

Techniques d'analyse numérique

Projet à rendre avant le vendredi 16 mai 2025 sur Moodle

Consignes

Il est recommandé de rédiger le compte-rendu au format Markdown.

L'utilisation de l'IA est autorisée, mais il est obligatoire de décrire la démarche utilisée et de joindre à la copie, en annexes, les commandes ChatGPT qui ont été utilisées pour obtenir le résultat. Vous pouvez utiliser par exemple l'extension [1] pour exporter le résultat des prompts. Les programmes doivent être en Python.

Vous pouvez aussi utiliser SymPy pour les calculs formels, en expliquant votre démarche.

Pour chaque programme réalisé, on décrira en détail la méthode, le choix des signatures des fonctions, les tests réalisés pour vérifier le fonctionnement.

La rédaction doit être personnelle : les copies identiques ou les copier-coller pratiqués sans réflexion personnelle seront sanctionnés.

Énoncé

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 6 & -2 & -12 \\ -2 & 3 & 9 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

1. Diagonaliser cette matrice : trouver une matrice de passage P et une matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ tels que

$$D = P^{-1}AP.$$

On note e_j la j -ème colonne de P . Que peut-on dire de e_j ?

2. Écrire un programme Python utilisant numpy qui permet de retrouver la plus grande et la plus petite valeur propre d'une matrice A au moyen de la méthode la puissance itérée, ainsi que des vecteurs propres associés.
3. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une application régulière, telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$. On note Γ la courbe paramétrée engendrée par γ , $\Gamma = \gamma([0, 1])$. Écrire un programme Python qui représente la courbe obtenue avec matplotlib lorsque

$$\gamma(t) = \exp(2i\pi t), \quad i^2 = -1. \quad (2)$$

4. On considère maintenant une application f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . On définit l'intégrale de f sur le contour Γ par la formule

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{t=0}^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (3)$$

Calculer cette intégrale de contour lorsque $f(z) = (z - z_0)^3$, $z_0 = \frac{1+i}{2}$ et que γ est donné par (2). Même question pour $f(z) = 1/(z - z_0)$.

5. Écrire un programme Python qui calcule l'intégrale (3) par la méthode des rectangles à gauche. Vérifier que dans ce cas (sur les deux exemples de la question 4), la méthode est d'ordre > 1 . Pourquoi? (Indications : [2])
6. On définit le projecteur Π_j sur l'espace propre associé à λ_j de la façon suivante. On considère la matrice diagonale J_j définie par

$$(J_j)_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puis

$$\Pi_j = PJ_jP^{-1}.$$

Soit une matrice A de taille $n \times n$ dont les valeurs propres sont notées $\lambda_j, j = 1 \dots n$. Soit un contour Γ . On suppose que Γ est la frontière d'un ouvert Ω du plan complexe : $\Gamma = \partial\Omega$, que γ fait le tour de Ω dans le sens trigonométrique et que γ n'a pas d'autre point double que 0 et 1 :

$$\forall s, t \in]0, 1], s \neq t \Rightarrow \gamma(s) \neq \gamma(t).$$

On note K l'ensemble des indices des valeurs propres qui sont entourées par le contour Γ :

$$K = \{k, \lambda_k \in \Omega\}.$$

Voir exemple sur la Figure 1.

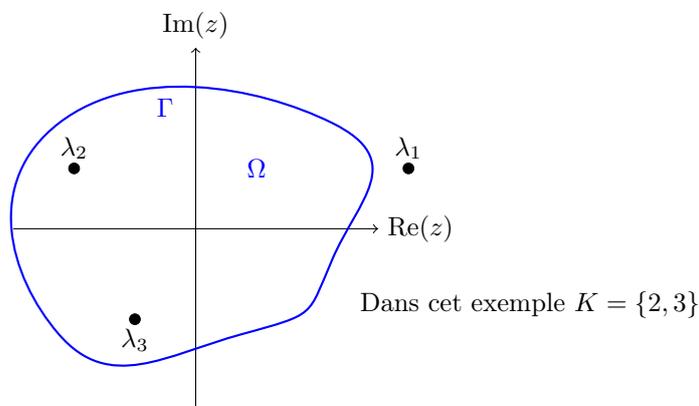


FIGURE 1 – Exemple de contour dans le plan complexe entourant des valeurs propres.

On admet le (joli) résultat suivant¹ :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} dz = \sum_{k \in K} \Pi_k. \quad (4)$$

1. Si $B(t) = (b_{i,j}(t))$ est une matrice dont les éléments dépendent de t , $\int B(t)dt$ est tout simplement la matrice dont les éléments sont les $\int b_{i,j}(t)dt$.

Vérifier cette formule (avec SymPy) pour la matrice (1) et le contour

$$\gamma(t) = 2 \exp(2i\pi t)$$

qui entoure la valeur propre λ_1 (mais pas λ_2 ni λ_3). Voici un exemple de calcul d'intégrale avec SymPy :

```
import sympy as sp

x = sp.Symbol('x')
f = x**2
int_f = sp.integrate(f, x)

print(int_f)
```

7. Adapter le programme de la question 5 pour calculer numériquement la formule (4). Vérifier votre programme sur l'exemple de la question 6. Cette technique est utilisée en calcul intensif pour évaluer les valeurs propres de très grandes matrices. Voir par exemple [3].

Références

- [1] chatopenai.pro. Chatgpt to markdown. <https://chrome.google.com/webstore/detail/chatgpt-to-markdown/adghjpdmpbcmppeafpodcjpagmegdpci>, 2023.
- [2] Philippe Helluy, Sylvain Maire, and Patrick Ravel. Intégration numérique d'ordre élevé de fonctions régulières ou singulières sur un intervalle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 327(9) :843–848, 1998, <https://irma.math.unistra.fr/~helluy/PREPRINTS/cras1998.pdf>.
- [3] Eric Polizzi. Density-matrix-based algorithm for solving eigenvalue problems. *Physical Review B*, 79(11) :115112, 2009, <http://www.feast-solver.org/>.