Phénomène d'attente

8 janvier 2015

Exercice 1 : Etude de l'affluence d'une station de taxis

Une station de taxis permet à 4 taxis au maximum de se garer pour attendre les clients. Les taxis arrivent à hauteur de la station aléatoirement suivant une loi de Poisson de taux μ (taxis/minute) : lorsque la station est complète le taxi poursuit sa route, sinon il s'y arrête pour attendre un client, derrière le dernier taxi en attente.

Les clients arrivent aléatoirement suivant une loi de Poisson de taux l (clients/minute), ils font éventuellement la queue et sont pris en charge dans l'ordre d'arrivée ; toutefois, on a observé que lorsque 5 clients attendent déjà, tout nouveau client arrivant renonce à attendre. La durée de prise en charge d'un client par un taxi est négligeable.

1. Associer à ce problème un processus stochastique. On notera E_{ij} l'état pour lequel i taxis et j clients sont en attente (nécessairement i ou j sont nuls). Existe-t-il une condition pour qu'un régime permanent s'installe ?
2. Calculer les probabilités des états en régime permanent ; on pourra numéroter ceux-ci et poser $c = \mu/l$; (on suppose en outre $\mu \neq l$)
3. Quel est le nombre horaire moyen de taxi arrivant à la station sans pouvoir s'y arrêter ? Quel est le nombre horaire moyen de client qui renoncent à attendre ? Que remarquez-vous ?

Application numérique : $\mu = 1$ et $l = 1,2$.

Exercice 2 : Prévision du nombre de salles de travail dans une maternité

Dans une importante maternité, en moyenne, 4 femmes par jour arrivent à la maternité pour une naissance. L'occupation moyenne d'une salle de travail est de 6 heures par accouchement. Un statisticien a déterminé que la loi d'arrivée des futures mamans peut être approchée par une loi de Poisson de taux l et celle de l'occupation des salles par une loi exponentielle de taux μ. L'objectif est de déterminer le nombre N de salles de travail (et par conséquent le nombre minimal de sages-femmes devant devant se retrouver dans la maternité), de telle sorte que la probabilité pour que toutes les salles soient occupées soit inférieure à un centième.

1. Donner la valeur numérique de l et de μ. Quelle est la dimension de l et de μ ?
2. À quel type de processus correspond ce système d'attente ? Tracer le graphe associé et valuer les arcs par les probabilités de transition.
3. La probabilité pour que le système soit, en régime permanent, dans l'état E_k est notée p_k^*. Calculer p_k^* en fonction de p_0^*.
4. Quel est l'état pour lequel toutes les salles sont occupées ? Quelle est sa probabilité ? En prenant successivement $N = 2$, puis 3, puis 4, etc... trouver le nombre de salles de travail que devra comporter la clinique pour satisfaire l'objectif énoncé ci-dessus.

Exercice 3 : guichet unique

Considérer le système formé d'un guichet unique, sans file d'attente. Quand un client arrive pour se faire servir, il y a deux possibilités : le guichet est libre et le client commence son service immédiatement ou le guichet est occupé et le client n'attend pas ; on suppose qu'il revient plus tard en concourant au phénomène de Poisson ci-dessous. Les clients suivent une loi exponentielle de taux μ et les arrivées, une loi de Poisson de taux λ.

Calculer les probabilités en régime transitoire, $P_m(t)$, $m = 0, 1$, sachant que le guichet est inoccupé à l'instant initial.

Exercice 4 : attente à la poste

Partie A

Un organisme public est ouvert, chaque jour ouvrable, de 9h à 17h sans interruption. Il accueille en moyenne 64 usagers par jour ; un guichet unique sert à traiter le dossier de chaque usager, ceci en un temps moyen de 2 minutes et demi. Les usagers, si nécessaire, font la queue dans l'ordre de leur arrivée ; même si la queue est importante, on ne refuse aucun usager.

Une étude statistique a permis de conclure que la durée aléatoire des services suit une loi exponentielle et que les arrivées des usagers forment un processus de Poisson. On suppose que le régime permanent est rapidement atteint.

1. Donner la notation de Kendall de cette file d'attente ; le temps moyen $\bar{t}_f$ passé à attendre ; le temps moyen passé dans l'organisme par chaque usager, $\bar{t}$.
2. Quelles sont les probabilités qu'il n'arrive aucun client entre 15h et 16h ? que 6 clients arrivent entre 16h et 17h ?
3. Quelle est, en moyenne et par haure, la durée pendant laquelle l'employé du guichet ne s'occupe pas des usagers ?
4. Quelle est la probabilité d'observer une file d'attente de 4 usagers, derrière celui en cours de service ?
5. Quelle est la probabilité qu'un usager passe plus d'un quart d'heure dans l'organisme ? On notera q_k^* la probabilité de trouver k usagers présents dans l'organisme, en régime permanent.

Partie B

En fait, dans l'organisme concerné, l'exigüité des locaux fait qu'on peut accueillir au plus 5 usagers : ceux qui trouvent le bureau complet à leur arrivée repartent sans avoir été reçus.

1. Associer un processus de Markov à ce problème ; tracer son graphe et donner son générateur Q.
2. Exprimer les probabilités des états en régime permanent puis donner le nombre moyen d'usagers refusés par jour ainsi que l'inactivité de l'employé du guichet.
3. Vérifier que $\lambda(1-q_5^*)= \mu\ (1-q_0^*)$. Interpréter cette relation. (q_k^* défini comme précédemment).

Exercice 5 : file M/M/m

A l'instant t=0, un client A arrive dans un système d'attente M/M/m qu'il trouve dans l'état suivant : les m serveurs sont occupés et n autres clients (lui non compris) attendent dans la file. A partir de t=0, c'est-à-dire après l'arrivée de A, aucun client arrivant ne sera accepté ; les temps de service sont mutuellement indépendants, identiquement distribués selon une loi exponentielle de taux μ. Les clients qui attendent seront servis dans l'ordre premier arrivé – premier servi.

1. Quel est le temps moyen d'attente de A dans la file ?
2. Quel est le temps de vidage du système (temps qui s'écoule entre t=0 et l'instant où le système est vide, i.e. aucun client n'est présent) ?
3. Soit X l'ordre de départ de A (vis-à-vis des m+n+1 clients initialement présents). Calculer P[X=k] pour toutes les valeurs de k possibles.
4. Calculer la probabilité pour que le départ de A ait lieu avant le départ du client qui le précédait dans la file.
5. Si w est l'attente dans la file du client A, calculer P[w>x]

Exercice 6 : salon de coiffure

Dans un salon de coiffure, il y a 2 coiffeurs et 2 fauteuils d'attente. Les arrivées des clients suivent un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 2h^{-1}$ et le service est exponentiel de moyenne 30 mn. De plus, 20% des clients renoncent à entrer si les 2 coiffeurs sont occupés et 60% renoncent s'il y a déjà un client en attente.

1. Déterminer la loi du nombre de clients en régime stationnaire
2. Quel est le nombre moyen de clients dans le salon ?