Interpolation

Polynômes de Lagrange

Soient les points suivants $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, (2,-1). Trouver le polynôme d'interpolation de degré $\leq$3 passant par ces points :

1. Par une méthode d'identification,
2. Par une méthode de mise en facteur,
3. Avec les polynômes de Lagrange.

Approximation par interpolation

Soit f une application de $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ de classe C^4. Soit N un entier > 2 et $\Delta x = (b-a)/N$. On suppose connues les valeurs de f aux points $x_i = a + i\Delta x$, $0 \leq i \leq N$. Pour un point $x \in [a+\Delta x, b-\Delta x[$, on peut trouver un unique indice i, $1 \leq i < N-1$ tel que

$$x_i \leq x < x_{i+1}.$$

On note P le polynôme d'interpolation de f sur les points $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$. Soit $\varepsilon > 0$ déterminer une valeur de N qui assure que

$$|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon.$$

Application : $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \exp(x)$, $\varepsilon = 10^{-10}$.

Interpolation d'Hermite

1. Déterminer quatre polynômes $(L_i)_{1\leq i\leq 4}$ de degré ≤ 3 vérifiant les propriétés ci-dessous

$$L_1(0) = 1, \quad L_1'(0) = 0, \quad L_1(1) = 0, \quad L_1'(1) = 0,$$

$$L_2(0) = 0, \quad L_2'(0) = 1, \quad L_2(1) = 0, \quad L_2'(1) = 0,$$

$$L_3(0) = 0, \quad L_3'(0) = 0, \quad L_3(1) = 1, \quad L_3'(1) = 0,$$

$$L_4(0) = 0, \quad L_4'(0) = 0, \quad L_4(1) = 0, \quad L_4'(1) = 1.$$

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Déterminer le polynôme P de degré ≤ 3 tel que

$$P(0) = f(0), \quad f'(0) = P'(0), \quad f(1) = P(1), \quad f'(1) = P'(1).$$

3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Déterminer le polynôme P de degré ≤ 3 tel que

$$P(a) = f(a), \quad f'(a) = P'(a), \quad f(b) = P(b), \quad f'(b) = P'(b).$$

(se ramener au cas précédent avec le changement de variable $x = (b-a)t + a$.)

TP interpolation

Le but de ce TP est de mettre en évidence certains phénomènes liés à l'interpolation des fonctions. Pour les calculs, on s'aidera du logiciel Scilab (ou Matlab, ou Octave).

Considérons sur l'intervalle $[-1, 1]$ les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
f_1 &: x \to \sin(2\pi x) \\
f_2 &: x \to \frac{1}{\frac{1}{10} + x^2} \\
f_3 &: x \to \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ +1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \\
f_4 &: x \to |x|
\end{aligned}$$

Un entier $N > 0$ étant donné, on considère également la subdivision régulière

$$x_i = -1 + \frac{2i}{N}, \quad 0 \leq i \leq N$$

1) En utilisant les polynômes de Lagrange calculer le polynôme d'interpolation de $f_1 \dots f_4$ pour $N = 5$, 10 et 20. Conclusion ?
2) Refaire les calculs précédents en utilisant la subdivision de Tchebychev

$$x_i = \cos(i\pi/N) \quad 0 \leq i \leq N.$$

Intégration numérique

On cherche une méthode d'intégration numérique de la forme

$$\int_0^1 f(t) \simeq \alpha f(0) + \beta f'(\gamma),$$

où γ est un point de l'intervalle $[0, 1]$.

1. On suppose γ donné. Déterminer α et β pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 1
2. Comment choisir γ pour que la formule soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 2 ?
3. Que devient la formule sur un intervalle $[a, b]$ quelconque ? (faire le changement de variables $x = (b - a)t + a$)
4. Formule d'erreur ? Méthode composite associée ?

Intégration numérique et EDO

On cherche une méthode d'intégration numérique de la forme

$$\int_0^3 f(t)dt \simeq \alpha f(0) + \beta f(1) + \gamma f(2),$$

1. Déterminer α, β et γ pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 2
2. En déduire une méthode de résolution de l'équation différentielle $x' = f(x)$. (Indication : $x(t) - x(0) = \int_0^t f(x(s))ds$.)
3. Quel est l'ordre de cette méthode ?

TP intégration numérique

On note $J_N(f)$ l'approximation par une méthode d'intégration composite de $I(f) = \int_0^1 f(t)dt$ sur N intervalles.

1. Écrire un programme qui réalise ce calcul. Décrire la programmation.
2. Tester la précision de la méthode pour la méthode des rectangles et de Simpson. On prendra $f(x) = \exp(x)$. Vérifier numériquement l'ordre de la méthode en traçant le logarithme de l'erreur en fonction du logarithme de N.
3. Même question pour la méthode de Gauss-Legendre à 2 ou 3 points.
4. Que se passe-t-il lorsqu'on choisit $f(t) = \ln(t)$?