Partie I : Recherche des vecteurs propres d'une matrice tridiagonale

Le but de cette partie est de développer et tester une méthode pour calculer les vecteurs propres d'une matrice tridiagonale. Dans cette partie, il est interdit d'utiliser les fonctions de résolution de systèmes linéaires de Scilab, sauf pour le débogage...

1. Écrire un programme Scilab qui calcule le déterminant d'une matrice tridiagonale A.
2. Écrire un programme Scilab qui calcule la valeur du polynôme caractéristique d'une matrice tridiagonale A en un point λ.
3. En déduire un programme qui calcule les valeurs propres de A
4. Tester les programmes précédents sur la matrice $N \times N$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   dont on calculera au préalable les valeurs propres et vecteurs propres exacts. Dans la suite, on utilisera cette décomposition exacte pour tester les algorithmes.
5. Méthode de la puissance. Soit A une matrice diagonalisable avec des valeurs propres notées $(\lambda_i)_{i=1\dots N}$, dont les modules sont distincts. On note $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$. Soit l'algorithme

$$v^0 \in \mathbb{R}^N, \quad \|v^0\| = 1, \quad v^{n+1} = \frac{Av^n}{\|Av^n\|}.$$

   Montrer que, en général, v^n tend vers un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i telle que $\rho(A) = |\lambda_i|$. Déterminer la condition qui assure cette convergence. Est-elle contraignante ?
6. Écrire un programme Scilab qui détermine un vecteur propre d'une matrice tridiagonale A associé à la valeur propre de plus grand module.
7. Écrire un programme Scilab qui détermine un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ_i quelconque de A. Indication : appliquer la méthode de la puissance à la matrice $(A - \lambda I)^{-1}$ où λ est un nombre bien choisi.

Partie II : Comptage des valeurs propres

Le but de cette partie est de programmer et de tester une méthode pour compter les valeurs propres d'une matrice A dans une zone du plan complexe. Dans cette partie, pour simplifier la programmation, il est permis d'utiliser les fonctions de résolution de systèmes linéaires de Scilab (`A\b`) mais interdit de calculer l'inverse de A (`A^(-1)`), sauf pour le débogage pour des petites valeurs de N. À partir de la question 7, tout est permis...

Soit A une matrice tridiagonale inversible avec des valeurs propres notées $(\lambda_i)_{i=1\ldots N}$, dont les modules sont distincts. Soit γ un lacet simple dans le plan complexe [1]. On note

$$\Pi_\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (zI - A)^{-1} dz.$$

1. À quelle condition cette intégrale de contour est-elle définie ?
2. Soit E_γ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés à des valeurs propres contenues dans le contour γ. En utilisant la formule des résidus, montrer que Π_γ est l'opérateur de projection sur E_γ.
3. Montrer que la trace de Π_γ est égale au nombre de valeurs propres de A dans le contour γ. Vérifier que $\Pi_\gamma A = A\Pi_\gamma$.
4. Soit V une matrice de taille $N \times P$. Écrire un programme Scilab qui calcule une valeur approchée de

   $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (zI - A)^{-1} V dz$$

   Lorsque γ est un cercle de centre z_0 et de rayon r, $\gamma(\theta) = z_0 + r\exp(i\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Pour l'intégration numérique suivant l'angle θ, on utilisera la méthode des trapèzes [2]. Rappel : il est interdit de calculer l'inverse de $(zI - A)$. Pour calculer $X = (zI - A)^{-1}V$ il faut résoudre le système linéaire $(zI - A)X = V$, ce qui est beaucoup plus efficace lorsque N devient grand et si $P \ll N$.
5. Soit un contour γ qui est un cercle de centre z_0 et de rayon r. On fait l'hypothèse que le nombre de valeurs propres de A dans ce contour est inférieur à P, c'est à dire que

   $$\dim\ker\Pi_\gamma > N - P. \tag{1}$$

   En pratique, pour que la méthode soit intéressante, il faut que P soit beaucoup plus petit que N. Soit V une matrice de taille $N \times P$ choisie au hasard. En général, les colonnes de V sont linéairement indépendantes. Soit W une matrice $N \times (N - P)$. En général, à cause de (1), on peut choisir les colonnes de W dans le noyau de Π_γ de façon que les colonnes de la matrice $P = (W, V)$ constituent une base de $\mathbb{R}^N$. Dans cette nouvelle base, montrer que Π_γ devient

   $$P^{-1}\Pi_\gamma P = \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & \Pi' \end{bmatrix},$$

   où Π' est une matrice de taille $P \times P$.

1. Si vous n'avez pas suivi l'UE Analyse Complexe, voir Wikipédia !

2. Il se trouve que pour des fonctions périodiques régulières la méthode des trapèzes est d'ordre infini. Les passionnés (s'il y en a) pourront le vérifier numériquement. Normalement, il suffit donc de quelques points d'intégration pour atteindre une excellente précision.

6. Montrer que la trace de Π' est égale au nombre de valeurs propres de A dans le contour γ. Montrer que c'est aussi le rang de $\Pi_\gamma V$.
7. Écrire un programme Scilab qui renvoie le nombre de valeurs propres dans un contour γ qui est un cercle de centre z_0 et de rayon r. Le tester sur l'exemple de la question 4 de la partie I pour plusieurs valeurs de N, z_0 et r (pour évaluer le rang de $\Pi_\gamma V$ calculer le rang d'une sous-matrice $P \times P$ avec la fonction `rank` de Scilab). Évaluer l'influence de la précision de l'intégration numérique. Conclusion ?
8. Déduire des questions précédentes une méthode efficace pour trouver les valeurs propres d'une matrice tridiagonale A qui sont dans une petite zone donnée du plan complexe. Déterminer aussi les vecteurs propres associés. Montrer qu'on peut se ramener à un problème en dimension $P \ll N$.