Méthodes itératives pour les systèmes linéaire

Exercice 1

Soit la matrice $n \times n$ tridiagonale

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Rappeler le théorème de Gerchgorin
2. Montrer que A est positive
3. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de A (chercher des vecteurs propres de la forme $v_i = \sin(i\mu)$).
4. Soit le système linéaire $Ax = b$ et $\overline{x}$ son unique solution. Montrer que dans l'algorithme de Jacobi, on a
$$\|x_{k+1} - \overline{x}\| \leq C \|x_k - \overline{x}\|$$
où $C < 1$ est une constante que l'on déterminera.
5. Trouver un paramètre optimal de relaxation ω dans la méthode de Jacobi modifiée
$$\omega I x_{k+1} + (A - \omega I)x_k = b.$$

Exercice 2

Montrer que, pour un système linéaire symétrique défini positif, l'algorithme de Gauss-Seidel est un algorithme de descente suivant les vecteurs de la base canonique.

Exercice 3 (dur)

Soit le problème de minimisation : trouver u réalisant le minimum de

$$\min_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|v\|^2 + L(v),$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne et L une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que l'algorithme de descente à pas optimal converge en au plus n itérations.
2. En déduire que l'algorithme du gradient conjugué converge en au plus n itérations.

Exercice 4

Révision : calculer les 4 premiers polynômes de Legendre

Exercice 5

Révision : montrer que les polynômes de Legendre ont des racines réelles simples.

Exercice 6

1)

a) Pour une matrice quelconque A montrer que $\rho(A) \leq \|A\|$ pour toute norme matricielle. Donner l'expression de $\|A\|_\infty$

b) On suppose A symétrique définie positive. Montrer que $\rho(A) = \|A\|_2$

2) Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

a) Pour quelles valeurs de a A est-elle définie positive ?

b) Écrire la matrice J de l'itération de Jacobi

c) Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi converge-t-elle ?

d) Écrire la matrice G de l'itération de Gauss-Seidel

e) Calculer $\rho(G)$. Pour quelles valeurs de a cette méthode converge-t-elle plus vite que celle de Jacobi ?

3) Soit A une matrice décomposée en $A = D - E - F$

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & -E \\ & D & \\ -F & & \ddots \end{pmatrix}$$

pour résoudre $Ax = b$ on propose la méthode

$$\left(\frac{D}{\omega} - E\right) x^{(k+1)} = \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right) x^{(k)} + b \quad \omega \in R^*$$

a) Vérifier que si la méthode converge, elle converge vers une solution de $Ax = b$

b) Donner la matrice d'itération L_ω de cette méthode

c) Calculer $\det(L_\omega)$

d) En déduire que $\rho(L_\omega) \geq |1 - \omega|$. Conclusion ?

Exercice 7

A est une matrice symétrique définie positive $N \times N$. On considère $\overline{x}$ l'unique solution du système linéaire $Ax = b$

1) Montrer que résoudre $Ax = b$ revient à trouver le minimum de

$$J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$$

($\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur R^N)

2) On souhaite construire une suite de vecteurs $x^{(k)}$ convergente vers $\overline{x}$. Les notations suivantes auront cours dans la suite du problème :

$$\begin{array}{rcl} r^{(k)} = b - Ax^{(k)} & : & \text{"résidu"à l'étape}k \\ e^{(k)} = x^{(k)} - \overline{x} & : & \text{erreurà l'étape}k \\ E(x) & = & \langle A(x-\overline{x}), x-\overline{x} \rangle \end{array}$$

vérifier que

$$E(x) = -\langle r, e \rangle = \left\langle r, A^{-1} r \right\rangle$$

puis que

$$\nabla J(x) = -r$$

3) Posons

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)}$$

$p^{(k)}$ est appelé direction de descente et $\alpha^{(k)}$ coefficient de descente. Justifier cette terminologie.

a) Montrer que le coefficient optimal de descente pour la direction $p^{(k)}$ est donné par

$$\alpha^{(k)} = \frac{\left\langle r^{(k)}, p^{(k)} \right\rangle}{\left\langle Ap^{(k)}, p^{(k)} \right\rangle}$$

puis que $\left\langle r^{(k)}, p^{(k+1)} \right\rangle = 0$

b) Montrer que

$$E(x^{(k+1)}) = E(x^{(k)})(1 - \gamma^{(k)})$$

où $\gamma^{(k)}$ est donné par

$$\gamma^{(k)} = \frac{\left\langle r^{(k)}, p^{(k)} \right\rangle^2}{\left\langle Ap^{(k)}, p^{(k)} \right\rangle \left\langle A^{-1} r^{(k)}, r^{(k)} \right\rangle}$$

c) On choisit comme direction de descente $p^{(k)} = r^{(k)}$ (méthode du gradient à pas optimal). Montrer que la suite $x^{(k)}$ converge vers $\overline{x}$.

4) a) On pose cette fois-ci $p^{(k)} = r^{(k)} + \beta^{(k)} p^{(k-1)}$. Calculer $\beta^{(k)}$ afin que $\gamma^{(k)}$ soit le plus grand possible (montrer que $\beta^{(k)} = -\frac{\left\langle Ap^{(k)}, r^{(k)} \right\rangle}{\left\langle Ap^{(k)}, p^{(k-1)} \right\rangle}$).

b) Déduire de ce qui précède l'algorithme du gradient conjugué. Décrire sa mise en oeuvre.