Interpolation

Exercice 1

1. Soient les points d'interpolation suivants : $(-1,-1)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et $(2,0)$. Trouvez le polynôme d'interpolation de degré 3 passant par ces points :
2. par une méthode d'identification,
3. par une méthode de mise en facteurs,
4. à l'aide des polynômes de Lagrange.

Exercice 2

- Écrire le système linéaire qui définit le polynôme d'interpolation de degré 3 passant par les points de coordonnées (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).
- Calculer le déterminant de la matrice V de ce système linéaire (on pourra effectuer des manipulations de lignes et de colonnes). La matrice V est appelée matrice de Vandermonde.
- Calculer dans le cas général (i.e. en dimension quelconque) le déterminant d'une matrice de Vandermonde.

Exercice 3

Pour deux suites de nombres x_0, x_1, x_2, ... , x_r et y_0, y_1, y_2, ... , y_r, on définit la suite de polynômes :

$$P_{k,0} = y_k \qquad \text{pour } k = 0,\ 1,\ \ldots\ , r \text{ et}$$

$$P_{k,j+1}(x) = \frac{(x_k - x)P_{j,j}(x) - (x_j - x)P_{k,j}(x)}{x_k - x_j} \text{ pour } k = j+1,\ \ldots\ , r \text{ et } j = 0,\ \ldots\ , k-1.$$

1. Construire $P_{3,3}$ avec $(x_0, y_0) = (-1,-1)$, $(x_1, y_1) = (0,1)$, $(x_2, y_2) = (1,0)$ et $(x_3, y_3) = (2,0)$.
2. Montrez par récurrence que $P_{k,j}$ avec $k \geq j$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points x_0, x_1, ... , x_{j-1}, x_k.
3. Qu'en concluez-vous pour $P_{k,k}$?

Exercice 4

1. Retrouvez par la méthode des différences divisées le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 3 aux points $(-1,-1)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et $(2,0)$ (polynôme déjà obtenu).
2. Réécrire l'arbre des différences divisées lorsque les points x_0, x_1, x_2, x_3 sont régulièrement répartis.

Exercice 5

On considère la table suivante donnant les valeurs ν $(m^2.s^{-1})$ de la viscosité cinématique de l'eau en fonction de la température T (°C) :

T	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
ν	1.14	1.11	1.08	1.06	1.03	1.01	0.983	0.960	0.938	0.917	0.896	0.876	0.857	0.839

1. Quelle est la viscosité à 26.5 degrés ?
2. Pour quelle température a-t-on $\nu = 0.9\ m^2.s^{-1}$?

Exercice 6

Soit la fonction définie par $f(x) =^3 \sqrt{x}$.

1. Construire la table des différences divisées à partir des données $(x_i, f(x_i))$, $i = 0$ à 4, avec $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 27$, $x_4 = 64$.

2. Ecrire le polynôme d'interpolation de f, noté P_4, construit sur les données du 1, en utilisant la formule de Newton et les différences divisées, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{rcl} P_0(x) & = & f(x_0) \\ P_k(x) & = & P_{k-1}(x) + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})f[x_0, x_1, \dots, x_k] \end{array}$$

   Calculer $P_i(20)$ pour $i = 1$ à 4 et comparer à $f(20)$.

3. Ecrire l'erreur d' interpolation $E_4(x) = f(x) - P_4(x)$.
   Peut-on majorer $E_4(20)$ sur l'intervalle considéré ? Expliquer les résultats du (2).

4. Pour améliorer les résultats, on interpole f sur les données $(x_i, f(x_i))$ $\quad i = 1$ à 4. Ecrire le polynôme d'interpolation ainsi obtenu à l'aide de (1). On le note Q_3. Calculer $Q_i(20)$ pour $i = 1, 2, 3$ et donner une majoration de $E_3(20) = f(20) - Q_3(20)$.

5. On veut maintenant résoudre $\sqrt[3]{x} = \beta$ avec $\beta = 2.71441761659$, par interpolation inverse. Pour cela :

   (a) Construire la table des différences progressives-régressives ($\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$) pour les données permutées, c'est-à-dire pour $(f(x_i), x_i)$
   $i = 0$ à 4.

