Intégration numérique

Exercice 1

1) Soit f une application de classe C^2 sur l'intervalle $[0,1]$. On rappelle qu'il existe alors un $t_0 \in [0,1]$ (dépendant de f) et une constante C (indépendante de f) tels que

$$\int_0^1 f(t)dt = f(\frac{1}{2}) + Cf''(t_0).$$

Déterminer la constante C.

2) Déduire de cette propriété que si g est une application de classe C^2 sur l'intervalle $[a,b]$ alors on peut trouver $x_0 \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b g(x)dx = (b-a)g(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24}g''(x_0)$$

(faire le changement de variable $x = t(b-a)+a$)

3) On se donne maintenant une application f de classe C^2 sur un intervalle $[a,b]$. On pose $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. Soit $J_N(f)$ l'approximation de $I(f)$ par la méthode des rectangles composite à N points :

$$J_N(f) = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\frac{i-1/2}{N}(b-a)+a)$$

montrer qu'il existe des points $x_i \in [(b-a)\frac{i-1}{N}+a, (b-a)\frac{i}{N}+a]$ $(1 \leq i \leq N)$ tels que

$$\int_a^b f(x)dx = J_N(f) + \frac{(b-a)^3}{24N^2}\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f''(x_i)$$

4) En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = J_N(f) + \frac{(b-a)^3}{24N^2}f''(c)$$

5) Comment choisir N pour être sûr que $J_N(f)$ soit une approximation à 10^{-6} près de $I(f)$ si $f(x) = \exp(x)$ et $[a,b] = [0,2]$?

6) Que se passe-t-il selon vous si l'on applique la même méthode d'intégration numérique à $f(x) = \ln(x)$ sur l'intervalle $[0,2]$?

Exercice 2

On considère la formule d'intégration numérique

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \simeq \alpha f(-1) + \beta f(\gamma).$$

1. Déterminer α, β et γ de sorte que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 2.
2. On admet qu'il existe une constante C telle que pour toute fonction f de classe C^3 il existe un réel ξ tel que

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt - (\alpha f(-1) + \beta f(\gamma)) = C f^{(3)}(\xi).$$

   Déterminer la constante C.
3. En déduire qu'il existe une constante K telle que pour toute application g de classe C^3 sur l'intervalle $[a,b]$ il existe ζ tel que

$$\int_a^b g(x)dx - (b-a)\left(\frac{1}{4}g(a) + \frac{3}{4}g(\frac{a+2b}{3})\right) = K(b-a)^4 g^{(3)}(\zeta). \quad (1)$$

   Déterminer la constante K.
4. On applique la méthode composite associée à (1) pour évaluer numériquement $\int_0^1 \exp(x)dx$. En combien de sous-intervalles faut-il découper l'intervalle $[0,1]$ pour que l'erreur d'intégration numérique soit inférieure à $\varepsilon = 10^{-6}$?

Exercice 3

On cherche une méthode d'intégration numérique de la forme

$$\int_0^1 f(t)dt \simeq \alpha f(0) + \beta f'(\gamma) \quad (2)$$

où γ est un point de l'intervalle $]0,1[$

1) On suppose que γ est donné. Déterminer α et β pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 1.

2) Comment choisir γ pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 2 ?

3) Que devient la formule (2) si l'intervalle $[0,1]$ est remplacé par un intervalle $[a,b]$ quelconque ? (utiliser le changement de variable $t = (b-a)t' + a$, $t' \in [0,1]$).

4) Décrire la méthode composite associée à (2) pour calculer $\int_A^B f(t)dt$ (on se limitera au cas d'une subdivision régulière de l'intervalle $[A,B]$ de pas $h = \frac{B-A}{N}$).

Exercice 4

Soit la formule de quadrature suivante :

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t = a_1 g(-2) + a_2 g(-1) + a_3 g(0) + R(g).$$

1. Déterminer les coefficients a_i pour i variant de 1 à 3, de sorte que $R(g) = 0$, quel que soit g appartenant à l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, où n est le plus grand possible. Que vaut n ?
2. En supposant que $R(g) = Kg^{n+1}(\xi)$, déterminer K.
3. Déduire des questions précédentes, la formule et l'erreur de quadrature pour $\displaystyle\int_{x_{n+1}}^{x_{n+3}} f(x)\,\mathrm{d}x$, en posant $x_n = a + nh$.

