Résolution numérique des équations différentielles

Exercice 1

Afin de résoudre l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)),$$

on considère le schéma suivant

$$\begin{aligned} x_{k+1/2} &= x_k + \frac{\Delta t}{2} f(x_k), \\ x_{k+1} &= x_k + \Delta t f(x_{k+1/2}). \end{aligned}$$

Montrer que ce schéma (schéma d'Euler amélioré) est d'ordre 2.

Exercice 2

Pour résoudre l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)),$$

on considère le schéma à un pas suivant (dit méthode de Heun) :

$$\begin{aligned} x_* &= x_i + \Delta t f(x_i), \\ x_{**} &= x_i + \Delta t f(x_*), \\ x_{i+1} &= \frac{x_* + x_{**}}{2}. \end{aligned}$$

Montrer que ce schéma est d'ordre 2.

Exercice 3

Pour résoudre l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)),$$

on considère le schéma le schéma suivant :

$$\begin{aligned} x_* &= x_i + \alpha \Delta t f(x_i), \\ x_{i+1} &= x_* + \beta \Delta t f(x_*), \end{aligned}$$

1. Déterminer les nombres complexes α et β pour que le schéma soit d'ordre 2. Que constate-t-on ?
2. Quel est l'intérêt de cette méthode ?
3. La tester pour résoudre l'équation différentielle $x' = -x^2$, $x(0) = 1$. Calculer numériquement $x(1)$ pour plusieurs valeurs de Δt. Vérifier numériquement que la méthode est d'ordre 2.

Exercice 4

Soit une méthode à un pas

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(t, y, h),$$

pour résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) = f(y(t), t).$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 (aussi appelée méthode RK3) s'écrit

$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

avec

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, y) \\ k_2 &= f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= f(t + h, y + 2hk_2 - hk1) \end{aligned}$$

1) Donner le plan de calcul pour démontrer que cette méthode est d'ordre 3. On pourra se contenter d'étudier le cas où $f(y, t) = f(y)$ ne dépend pas de t.

2) Au moyen d'un logiciel de calcul formel, montrer que la méthode est d'ordre 3.

Exercice 5

Soit une méthode à un pas

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(t, y, h),$$

pour résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) = f(y(t), t).$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (aussi appelée méthode RK4) s'écrit

$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, y) \\ k_2 &= f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 &= f(t + h, y + hk_3) \end{aligned}$$

1) Donner le plan de calcul pour démontrer que cette méthode est d'ordre 4.

2) Au moyen d'un logiciel de calcul formel, montrer que la méthode est d'ordre 4.

Exercice 6

On considère le modèle le modèle suivant de propagation d'une épidémie

$$x' \quad = \quad \alpha x(\beta - x).$$

Dans ce modèle, $x(t)$ est la proportion de la population qui a été immunisée (donc infectée) au cours du temps t (exprimé en jours). À l'instant initial, $x(0) = \varepsilon > 0$. ε est compris entre 0 et 1. β représente la fraction de population qui doit être immunisée pour que l'épidémie s'arrête. Ici, on choisit $\beta = 1/2$.

1. On suppose qu'au début de l'épidémie, le nombre de cas est multiplié par 1.2 chaque jour et que ε est petit. En déduire une valeur approximative de α.
2. Calculer la solution exacte de l'équation différentielle. Au bout de combien de jours a lieu le pic de l'épidémie ?
3. Retrouver numériquement ces résultats avec les schémas d'Euler et d'Euler amélioré.

Exercice 7

On considère le modèle de Lotka-Volterra (a, b, c, d sont des constantes > 0)

$$\begin{aligned} x' &= ax - bxy, \\ y' &= -cy + dxy, \end{aligned}$$

représentant l'évolution d'une population de proies x et de prédateurs y au cours du temps.

1) Calculer l'équation des courbes solution dans le plan (x, y) sous la forme

$$F(x, y) = C.$$

En déduire que ces courbes sont fermées autour du point de coordonnées $(x = c/d, y = a/b)$.

2) programmer et comparer les schémas d'Euler, d'Euler amélioré et RK4. On prendra comme constantes du modèle

$$a = \frac{\ln 2}{90}, \quad c = \frac{\ln 10}{30}, \quad b = \frac{a}{10}, \quad d = \frac{c}{100}.$$

On testera les pas de temps $\Delta t = \ 3;\ 1;\ 0,1.$

3) Comment vérifier numériquement l'ordre de ces schémas ?

Exercice 8

On se propose de montrer la convergence de la méthode d'Euler explicite pour résoudre le problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, T]$

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

La fonction f est supposée de classe $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et Lipschitzienne de constante L. Nous posons donc ici, pour $h > 0$,

$$\Phi(x,h) = f(x),$$

et la méthode s'écrit

$$x_{i+1} = x_i + h\Phi(x_i, h).$$

1) Montrer que x est de classe C^2 sur $[0,T]$.

2) Soit x la solution du problème de Cauchy. Montrer qu'il existe $\theta(t,h)$ dans l'intervalle $]0,1[$ tel que

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \Phi(x(t),h) = -\frac{h}{2}x''(t+\theta h)$$

(bien sûr, on suppose que $t + h \in [0,T]$ et que h est assez petit...)

3) En déduire qu'il existe une constante C telle que

$$\forall t \in [0, T-h], \qquad \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \Phi(x(t),h) \right| \leq Ch.$$

4) L'erreur à l'étape i est définie par

$$e_i = x_i - x(ih)$$

(noter que $e_0 = 0$). L'erreur globale de la méthode est donnée par

$$e(h) = \max_{0 \leq i \leq T/h} |e_i| \, .$$

Montrer que pour $i \leq T/h - 1$,

$$|e_{i+1}| \leq (1 + Lh)\, |e_i| + Ch^2.$$

5) Montrer que pour tout entier i dans $[0, T/h]$,

$$|e_i| \leq e^{iLh} Cih^2.$$

(Indication : utiliser, pour $s > 0$, l'inégalité $1 + s \leq e^s$.)

6) Montrer que

$$e(h) \leq e^{LT} CTh.$$

En déduire que la méthode d'Euler converge à l'ordre 1, c'est à dire que

$$e(h) = O(h).$$

6) Généraliser la preuve à la méthode d'Euler améliorée.

Exercice 9 : Équations différentielles.

f est une fonction de classe C^1, lipschitzienne. Pour résoudre l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)),$$

on considère le schéma dit « du point milieu » :

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = f(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}).$$

1. Expliquer pourquoi ce schéma est implicite.
2. On admet que l'équation
$$y = x + hf(\frac{x+y}{2}) \tag{1}$$
admet une seule solution y pour tout h et tout x. Cette solution est notée $y(h,x)$. Calculer $y(0,x)$.
3. En dérivant (1) par rapport à h, trouver une équation vérifiée par $\frac{\partial y}{\partial h}(h,x)$. En déduire $\frac{\partial y}{\partial h}(0,x)$.
4. Mettre la méthode du point milieu sous la forme d'une méthode à un pas
$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(h, x_n).$$
Déterminer $\Phi(h,x)$ en fonction de x, f et $y(h,x)$.
5. Calculer un développement limité avec un reste en $O(h^2)$ de $\Phi(h,x)$ en $h = 0$.
6. Montrer que la méthode du point milieu est d'ordre 2.