Chaînes de Markov

5 décembre 2014

Exercice 1

Une entreprise de livraison de pizzas possède trois magasins : un en centre-ville (A), un à l'est de la ville (B), et un autre à l'ouest (C). L'entreprise emploie des livreurs affectés le matin à l'un des magasins. Le statisticien de l'entreprise, fin observateur, a remarqué que :

- Pour les appels clients faits au magasin (A), 30% sont livrés au centre-ville, 30% à l'est, et 40% à l'ouest.
- Pour les appels clients faits au magasin (B), 40% sont livrés au centre-ville, 40% sont livrés à l'est, et 20% sont livrés à l'ouest.
- Pour les appels clients faits au magasin (C), 50% sont livrés au centre-ville, 30% sont livrés à l'est, et 20% sont livrés à l'ouest.

Après avoir effectué une livraison, un livreur va au magasin de la zone correspondante afin d'attendre sa prochaine course.

(1) Modéliser ce processus aléatoire comme une chaîne de Markov. On donnera le graphe des états ainsi que la matrice des probabilités de transition.

(2) Montrer qu'il existe une distribution limite et donner sa valeur.

(3) Le matin il y a 10 livreurs au magasin (A), 10 au magasin (B), et 10 au magasin (C). En supposant qu'un grand nombre de livraisons sont effectuées dans la journée, combien y en aura-t-il dans chaque magasin à la fin de la journée ?

Exercice 2

II. Un plagiste dispose de 3 voiliers qu'il loue chaque jour, le matin, à des estivants pour la journée. Ces voiliers, lors de leur sortie, peuvent subir des avaries qui nécessitent une réparation. Nous supposons que chaque voilier qui sort a, indépendamment des autres, une probabilité p de subir une avarie au cours de la journée. Nous faisons également les trois hypothèses suivantes :

- le plagiste ne peut faire ses réparations que le soir et chaque réparation demande exactement une soirée par bateau ;
- il ne laisse sortir ses bateaux que s'il en a au moins deux disponibles (et en bon état) ;
- chaque jour, la demande des clients est suffisante pour qu'il puisse louer tous ses bateaux disponibles.

0. Expliquer pourquoi, chaque matin, il y a toujours au moins 1 voilier disponible.

1. Définir les états de ce processus aléatoire, caractériser ce processus et donner la matrice M des probabilités de transition (on posera $p+q=1$).

2. Soit $q_i(n)$ $(i=1,2,3)$ la probabilité que i voiliers soient disponibles au matin du $n^{\text{ème}}$ jour. Calculer q_i^*, la limite (si elle existe) de $q_i(n)$ lorsque n tend vers l'infini et lorsque $p=q=1/2$.

Exercice 3

Un entrepreneur de travaux d'aménagement intérieur de maison et appartements dispose d'une seule équipe dont tous les membres doivent travailler sur le même chantier. Les demandes de travaux des clients qui lui parviennent peuvent être réparties en deux classes :

- Travaux de moyenne importance, durant 1 semaine (désignés par A)
- Chantiers plus importants, durant 2 semaines (désignés par B)

On suppose que l'entrepreneur ne reçoit pas de demande de chantier qui n'entrerait pas dans cette classification et qu'il n'y a pas de liste d'attente pour les travaux.

Les demandes de travaux parviennent à l'entrepreneur au début de chaque semaine. Une observation statistique a montré que les probabilités pour recevoir, un lundi donné, au moins une demande de travaux du type A ou au moins une du type B valent respectivement, p=0.5 et q=0.6. Ces demandes sont indépendantes.

Certaines semaines des travaux ont été refusés, l'équipe étant déjà occupée sur un chantier (du type B) en cours : dans ce cas le client s'adresse à un concurrent. Certaines autres semaines, l'équipe reste inactive, faute de demande.

L'exécution d'un travail de type A procure un bénéfice de 1000 euros, celle d'un travail du type B, 2300 euros. En cas d'inactivité pendant une semaine, l'entreprise subit une perte de 500 euros.

L'entrepreneur a décidé que lorsqu'il recevait simultanément 2 demandes : une de type A et une de type B, il donne suite à celle du type B.

1. On désire représenter par une chaine de Markov l'évolution de l'activité d'une semaine sur l'autre. Quels sont les états de cette chaine de Markov ? Quelles sont les évolutions entre états d'une semaine sur l'autre ? avec quelles probabilités ? Associer une matrice et un graphe.
2. En supposant que l'entreprise fonctionne déjà depuis de nombreuses semaines :
   a. Trouver la probabilité de chacun des états ? (Justifier la validité de ce calcul)
   b. En déduire l'espérance mathématique du gain relatif à une semaine de fonctionnement.
3. Recommencer le problème en supposant maintenant que l'entrepreneur donne suite, lorsqu'il reçoit simultanément une de type A et une de type B, à celle du type A. Comparer avec l'espérance du 2.a. Conclusion ?

Exercice 4

Les études dans une grande école durent 3 ans ; à l'issue de chaque année, chaque étudiant a une probabilité p de passer dans l'année supérieure (ou d'obtenir le diplôme s'il est en $3^{\text{ème}}$ année), une probabilité q de redoubler, r d'être renvoyé.

1. Montrer que le cursus d'un élève peut être modélisé par une chaîne de Markov à 5 états, dont 2 sont absorbants.
   Tracer le graphe associé à cette chaîne.
2. Calculer la probabilité pour qu'un étudiant obtienne son diplôme de fin d'études selon son état présent dans le cursus.
3. Calculer la durée moyenne des études.
4. Calculer la durée moyenne d'obtention d'un diplôme, la durée moyenne avant renvoi. Retrouver ainsi la durée moyenne des études de la question 3.