Résolution d'équations non-linéaires

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3 - 1$.

1. Localiser chaque racine de l'équation $f(x) = 0$ dans un intervalle formé de deux entiers consécutifs.
2. Soient les trois méthodes d'approximations successives définies par les relations suivantes :

$$x_{n+1} = x_n^4 - 4x_n^3 + x_n - 1$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{(x_n - 4)^{\frac{1}{3}}}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n^3} + 4$$

   On montrera quelles suites parmi celles proposées sont intéressantes pour obtenir chacune des racines de l'équation.

3. Ecrire la méthode de Newton relative à la fonction f. Justifier le choix de x_0.

Exercice 2

Soient les deux fonctions suivantes :

$$f(x) = x \text{ et } g(x) = \ln(1 + 2x).$$

On cherche à calculer numériquement l'aire comprise entre ces deux courbes. On note $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Etudier la fonction h. Montrer qu'il existe deux valeurs pour lesquelles h s'annule : une valeur évidente (laquelle ?) et une valeur que l'on note α. Localiser α dans un intervalle $I = [i, i + 1]$ où i est un entier.
2. Pour approcher α, on définit la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

   Montrer que cette suite converge bien vers α. Calculer deux itérés.

3. Ecrire la méthode de Newton qui permet de trouver une approximation de α. Justifier le choix du x_0 qui assure la convergence et calculer quatre itérés. Donner une valeur approchée de α.

Exercice 3

Soit la fonction définie par $f(x) = x - 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

1. Etudier cette fonction f et tracer son graphe. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution notée s. Trouver I intervalle de la forme $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ qui contient s.

2. On définit la méthode itérative :
$$\begin{cases} x_0 & \in & I \\ x_{n+1} & = & g(x_n) = 1 + \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$
Cette méthode converge-t-elle vers s ?

3. Déterminer le nombre d'itérations assurant que l'erreur $e_n = x_n - s$ vérifie $|e_n| \leq 5.10^{-4}$.

4. Etudier la convergence de la méthode définie par :
$$\begin{cases} x_0 & \in & I \\ x_{n+1} & = & h(x_n) = -\ln(x-1) \end{cases}$$

5. Ecrire la méthode de Newton relative à la fonction f. Quelles sont les valeurs de x_0 qui assurent la convergence de la méthode ?

6. Effectuer numériquement deux itérations de la méthode de Newton pour $x_0 = 1$. Puis par la méthode définie en 2, effectuer les itérations jusqu'à l'obtention d'un résultat voisin à 5.10^{-4} près de celui de Newton. Conclure.

Exercice 4

On étudie la fonction réelle $f(x) = x^4 + 6x^2 - 60x + 36$.

1. Etudier f' la dérivée de f et montrer que f' admet une unique solution γ telle que $f'(\gamma) = 0$. Trouver I_γ l'intervalle de la forme $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ qui contient γ.

2. Trouver γ par la méthode de Newton. Ecrire la méthode et justifier soigneusement la convergence.

3. Combien d'itérations de la méthode de Newton sont nécessaires pour avoir une erreur inférieure à 10^{-8} ? Calculer alors γ à 10^{-8} près.

4. Montrer que $f(\gamma) = 3(-\gamma^4 - 2\gamma^2 + 12)$. En déduire le signe de $f(\gamma)$ et montrer alors que f possède deux zéros α et β sur $\mathbb{R}$. Trouver I_α et I_β les intervalles de la forme $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ qui contiennent α et β.

5. On définit la méthode suivante pour trouver α ou β :
$$\begin{cases} x_0 \in I_\alpha \text{ ou } I_\beta & \\ x_{n+1} = g(x_n) & = \dfrac{1}{60}(x_n^4 + 6x_n^2 + 36) \end{cases}$$
Justifier le choix de la méthode. Converge-t-elle vers α ? Converge-t-elle vers β ?

