Interpolation par fonctions splines

On considère sur un intervalle $[a,b]$ une subdivision

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Pour une fonction f définie sur $[a,b]$ la spline cubique associée est notée σ. On note $y_i = f(x_i)$.
Pour calculer la spline minimale, on pose $M_i = \sigma''(x_i)$. En particulier, $M_1 = M_n = 0$. Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, σ est alors donnée par

$$\begin{aligned}
\sigma(x) \quad = \quad & 1/6\,\frac{(x_{i+1}-x)\,(x-x_i)\,(x-2\,x_{i+1}+x_i)}{x_{i+1}-x_i} M_i \\
& -1/6\,\frac{(x_{i+1}-x)\,(x-x_i)\,(x-2\,x_i+x_{i+1})}{x_{i+1}-x_i} M_{i+1} \\
& +\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} x + \frac{y_i x_{i+1} - x_i y_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}
\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}
\sigma'(x_i^+) &= -1/3\,M_i\,(x_{i+1}-x_i) - 1/6\,M_{i+1}\,(x_{i+1}-x_i) + \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \\
\sigma'(x_{i+1}^-) &= 1/6\,M_i\,(x_{i+1}-x_i) + 1/3\,M_{i+1}\,(x_{i+1}-x_i) + \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}
\end{aligned}$$

le raccord des dérivées au point x_i implique donc

$$\begin{aligned}
1/6\,M_{i+1}\,(x_{i+1}-x_i) + 1/6\,M_{i-1}\,(x_i - x_{i-1}) + \quad & 1/3\,M_i\,(x_{i+1}-x_{i-1}) \\
= \quad & \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}
\end{aligned}$$

Pour simplifier, considérons une subdivision régulière

$$h = (b-a)/(n-1), \quad x_i = a + (i-1)h, \quad i = 1 \ldots n.$$

les M_i sont alors solutions de

$$\left(D + \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & & & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & & \\ & 1/6 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1/6 \\ 0 & & & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ \\ M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \\ \vdots \\ \\ \frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{h^2} \end{bmatrix},$$

où D est une matrice nulle sauf pour les premiers et derniers termes de la diagonale

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

et λ un nombre très grand. Il suffit donc de résoudre un système tridiagonal pour trouver les M_i

1. Vérifier les formules proposées. En particulier vérifier que σ est bien de classe C^2. Quelle valeur prenez-vous pour λ ? Vérifier alors que les valeurs de y_0 et y_{N+1} ne jouent aucun rôle.
2. Comment résoudre efficacement un système linéaire tridiagonal dans scilab ?
3. Ecrire une fonction scilab [x,y]=spline(xi,yi,ng) qui renvoie deux vecteurs lignes x et y. x contient ng * (n-1) points dans l'intervalle $[a,b]$ et y les valeurs de la spline en ces points. Les vecteurs xi, yi sont des vecteurs lignes.
4. Pour
$$f(x) = \frac{1}{0.1 + x^2}$$
comparer f et σ sur le même graphique.
5. Calculer numériquement le taux de convergence lorsque $n \to \infty$ pour la norme du sup.
6. Même question avec
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
Conclusion ?