Programmation linéaire (I)

Exercice 1

Résoudre le problème d'optimisation suivant par la méthode du simplexe

$$
(\mathrm{P}) \begin{cases} \max z = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_5 = 19 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}
$$

Exercice 2

8.1 Une brasserie A produit 2 types de bière pour lesquels elle utilise 3 matières premières : maïs, houblon et malt.
Le tableau ci-dessous résume les données du problème.

	Maïs	Houblon	Malt	Bénéfice
Bière blonde	2,5 kg	125 g	175 kg	65 F
Bière brune	7,5 kg	125 g	10 kg	115 F
Quantités disponibles	240 kg	5 kg	595 kg	

Pour fabriquer 1 tonneau de bière blonde, le brasseur utilise 2, 5 kg de maïs, 125 g de houblon et 17, 5 kg de malt. La fabrication de ce tonneau lui rapporte alors un bénéfice de 65 Francs. Le tableau se lit de manière analogue pour la bière brune.

1) Déterminer la fabrication optimale du brasseur.

2) Une brasserie concurrente (notée B) demande au brasseur A de lui vendre 50 % de son stock de houblon (et ce, bien entendu, avant que la fabrication déterminée au 1) ne soit lancée).
À quel prix minimum A devra-t-il lui vendre cette quantité de houblon ? (Expliquer clairement votre raisonnement.)

Exercice 3

III. Soit le programme linéaire

$$(PL)\begin{cases}\max \quad 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 5x_5 \\ \text{s.c.}\left|\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + 2x_4 = 10 \\ 2x_1 - 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 16 \\ 6x_1 - 2x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}\right.\end{cases}$$

1. Montrer que $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de base associée à une solution de base réalisable de (PL) ; préciser cette solution de base. (Indication $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$).

2. Ecrire le tableau du simplexe associé à cette solution de base.

3. Donner une base réalisable adjacente à la précédente et telle que la solution de base correspondante soit dégénérée (au moins une variable de base nulle). Préciser cette solution.

4. Calculer à partir de la réponse à la question 2, la solution optimale de (PL).

Exercice 4

Soit le problème d'optimisation suivant:

$$(P)\begin{cases}\min \; 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 4x_5 \\ s.c.\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_5 = 5 \\ 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0 \end{array}\right.\end{cases}$$

La solution $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ est une solution de base réalisable de (P). Ecrire le tableau du simplexe correspondant à cette solution en utilisant obligatoirement l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 1/5 \\ 2/5 & 0 & -1/10 \\ 4/5 & -1/2 & -1/5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette solution est-elle optimale ? Justifier votre réponse.