# Valeurs propres

## Exercice 1

Soit $A$ une matrice complexe, diagonalisable, de taille $N \times N$. On note $(\lambda_i)_{i=1\dots p}$ ses valeurs propres. On suppose que

$$\forall i > 1, \quad |\lambda_1| > |\lambda_i| .$$

On considère l'algorithme suivant (méthode de la puissance itérée)

$$x_0 \in \mathbb{C}^N,$$
$$x_{n+1} = \frac{Ax_n}{|Ax_n|}.$$

1. Montrer que
$$x_n = \frac{A^n x_0}{|A^n x_0|}$$
2. À quelle condition sur $x_0$ la suite $(x_n)$ tend-elle vers un vecteur propre de $A$ associée à $\lambda_1$ ?
3. Comment estimer $\lambda_1$ avec cet algorithme ?
4. Tester l'algorithme pour la matrice $A$ avec $N = 5$.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & & \ddots & \\ & \ddots & & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$
5. On suppose maintenant que
$$\forall i > 1, \quad |\lambda_1| < |\lambda_i| .$$
Comment adapter l'algorithme précédent pour trouver $\lambda_1$ et un vecteur propre associé (méthode de la puissance itérée inverse) ?

## Exercice 2

Soit $A = (a_1 \cdots a_n)$ une base de vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$. En utilisant la méthode de Gram-Schmidt trouver une base orthonormée $(q_1 \cdots q_n)$ et des réels $(r_{ij})$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq j$ tels que

$$a_j = \sum_{i=1}^{j} r_{ij} q_i.$$

En déduire une méthode pour calculer la décomposition $A = QR$, où $Q$ est une matrice unitaire et $R$ une matrice triangulaire.

## Exercice 3

Soit $A$ une matrice symétrique définie positive. On suppose que les valeurs propres de $A$ vérifient

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n.$$

On suppose connu un vecteur propre unitaire $v_1$ associé à la valeur propre $\lambda_1$, obtenu à partir de la méthode de la puissance itérée en partant du vecteur initial $s$.

On pose $x^{(0)} = s -^t v_1 s v_1$. Construisons ensuite $z^{(1)} = Ax^{(0)} -^t v_1 A x^{(0)} v_1$ puis $v_2^{(1)} = z^{(1)} / \left\| z^{(1)} \right\|$.

1. Montrer que $v_2^{(1)}$ est orthogonal à $v_1$.
2. En déduire un algorithme pour le calcul de $\lambda_2$ et d'un vecteur propre associé.
3. Généraliser au calcul de toutes les valeurs propres.
4. Tester l'algorithme pour la matrice tridiagonale, de taille $N = 5$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & & \ddots & \\ & \ddots & & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

## Exercice 4

Soit $A$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont simples. Soit $\mu$ un complexe. Proposer un algorithme basé sur la méthode de la puissance pour trouver une valeur propre de $A$ proche de $\mu$ et un vecteur propre associé. Préciser les conditions de convergence de cet algorithme.

## Exercice 5

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice $N \times N$. Le disque de Gerschgorin $D_i$ est défini par

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}.$$

1. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$. Montrer (théorème de Gerschgorin) que cette valeur propre appartient à l'union des disques de Gerschgorin :

$$\lambda \in \cup_i D_i.$$

2. On note maintenant

$$D_i' = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{j,i}| \right\}.$$

Montrer que
$$\lambda \in \cup_i D'_i.$$

3. Application : calculer les valeurs propres et tracer les disques de Gerschgorin de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 6

On appelle matrice de rotation de Givens, et on note $G(i, j, \theta)$, la matrice

$$
G(i,j,\theta) = \begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array} & \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & \cos\theta & \cdots & -\sin\theta & & \\
 & & & & & & \\
 & & \sin\theta & & \cos\theta & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

1. Montrer que $G(i, j, \theta)$ est une matrice unitaire.
2. Soit $A$ une matrice $N \times N$ et $j$ et $n$ des entiers tels que $n < j \leq N$. Montrer qu'il existe une matrice de Givens $G(j-1, j, \theta)$ telle que l'élément en position $(j, n)$ de la matrice $G(i, j, \theta)A$ est nul.
3. En déduire un algorithme pour calculer la décomposition $QR$ de $A$
4. Application à
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Exercice 7

Soit $A$ une matrice inversible $n \times n$. On note $A_i$ les vecteurs colonnes de $A$ et $\overline{A}_i$ les vecteurs colonnes de $A$ dont on a retiré le premier élément. Soit $\overline{u}_2$ un vecteur de taille $n-1$ et $\overline{Q}_2 = I_{n-1} -^t \overline{u}_2 \overline{u}_2$ (appelée matrice de réflexion de Householder). On note aussi $u_2 =^t (0,^t u_2)$ $Q_2 = I_n -^t u_2 u_2$.

1. Montrer que $\overline{Q}_2$ est symétrique et unitaire.
2. Montrer que l'on peut choisir le vecteur $\overline{u}_2$ tel que la première colonne de $Q_2 A$ contient des zéros, sauf sur ses deux premières composantes.
3. Montrer que c'est aussi le cas de $Q_2 A^t Q_2$.

4. En déduire un algorithme pour construire une matrice $Q$ unitaire et symétrique telle que
$$A =^t QHQ$$
où $H$ est une matrice de Hessenberg supérieure, c'est à dire qui vérifie
$$i > j + 1 \Rightarrow H_{ij} = 0.$$
5. Montrer que si $A$ est symétrique, alors $H$ est tridiagonale symétrique.
6. Déduire de ce qui précède un algorithme pour calculer les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice symétrique $A$.