Exercice 5

Soit la formule d'intégration numérique suivante :

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \omega_1 g(a) + \omega_0 g(0) + \omega_1 g(-a) + R(g).$$

— (a) Déterminer ω_1, ω_0 et a de sorte que $R(g) = 0$ quelle que soit g appartenant à l'espace vectoriel des polynômes de degré le plus grand possible. Quel est le degré de précision de cette formule ?

— (b) Montrer que $\pi/2$ est racine de $f(x) = 3\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(3x)$ et trouver à l'aide de la méthode de Newton la racine α de f qui appartient à l'intervalle $[-1, 0]$. (On ne demande aucune justification de la convergence de la méthode de Newton, ni du choix de x_0).

— (c) Calculer à l'aide de la formule, sur laquelle vous aurez effectué le changement de variables adéquat : $\displaystyle\int_{\alpha}^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer l'erreur faite avec cette formule.

Exercice 6

Soit $f \in C^5([a,b])$. On note $c = \dfrac{a+b}{2}, h = \dfrac{b-a}{2}$.

— (i) Montrer qu'il n'existe qu'un unique polynôme de degré 3 tel que

$$f(a) = p(a), \quad f(b) = p(b), \quad f(c) = p(c), \quad f'(c) = p'(c).$$

— (ii) Soit A l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{P}^3$, qui à 4 valeurs données associe p défini à la question (i).

$$\begin{array}{rcl} A : \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ (f(a), f(b), f(c), f'(c)) & \longmapsto & p \end{array}$$

tel que

$$f(a) = p(a), \quad f(b) = p(b), \quad f(c) = p(c), \quad f'(c) = p'(c).$$

Pourquoi l'unicité de p démontrée à la question (i) vous donne l'existence de p ?

— (iii) Montrer en vous inspirant de la démonstration de l'erreur d'interpolation du polynôme de Lagrange qu'il existe $\eta \in [a, b]$ tel que

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}(x-a)(x-c)^2(x-b).$$

(On étudiera la fonction : $W(t) = f(t) - p(t) - \dfrac{(t-a)(t-b)(t-c)^2}{(x-a)(x-b)(x-c)^2}[f(x) - p(x)]$).

— (iv) Quel est le degré de précision de la formule de Simpson ? En déduire $\displaystyle\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$. Que vaut alors cette intégrale en fonction de $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$?

— (v) En déduire que la formule de Simpson satisfait

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big) = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

avec un ξ entre a et b.

Formule de la moyenne généralisée : Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ avec g de signe constant sur $]a, b[$ alors il existe ξ dans $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

NB :

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = -\frac{(b-a)^5}{120}.$$

Exercice 7

Montrer que la formule du point milieu est une formule de Gauss. En déduire la majoration de l'erreur :

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi), \quad \xi \in]a, b[.$$

Exercice 8

Soient (x_i, y_i, z_i), $i = 0 \ldots n$ des triplets de $\mathbb{R}$ tels que les x_i sont distincts.

— (i) Montrer que le polynôme P de degré $2n+1$ tel que :

$$P(x_i) = y_i \text{ et } P'(x_i) = z_i,\ i = 0 \ldots n.$$

est unique.

(On ne demande que la démonstration de l'unicité et non de l'existence).

— (ii) Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b])$.On pose $y_i = f(x_i)$ et $z_i = f'(x_i),\ i = 0 \dots n$. Si $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ et P défini comme au (i), montrer qu'alors :

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \dots (x-x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)$$

où $a \leq min(x, x_0) < \xi < max(x, x_n) \leq b$.

— (iii) Quel est le nom de ce polynôme P ?

— (iv) Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b])$. Démontrer l'erreur des formules de type Gauss *ie* :

$$R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\alpha)}{(2n+2)!} \int_a^b v_n^2(t)\,\mathrm{d}t,\ \ \alpha \in [a,b]$$

où $v_n(t) = \Pi_{i=0}^{n}(t - t_i)$ avec $t_i,\ i = 0 \dots n$, $n+1$ points de Gauss.