   (b) Ecrire le polynôme d'interpolation R_4, construit à l'aide de la formule de Newton régressive :

$$\begin{array}{rcl} R_k(x) & = & R_{k-1}(x) + (x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_{n-(k-1)})\dfrac{\nabla^k f(x_n)}{k!h^k} \\ R_0(x) & = & f(x_n) \end{array}$$

   Calculer les $R_i(\beta)$ pour $i = 1$ à 4. Que constate-t-on ? Evaluer une majoration de $\varepsilon_2(\beta) = f^{-1}(\beta) - R_2(\beta)$. Comparer à $R_3(\beta) - R_2(\beta)$.

Exercice 7

Soient $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ n points distincts et une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Sur chaque segment $[x_i; x_{i+1}]$, on cherche un polynôme de degré 3 s (spline cubique) tel que :

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 1 \dots n$$

vérifiant les conditions supplémentaires :

$$s'(x_i^-) = s'(x_i^+) : \text{continuité de la dérivée première,}$$

$$s''(x_i^-) = s''(x_i^+) : \text{continuité de la dérivée seconde,}$$

ainsi que

$$s''(x_1) = s''(x_n) = 0.$$

(i) Notons

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 1, 2, \cdots n-1; \quad D_i = s''(x_i), \quad i = 1, 2, \cdots n.$$

Quel est le degré de s'' sur chacun des intervalles $[x_i; x_{i+1}]$?
Montrer alors que

$$s''(x) = \frac{D_{i+1}}{h_i}(x - x_i) - \frac{D_i}{h_i}(x - x_{i+1}),$$

pour tout $x_i \le x \le x_{i+1}$, $\quad i = 1, 2, \cdots n-1$.

(ii) En déduire qu'il existe des constantes A_i, B_i, $\quad i = 1, 2, \cdots n-1$ telles que :

$$s'(x) = \frac{D_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 - \frac{D_i}{2h_i}(x - x_{i+1})^2 + A_i,$$

pour tout $x_i \le x \le x_{i+1}$, $\quad i = 1, 2, \cdots n-1$.

(iii) Comme $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 2, \cdots n-1$ et $s(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$, $i = 1, 2, \cdots n-1$, montrer que pour tout $1 \le i \le n-1$ on a :

$$A_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} + \frac{h_i}{6}(D_i - D_{i+1}), \quad B_i = f(x_i) - \frac{h_i^2}{6} D_i.$$

(iv) Utilisant les conditions de continuité $s'(x_i^+) = s'(x_i^-)$, montrer qu'on a :

$$\mu_i D_{i-1} + 2D_i + \lambda_i D_{i+1} = F_i, \quad 2 \le i \le n-1$$

où on a posé

$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}}; \quad \lambda_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}};$$

Ainsi le vecteur colonne de composantes D_i est solution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_2 & & & & & \\ \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & & & \\ & \mu_4 & 2 & \lambda_4 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ D_{n-2} \\ D_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

(v) Montrer que la matrice est à diagonale dominante. En déduire que la fonction spline s est déterminée de façon unique par la résolution du système linéaire de la question précédente.

(vi) Application : on considère la distribution cumulée N des nouveaux-nés de mères bulgares en fonction de leur âge.

âge	15	20	25	30	35	40	45
N	0	7.442	26.703	41.635	49.785	50.209	50.226

Trouver la fonction spline cubique f qui interpole ces données et qui vérifie les conditions $f'(15) = f'(50) = 0$.

Exercice 8

Soit une fonction f que l'on cherche à interpoler sur l'intervalle $[0, 6]$.

(a) Calculer le polynôme d'interpolation P sur les données suivantes

x	0	2	4	6
$f(x)$	0.5	-1.7903	3.3900	-1.2795

(b) Sachant que la fonction f est égale à :

$$f(x) = 3\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(3x),$$

Calculer l'erreur d'interpolation que vous avez faite en $x = 3$ et en $x = 5$. Les résultats sont-ils satisfaisants ? Justifier-les (éventuellement en traçant f).

