véhicules pouvant traverser chacune des villes A, B,...,G par heure. En effet, un automobiliste se rendant de la ville A à la ville G et empruntant les routes (A, D) et (D, G) doit nécessairement traverser la ville D ; le débit horaire du réseau urbain de cette ville intervient donc dans l'étude du nombre de voitures circulant au maximum dans le réseau routier. Les évaluations des débits horaires maximaux étant données (en centaines de véhicules par heure) dans le tableau ci-dessous, déterminer le débit horaire maximal du réseau ainsi modifié.

villes	a	b	c	d	e	f	g
débits	6	7	8	6	6	5	9

Exercice 3

(*) ADDUCTION D'EAU (ALGORITHME DE FORD-FULKERSON)

Trois villes J, K, L sont alimentées en eau grâce à quatre réserves A, B, C, D (nappes souterraines, châteaux d'eau, usines de traitement ....). Les réserves journalières disponibles sont de 15 milliers de m^3 pour A, de 10 pour B, de 15 pour C et de 15 pour D. Le réseau de distribution, comprenant aussi bien des aqueducs romains que des canalisations récentes, peut être schématisé par le graphe ci-dessous (les débits maximaux sont indiqués sur chaque arc en milliers de m^3 par jour) :

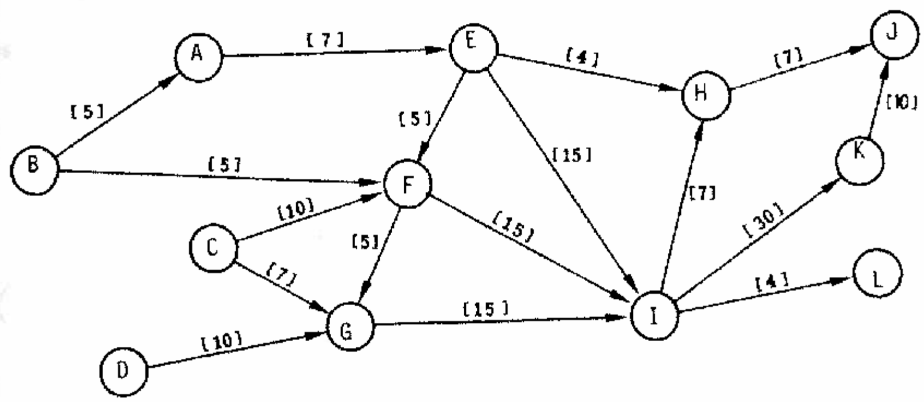


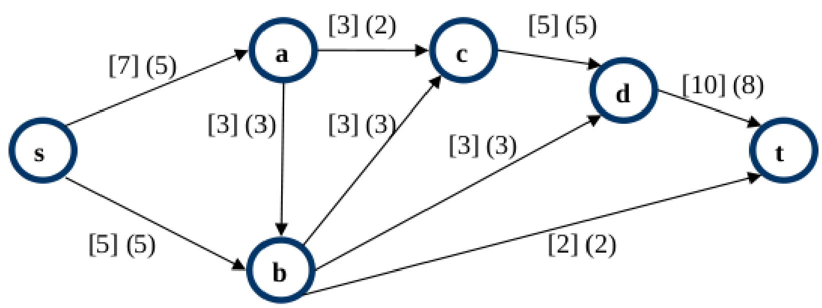
Fig. 1

Ces trois villes en pleine évolution désirent améliorer leur réseau d'alimentation afin de satisfaire des besoins futurs plus importants. Une étude a été faite et a permis de déterminer les demandes journalières maximales probables, à savoir pour la ville J : 15 milliers de m^3, pour la ville K : 20 et 15 par la ville L.

1. Déterminer la valeur du flot maximal pouvant passer dans le réseau actuel et donner la coupe minimale correspondante.
2. La valeur de ce flot est jugée nettement insuffisante, aussi le conseil intercommunal décide-t-il de refaire les canalisations (A, E) et (I, L). Déterminer les capacités à prévoir pour ces deux canalisations et la valeur du nouveau flot optimal.
3. Devant l'importance des travaux, le conseil intercommunal décide de ne pas refaire les deux canalisations en même temps. Dans quel ordre doit-on entreprendre leur réfection de façon à augmenter, après chaque tranche de travaux, la valeur du flot optimal passant dans le réseau ?
4. Quelles sont, après chaque tranche de travaux, les valeurs des flots optimaux.

Exercice 4

Soit le réseau de transport de la figure ci-dessous où les capacités des arcs sont données entre crochets. On considère le flot de *s* à *t*, de valeur 10, indiqué sur la figure ci-dessous ; les flux correspondants sont notés entre parenthèses sur chaque arc.



1. Prouver, en utilisant l'algorithme de Ford-Fulkerson, que le flot considéré est de valeur maximale.
2. On cherche à augmenter la valeur du flot maximal en augmentant les capacités des arcs. Déterminer, dans le réseau, un ensemble de 3 arcs, *A*, vérifiant la propriété suivante : pour obtenir un flot de valeur supérieure à 10, il est nécessaire d'augmenter la capacité d'au moins 1 arc de *A*. Justifier votre réponse.
3. Choisir, parmi les arcs de *A*, celui dont la capacité est minimale et montrer que l'augmentation de sa capacité permet d'augmenter à coup sûr la valeur du flot.
4. Augmenter de une unité la capacité de l'arc déterminé à la question 3 et calculer, par l'algorithme de Ford-Fulkerson, la valeur du flot maximal dans ce cas.

Exercice 5

1. On considère un réseau de transport avec N sommets, le sommet 1 étant la source et le sommet N étant le puit. Les capacités sont stockées dans une matrice $C = (c_{ij})$ de taille $N \times N$. S'il n'y a pas d'arc orienté joignant i à j alors $c_{ij} = 0$. S'il existe un arc d'origine i et de terminaison j alors $c_{ij} > 0$ représente la capacité de l'arc.

2. En utilisant cette structure de données, programmer l'algorithme de Ford-Fulkerson dans le langage de votre choix (on initialisera l'algorithme avec un flot nul $\varphi_{ij} = 0$.) Tester cet algorithme sur les exercices 1 à 4.

3. Comment améliorer l'efficacité de la programmation ?