

Recherche des racines d'un polynôme

Le but de cet exercice est de construire et tester une méthode pour trouver les racines d'un polynôme de la forme

$$P(x) = a_N + a_{N-1}x + \cdots + a_1x^{N-1} + x^N.$$

Pour le TP, démarrer à la question 7.

On suppose que P a N racines réelles distinctes notées $X = (x_1 \cdots x_N)$. Pour $k = 1 \cdots N$, on note $\Sigma_k(x_1, \cdots x_N)$ la somme de tous les produits de k racines différentes. Par exemple $\Sigma_N = x_1x_2 \cdots x_N$ et $\Sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots x_N$.

1. Combien y a-t-il de termes dans la somme Σ_k ? Montrer que $\forall k = 1 \cdots N$,

$$\Sigma_k(x_1, \cdots x_N) = (-1)^k a_k.$$

2. Trouver les racines de P est donc équivalent à trouver les zéros de la fonction $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ définie par

$$F_k(x_1, x_2, \cdots x_N) = (-1)^k \Sigma_k(x_1, \cdots x_N) - a_k.$$

Rappeler le principe de la méthode de Newton pour résoudre

$$F(X) = 0. \tag{1}$$

3. Montrer que

$$\sum_{k=1}^N (-1)^k \frac{\partial}{\partial x_i} \Sigma_k(X) x^{N-k} = - \prod_{1 \leq k \leq N, k \neq i} (x - x_i)$$

4. On note Δ la matrice diagonale $N \times N$ définie par

$$\Delta_{ii} = \prod_{k \neq i} (x_k - x_i)$$

et V la matrice de Vandermonde $N \times N$

$$V_{ij} = x_i^{N-j}.$$

Montrer que

$${}^t F'(X) {}^t V = -\Delta.$$

5. En déduire que

$$F'(X)^{-1} = -\Delta^{-1}V.$$

6. Montrer que la méthode de Newton appliquée à (1) consiste à choisir des valeurs initiales distinctes $(x_1^{(0)}, \cdots x_N^{(0)})$ puis à construire les suites $x_i^{(n)}$ définies par

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} - \frac{P(x_i^{(n)})}{\prod_{k \neq i} (x_i^{(n)} - x_k^{(n)})}.$$

7. Faire un programme Scilab pour calculer numériquement les suites $x_i^{(n)}$. Utiliser l'algorithme de Hörner pour calculer $P(x)$. Tester la méthode sur divers polynômes, par exemple :

$$P(x) = x^2 - 3x + 2,$$

$$P(x) = x^4 - x^3\pi - 6x^3 + 6x^2\pi + 11x^2 - 11x\pi - 6x + 6\pi,$$

$$P(x) = x^5 - 18x^4 - 200 + 104x^3 - 272x^2 + 340x.$$

Le dernier polynôme a des racines complexes, il faut donc initialiser l'algorithme avec des nombres complexes. Vous pouvez les choisir au hasard.

8. Montrer numériquement que la convergence est bien quadratique, c'est à dire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|X^{(n+1)} - X\|}{\|X^{(n)} - X\|^2} = \lambda.$$

9. Calculer les points et les poids de Gauss pour une méthode de Gauss-Legendre à 10 points. Le polynôme de Legendre correspondant est donné par

$$P_{10}(x) = -\frac{63}{256} + \frac{46189}{256}x^{10} - \frac{109395}{256}x^8 + \frac{45045}{128}x^6 - \frac{15015}{128}x^4 + \frac{3465}{256}x^2.$$

10. Calculer les points et les poids de Gauss pour une méthode de Gauss-Lobatto à 10 points.