Extrema liés et billard convexe

Clarence Kineider

Leçons : 159, 219

Référence(s) : $\emptyset$

Théorème : Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et $f, g_1, \ldots, g_r : U \to \mathbf{R}$ des applications $\mathcal{C}^1$.
Soit $\Gamma = \{x \in U | \ \forall i \in [\![1, r]\!], g_i(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ a un extremum local en $a \in \Gamma$ et si $\{\mathrm{d}g_1(a), \ldots, \mathrm{d}g_r(a)\}$ est libre, alors il existe un unique r-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbf{R}^d$ tel que $\mathrm{d}f(a) = \lambda_1 \mathrm{d}g_1(a) + \cdots + \lambda_r \mathrm{d}g_r(a)$. Les λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Démonstration : L'unicité est immédiate par liberté des $\mathrm{d}g_i(a)$.
Existence : Γ est une sous-variété de $\mathbf{R}^d$ au voisinage de a car $g = (g_1, \ldots, g_r)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de a (par le théorème d'inversion locale). Le plan tangent à Γ en a est $T_a\Gamma = \bigcap\limits_{i=1}^{r} \ker \mathrm{d}g_i(a)$. Soit $v \in T_a\Gamma$. Il existe $\gamma : [0, 1] \to \Gamma$ un chemin tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Ainsi, $f \circ \gamma$ admet un extremum local en 0. Donc on a :

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}f(\gamma(0)).\gamma'(0) = \mathrm{d}f(a).v$$

Ainsi $T_a\Gamma = \bigcap\limits_{i=1}^{r} \ker \mathrm{d}g_i(a) \subset \ker \mathrm{d}f(a)$. On réécrit cette expression en terme d'orthogonal (au sens de la dualité) : $\mathrm{Vect}\left\{\mathrm{d}g_1(a), \ldots, \mathrm{d}g_r(a)\right\}^\perp \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{d}f(a))^\perp$.
En passant cette expression au dual on obtient $\mathrm{Vect}(\mathrm{d}f(a)) \subset \mathrm{Vect}\left\{\mathrm{d}g_1(a), \ldots, \mathrm{d}g_r(a)\right\}$ ce qui donne le résultat. $\square$

Corollaire : Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbf{R}^2$ tel que $\partial\Omega = \left\{x \in \mathbf{R}^2 | \ g(x) = 0\right\}$ avec $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une submersion de classe $\mathcal{C}^1$ ($\mathrm{d}g(a) \neq 0$ pour tout $a \in \mathbf{R}^2$) et $\partial\Omega$ est compact. Alors il existe $A, B, C \in \partial\Omega$ tels que la droite normale à $\partial\Omega$ en A soit la bissectrice de $\widehat{BAC}$, idem pour B et C.

Remarques :

- Formulé autrement, $\partial\Omega$ est une sous-variété compacte de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^2$ définie par une submersion g.
- Ce résultat est un résultat de billard, qui dit que dans un billard convexe régulier il existe une trajectoire 3-périodique qui respecte les lois de réflexions de *Descartes* (*faire un dessin au tableau !*).
- Le résultat est vrai pour une trajectoire n-périodique, la preuve est la même, je présente le cas $n = 3$ pour alléger les notations.

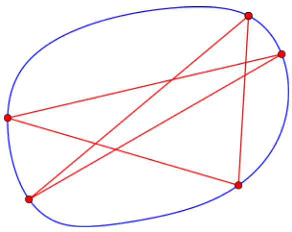

Figure 1 – Un billard convexe et une trajectoire 5-périodique.

Démonstration : On va trouver la trajectoire 3-périodique en trouvant un triangle de périmètre maximal dans Ω. On montrera alors que ce triangle vérifie les conditions aux angles.
On pose

$$P : \begin{array}{rcl} (\mathbf{R}^2)^3 & \to & \mathbf{R} \\ (A,B,C) & \mapsto & AB+BC+AC \end{array}.$$

L'application P est continue sur $(\partial\Omega)^3$ qui est compact, donc elle admet un maximum $(A_0,B_0,C_0) \in (\partial\Omega)^3$. De plus P est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $V \subset (\mathbf{R}^2)^3$ des triplets de points deux à deux distincts. Le maximum (A_0,B_0,C_0) est dans V puisque si $A_0 = B_0$, on aurait par inégalité triangulaire $\forall B_1 \neq A_0, P(A_0,B_0,C_0) < P(A_0,B_1,C_0)$ ce qui contredit la maximalité de (A_0,B_0,C_0). On pose alors

$$\phi : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 \backslash \{B_0,C_0\} & \to & \mathbf{R} \\ A & \mapsto & P(A,B_0,C_0) \end{array}.$$

Puisque ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition et a un maximum local en $A_0 \in \partial\Omega$, on peut appliquer le théorème des extrema liés : il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\nabla\phi(A_0) = \lambda\nabla g(A_0)$.
Enfin, $\nabla\phi(A_0) = \dfrac{\overrightarrow{B_0A_0}}{B_0A_0} + \dfrac{\overrightarrow{C_0A_0}}{C_0A_0}$ (voir remarque) est un vecteur directeur de la bissectrice à $\widehat{B_0A_0C_0}$. Puisque $\nabla g(A_0)$ est un vecteur normal à $\partial\Omega$, on a le résultat en A_0. De la même manière, la condition aux angles $\widehat{B_0C_0A_0}$ et $\widehat{A_0B_0C_0}$ est vérifiée également. $\square$

Remarque :
Pour le calcul de $\nabla\phi$, en notant $A = (x,y)$, $B_0 = (x_B,y_B)$ et $C_0 = (x_C,y_C)$:

$$\phi(A) = \sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2} + \sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2} + \sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}$$

On a donc :

$$\nabla\phi(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{x-x_B}{\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}} \\ \dfrac{y-y_B}{\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{x-x_C}{\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2}} \\ \dfrac{y-y_C}{\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2}} \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{B_0A}}{B_0A} + \frac{\overrightarrow{C_0A}}{C_0A}$$