TAN TD/TP. Polynômes orthogonaux

Exercice 1

1. Au moyen du procédé de Gram-Schmidt, calculer les 5 premiers polynômes de Legendre sur l'intervalle $[-1, 1]$.
2. Vérifier vos calculs avec la formule de récurrence vue en cours.
3. On note L_k le polynôme de Legendre de degré k et $(x_i^k)_{i=1\dots k}$ ses racines. Vérifier, pour $k \leq 4$ la propriété d'entrelacement des racines :
$$\forall i = 1 \dots k-1, \quad x_i^k < x_i^{k-1} < x_{i+1}^k.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit H_n la fonction définie par
$$H_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$
Montrer que H_n est un polynôme de degré n.
5. Montrer que H_n est orthogonal à tous les polynômes de degré $< n$.
6. En utilisant la formule de Leibniz, montrer que $H_n(1) = 2^n n!$.
7. En déduire la formule de Rodrigues :
$$L_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$
8. Montrer que, pour tout $n > 1$,
$$L'_{n+1} - L'_{n-1} = (2n+1)L_n.$$
En déduire que
$$< L_n, L_n >= \frac{2}{2n+1}.$$

Exercice 2 (polynômes de Tchebychev)

Soit $(P, Q) \in E = \mathbb{R}[X]$. On pose
$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

1. Montrer que $(P, Q) \to < P, Q >$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit, pour $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Montrer (par récurrence) que T_n est un polynôme de degré n.
3. Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >$.

Exercice 3

Soit E l'espace vectoriel des polynôme de degré ≤ 4 muni du produit scalaire
$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Soit la fonction $f = x \to \exp(x) \in L^2(]-1, 1[)$. Calculer le projeté orthogonal de f sur E en utilisant les calculs de l'exercice 1.

Exercice 4 (polynômes d'Hermite)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et H_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2/2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2/2).$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, H_n est un polynôme de degré n.
2. Montrer que ces polynômes sont orthogonaux pour le produit scalaire
$$< P, Q >= \int_{-\infty}^{\infty} P(t)Q(t) \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dx.$$
3. Montrer que H_n vérifie l'équation différentielle
$$H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0.$$
4. Montrer la relation de récurrence
$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x).$$

Travaux Pratiques (prise en main d'Octave)

1. Installer Octave et se familiariser en tapant quelques commandes. Voir par exemple : `http://irma.math.unistra.fr/~helluy/CSL2/scilab-quickref.pdf`. Attention, MATLAB, Octave et Scilab ont des syntaxes très semblables, avec quelques différences.
2. Tracer, au moyen d'Octave les 10 premiers polynômes de Legendre sur $[-1,1]$. Vérifier graphiquement la propriété d'entrelacement des racines.
3. Même question avec Tchebychev et Hermite.
4. Comparer, sur la même courbe, la fonction f et le projeté orthogonal P de l'exercice 3. On souhaite calculer l'écart entre f et P en norme L^2 puis pour la norme du sup. Comment procédez-vous ?
5. Même question pour la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0, \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$