Exercice 5

Méthode d'accélération d'Aitken

Soit (x_n) une suite définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_0 & \in & [a;b] \\ x_{n+1} & = & g(x_n) \end{array} \right.$$

et convergente vers l solution de $f(x) = 0$.
On suppose que l'ordre de cette méthode est 1 soit :

$$e_{n+1} = (A + \epsilon_n)e_n, \text{ où } e_n = x_n - l, \ A = g'(l), \ 0 < A < 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$$

1. Montrer que $e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n$ s'écrit $((A-1)^2 + \theta_n)e_n$ avec $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$

2. Soit $x'_n = x_n - \dfrac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$. Montrer que

$$\frac{x'_n - l}{x_n - l} = \frac{\theta_n - 2\epsilon_n(A-1) - \epsilon_n^2}{((A-1)^2 + \theta_n)}.$$

   Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x'_n - l}{x_n - l}$?

Exercice 6

Montrer que l'équation $f(x) = x^3 - 2 = 0$ possède une solution unique α et qu'on peut obtenir celle-ci en utilisant la méthode de Newton à partir de $x_0 = 1$. Donner une minoration du nombre d'itérations à effectuer pour obtenir une précision $\varepsilon = 10^{-10}$

Exercice 7

Soit la fonction $f(x) = \cos x - xe^x$ avec $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

a) Montrer que cette fonction a une et une seule racine l dans $[0, \frac{\pi}{2}]$

b) Expliciter la méthode de Newton. Donner une valeur de x_0 assurant la convergence vers l.

c) Soit la méthode suivante

$$\begin{array}{rcl} x_0 & \in & [a, b] \\ x_{n+1} & = & \cos x_n e^{-x_n} = g(x_n) \end{array}$$

Montrer que l'on peut choisir un intervalle $[a, b] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ telle que la méthode converge vers l (montrer que $|x_n - l| \le L^n |x_0 - l|$. Que vaut L ?)

d) Montrer que l'on peut prendre $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$

e) Calculer un nombre d'itérations suffisant pour obtenir une précision de 10^{-6} si $[a, b] = [0.45, \frac{\pi}{2}]$

Exercice 8

Le but de cet exercice est de construire une méthode pour trouver les racines d'un polynôme de la forme

$$P(x) = a_N + a_{N-1}x + \cdots + a_1 x^{N-1} + x^N.$$

On suppose que P a N racines réelles distinctes notées $X = (x_1 \cdots x_N)$. Pour $k = 1 \cdots N$, on note $\Sigma_k(x_1, \cdots x_N)$ la somme de tous les produits de k racines différentes. Par exemple $\Sigma_N = x_1 x_2 \cdots x_N$ et $\Sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots x_N$.

1. Combien y a-t-il de termes dans la somme Σ_k? Montrer que $\forall k = 1 \cdots N$,
$$\Sigma_k(x_1, \cdots x_N) = (-1)^k a_k.$$
2. Trouver les racines de P est donc équivalent à trouver les zéros de la fonction $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ définie par
$$F_k(x_1, x_2, \cdots x_N) = (-1)^k \Sigma_k(x_1, \cdots x_N) - a_k.$$
Rappeler le principe de la méthode de Newton pour résoudre
$$F(X) = 0. \tag{1}$$
3. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{N} (-1)^k \frac{\partial}{\partial x_i} \Sigma_k(X) x^{N-k} = - \prod_{1 \leq k \leq N, k \neq i} (x - x_i)$$
4. On note Δ la matrice diagonale $N \times N$ définie par
$$\Delta_{ii} = \prod_{k \neq i} (x_k - x_i)$$
et V la matrice de Vandermonde $N \times N$
$$V_{ij} = x_i^{N-j}.$$
Montrer que
$${}^t F'(X) {}^t V = -\Delta.$$
5. En déduire que
$$F'(X)^{-1} = -\Delta^{-1} V.$$
6. Montrer que la méthode de Newton appliquée à (1) consiste à choisir des valeurs initiales distinctes $(x_1^{(0)}, \cdots x_N^{(0)})$ puis à construire les suites $x_i^{(n)}$ définies par
$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} - \frac{P(x_i^{(n)})}{\prod_{k \neq i} (x_i^{(n)} - x_k^{(n)})}.$$
7. Tester votre méthode numériquement sur divers polynômes, y compris des polynômes avec des racines complexes.