Devoir maison, techniques d'analyse numérique, 2022

Consignes importantes :

À rendre sur Moodle avant le vendredi 6 mai 2022, dernier délai. Le dépôt doit être constitué d'un seul fichier de moins de 20 Mo au format pdf.

Il faut rédiger le devoir avec un logiciel de traitement de texte au choix (Word, LibreOffice, LateX, LyX, *etc.*) : pas de texte manuscrit scanné (ou tout format qui empêche la détection du plagiat). Le fichier doit être converti au format pdf avant le dépôt. Le code source des programmes doit être intégré à la rédaction et commenté (ne pas fournir le code source en annexe ou de fichier supplémentaire). Les exemples traités avec les programmes doivent également être intégrés à la rédaction. Les devoirs qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigés. La rédaction doit être personnelle, les ressemblances importantes seront sanctionnées.

Exercice 1

On appelle matrice de rotation de Givens, et on note $G(i,j,\theta)$, la matrice de taille $N \times N$

$$G(i,j,\theta) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\theta & \cdots & -\sin\theta & & \\ & & & & & & \\ & & \sin\theta & & \cos\theta & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

1. Montrer que $G(i,j,\theta)$ est une matrice unitaire. On pourra effectuer la vérification dans le cas $N = 4$.
2. Soit A une matrice $N \times N$ et j et n des entiers tels que $n < j \leq N$. Montrer qu'il existe une matrice de Givens $G(j-1,j,\theta)$ telle que l'élément en position (j,n) de la matrice $G(j-1,j,\theta)A$ est nul.
3. En déduire un algorithme pour calculer la décomposition QR de A
4. Application à
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Écrire un programme Python qui calcule la décomposition QR. Le programme sera constitué d'une fonction `givens(N,i,j,theta)` qui renvoie la matrice de Givens $G(i, j, \theta)$, d'une fonction `qr_dec(A)` qui renvoie la décomposition QR de A (et qui appelle la fonction précédente) et d'un exemple qui montre que les deux fonctions précédentes donnent le bon résultat. Les passages importants du programme seront soigneusement commentés et expliqués.
6. (Facultatif) Optimiser le programme précédent en calculant directement la décomposition QR sans utiliser le produit matriciel. Tester et valider.

Exercice 2

On considère la fonction

$$f(x) = x^3 + x - 1.$$

1. Au moyen d'une étude de fonction, montrer que f admet une unique racine α dans l'intervalle $]0, 1[$.
2. Soit la fonction
$$g(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$
Montrer que la suite (x_n) définie par
$$x_0 \in [0, 1], \quad x_{n+1} = g(x_n)$$
converge vers α.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Combien faut-il d'itérations pour que x_n soit une approximation à ε près de α ? Application : $x_0 = 0$, $\varepsilon = 10^{-10}$.
4. Écrire un programme Python qui calcule les itérés x_n. Vérifier, en commentant, le résultat obtenu à la question 3.
5. On considère maintenant la méthode de Newton pour résoudre $f(x) = 0$ en partant de $y_0 = 1$. La méthode de Newton s'écrit sous la forme
$$y_{n+1} = h(y_n).$$
Expliciter la fonction h.
6. Soit $\varepsilon > 0$. Combien faut-il d'itérations pour que y_n soit une approximation à ε près de α ? Application : $y_0 = 1$, $\varepsilon = 10^{-10}$.
7. Écrire un programme Python qui calcule les itérés y_n. Vérifier, en commentant, le résultat obtenu à la question 6.