(c) On cherche à améliorer les résultats en interpolant avec une spline cubique, notée s. On pose $x_i = i$, $i = 0 \dots 5$ et $D_i = s''(x_i)$, $i = 0 \dots 5$ avec D_0 et D_5 fixés. Pour trouver s, on doit résoudre le système suivant :

$$\mu_i D_{i-1} + 2D_i + \lambda_i D_{i+1} = F_i, \quad 1 \le i \le 4,$$

où $\mu_i = \lambda_i = 1/2$, $i = 1 \dots 4$. Ecrire le système. On notera A la matrice du système obtenu. On remarquera que A est symétrique, définie positive et admet donc une unique factorisation LU.

(f) Pensez-vous que les résultats de l'interpolation avec s ainsi calculé seront meilleurs ?

Exercice 9

1) Soient $f \in C^{n+1}([a, b])$, $a \le x_0 < x_1 \cdots < x_n \le b$, P_n le polynôme d'interpolation de f aux points (x_i). On se propose de montrer

$$f(x) - P_n(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \text{avec} a \le \xi \le b$$

a) Soit $g : [a, b] \to R$ tel que g' existe. Montrer que si g a $(n+2)$ zéros distincts alors g' a au moins $(n+1)$ zéros distincts.

b) En considérant $W(t) = f(t) - P_n(t) - (t - x_0)\cdots(t - x_n)K(x)$ où K est tel que $W(x) = 0$ démontrer le résultat cherché.

2) On a donc

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

On cherche à majorer $|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|$ dans le cas d'une subdivision régulière de pas h. On pose $\theta(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$, $h=1$ et $x_0=0$ (pour simplifier).

a) Montrer que $\theta(x+1)=\theta(x)\frac{x+1}{x-n}$

b) En déduire que le max de $|\theta(x)|$est réalisé pour $x_0\le x\le x_1$

c) Montrer que $\max_{x_0\le x\le x_1}|\theta(x)|\le\frac{n!h^{n+1}}{4}$

d) En déduire que

$$|f(x)-P_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{4(n+1)}h^{n+1}$$

3) On souhaite écrire une table de valeurs de $f(x)=\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ pour une subdivision de pas h de l'intervalle $[0,1]$. Comment doit-on choisir h pour que l'interpolation de Lagrange à 3 points donne une approximation de f à 10^{-6} près?

4) Soit arccos la détermination de la fonction inverse de cos définie par $\theta=\arccos x\Leftrightarrow x\in[0,\pi]$ et $x=\cos\theta$

a) On pose $Q_n(x)=\cos(n\arccos x)$. Montrer que les fonctions Q_n sont orthogonales sur l'intervalle $[-1,1]$ relativement au poids $w(x)=1/\sqrt{1-x^2}$

b) Montrer que $\langle Q_n,Q_n\rangle=\frac{\pi}{2}$ si $n\ge1$ et que $\langle Q_0,Q_0\rangle=\pi$

c) Montrer que Q_n est un polynôme de degré n vérifiant $Q_{n+1}(x)=2xQ_n(x)-Q_{n-1}(x)$ (polynômes de Tchebychev)

5) Soit Q_n le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev

a) Montrer que Q_n a des zéros simples aux n points

$$x_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\qquad k=1\cdots n$$

b) Montrer que Q_n atteint ses extrema sur l'intervalle $[-1,1]$ aux $n+1$ points $y_k=\cos\frac{k\pi}{n}$ $k=0\cdots n$ pour lesquels il prend alternativement les valeurs 1 et -1.

c) On considère $\overline{Q_n}=\frac{1}{2^{n-1}}Q_n$ (le coefficient de plus haut degré de $\overline{Q_n}$ est 1). Montrer que pour tout polynôme P de degré n, de coefficient de plus haut degré égal à 1, on a

$$\frac{1}{2^{n-1}}=\max_{-1\le x\le1}\left|\overline{Q_n}(x)\right|\le\max_{-1\le x\le1}|P(x)|$$

d) On rappelle que

$$|f(x)-P(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

où P désigne le polynôme d'interpolation de f relativement à la subdivision (x_i). Comment choisir les (x_i) pour que l'erreur d'interpolation soit la plus petite possible?

Exercice 10

Le but de cet exercice est d'utiliser l'interpolation polynomiale pour obtenir des formules de dérivation numérique. Pour ce faire, nous avons besoin d'étendre la définition des différences divisées lorsque les points d'interpolation ne sont pas distincts.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soient $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction suffisamment dérivable et $x_0\le x_1\le\ldots\le x_n$ des points *non nécessairement distincts* dans $[a,b]$. On cherche un polynôme $p_n\in\mathbb{P}^n$ qui interpole la fonction f aux points $x_0,\ldots,x_n$, c'est-à-dire tel que :

$$p_n^{(j)}(z)=f^{(j)}(z),\quad\text{pour } j=0,\ldots,m-1,$$

pour chaque point z qui intervient m fois dans la suite $x_0,\ldots,x_n$.

Nous admettrons que ce polynôme est unique et donné par la formule classique :

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f[x_0,\ldots,x_k]v_{k-1}(x),$$

où $v_k(x)=(x-x_0)\ldots(x-x_k)$, et les différences divisées généralisées sont définies par récurrence par :

$$f[x_j]=f(x_j)\quad\text{pour } j=0,\ldots,n,$$
$$f[x_0,\ldots,x_k]=\begin{cases}\dfrac{f[x_1,\ldots,x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0} & \text{si } x_k>x_0,\\[2ex] \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} & \text{si } x_k=x_0.\end{cases}$$

On peut vérifier que $f[x_0,\ldots,x_k]$ est indépendant de l'ordre des x_i.

– (a) Exemple : trouver le polynôme $p \in \mathbb{P}^4$ interpolant $f(x) = \ln x$ tel que :

$$\begin{aligned}
&p(1) = f(1) = 0, \quad p(2) = f(2) = 0.693147,\\
&p'(1) = f'(1) = 1, \quad p'(2) = f'(2) = 0.5,\\
&p''(1) = f''(1) = -1.
\end{aligned}$$

– (b) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$f(x) - p_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x]\, v_n(x) \tag{1}$$

On pose $g_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x]$. Admettons le théorème suivant (démonstration dans *Elementary numerical analysis*, S. D. Conte, C. de Boor, page 65).

Théorème : Supposons que $f \in \mathcal{C}^k([a, b])$ et $x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_k$ sont k+1 points non nécessairement distincts dans $[a, b]$. Alors

– • il existe $x_0 \le \xi \le x_k$ tel que

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \tag{2}$$

– • la fonction $g_{k-1} : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g_{k-1}(x) = f[x_0, \ldots, x_{k-1}, x]$, est continue.

– (c) Montrer que

$$\frac{d}{dx} g_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x, x]. \tag{3}$$

– (d) Déduire de (1), (2) et (3) que, pour tout $\alpha \in [a, b]$, on a $f'(\alpha) = p_n'(\alpha) + E(f)$, où

$$E(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} v_n(\alpha) + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} v_n'(\alpha) \tag{4}$$

avec ξ, $\eta \in [a, b]$.

L'erreur $E(f)$ dans la dérivation numérique se simplifie lorsque qu'on choisit α parmi les x_i (alors $v_n(\alpha) = 0$), ou lorsque les points x_i sont répartis de manière symétrique autour de α (alors n est impair et on peut vérifier que $v_n'(\alpha) = 0$).

– (e) Ecrire la formule de dérivation numérique et l'erreur correspondante pour $n = 1$. Retrouver les formules vues en cours :
  – (i) en prenant $x_0 = \alpha$ et $x_1 = \alpha + h$,
  – (ii) en prenant $x_0 = \alpha - h$ et $x_1 = \alpha + h$.

– (f) En prenant $n = 2$, $x_0 = \alpha$, $x_1 = \alpha + h$ et $x_2 = \alpha + 2h$, montrer que

$$f'(\alpha) \approx \frac{-3f(\alpha) + 4f(\alpha + h) - f(\alpha + 2h)}{2h}$$

avec une erreur

$$E(f) = \frac{h^2}{3} f'''(\xi)$$

pour un $\xi \in [\alpha, \alpha + 2h]$.