Point fixe de Kakutani et sous-groupes compacts de $GL(E)$

Clarence Kineider

Leçons : 106, 203, 208

Référence(s) : Alessandri, *Thèmes de géométrie.*

On commence par énoncer le théorème du point fixe de Kakutani :

Théorème : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et $K \subset E$ compact, convexe, non-vide et stable par G (i.e. $\forall g \in G, g(K) \subset K$). Alors il existe $x \in K$ tel que pour tout $g \in G$, $g(x) = x$.

Démonstration : Soit $||\cdot||$ une norme euclidienne sur E. Pour tout $x \in E$, on pose $N(x) = \max_{g\in G} ||g(x)||$. L'application $N : E \to \mathbf{R}^+$ est bien définie car G est compact et pour tout $x \in E$, $g \mapsto g(x)$ est continue. Montrons que N est une norme sur E :

- Homogénéité : immédiat
- Définition : Si $N(x) = 0$, alors pour tout $g \in G$, $g(x) = 0$. Donc $x = 0$.
- Inégalité triangulaire : Soit $x, y \in E$ et $g_0 \in G$ tel que $N(x+y) = ||g_0(x+y)||$. On a :

$$\begin{aligned} N(x+y) &= ||g_0(x) + g_0(y)|| \\ &\leq ||g_0(x)|| + ||g_0(y)|| \\ &\leq N(x) + N(y) \end{aligned}$$

  De plus, on a $N(x+y) = N(x) + N(y)$ si et seulement si $g_0(x)$ et $g_0(y)$ sont positivement liés, si et seulement si x et y sont positivement liés (appliquer g_0^{-1} à l'égalité $g_0(x) = \lambda g_0(y)$).

Puisque N est une norme, elle est 1-lipschitzienne (par inégalité triangulaire) donc continue. Or K est compact, donc il existe $z \in K$ de norme N minimale, i.e. $N(z) = \min_{x\in K} N(x)$. On note $a = N(z)$.
Montrons que z est l'unique élément de norme N minimale dans K :
Soit $y \in K$ tel que $N(y) = a$. Puisque K est convexe, $\frac{y+z}{2} \in K$. Or par inégalité triangulaire, $N(\frac{y+z}{2}) \leq a$. Par minimalité de a et homogénéité de N, on a donc $N(y+z) = 2a = N(y) + N(x)$. Donc y et z sont positivement liés et de même norme, donc $y = z$. Donc z est l'unique élément de norme minimale dans K.
Or pour tout $g \in G$, on a :

$$N(g(z)) = \max_{h\in G} ||gh(x)|| = \max_{h\in G} ||h(x)|| = N(z) = a$$

Donc pour tout $g \in G$, $g(z) = z$. □

Corollaire : Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbf{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$.

Démonstration : Soit H un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbf{R})$. On fait agir H sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ par l'application $\rho : \begin{array}{ccc} H & \to & GL(\mathcal{S}_n(\mathbf{R})) \\ A & \mapsto & (S \mapsto AS\,{}^{\mathrm{t}}A) \end{array}$.
C'est un morphisme de groupe continu (voir remarque), donc $G = \rho(H)$ est un sous groupe compact de $GL(\mathcal{S}_n(\mathbf{R}))$.
Soit $E = \{{}^{\mathrm{t}}MM | M \in H\}$. On a $E \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et E compact car $M \mapsto {}^{\mathrm{t}}MM$ est continue et H est compact.
L'enveloppe convexe de E, notée K est compacte (un corollaire du théorème de Carathéodory).
Soit $A, M \in H$. On a :

$$\rho(A)({}^{\mathrm{t}}MM) = A\,{}^{\mathrm{t}}MM\,{}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}(M\,{}^{\mathrm{t}}A)M\,{}^{\mathrm{t}}A \in E$$

Ainsi E est stable par G, donc K est aussi stable par G. Par le théorème de Kakutani, il existe $S \in K$ tel que pour tout $A \in H$, $\rho(A)(S) = S$. Or $E \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, donc $K \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Il existe donc $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $S = R^2$. Soit $A \in H$. On a :

$$\begin{aligned} R^{-1}AR\,{}^{\mathrm{t}}(R^{-1}AR) &= R^{-1}AR^2\,{}^{\mathrm{t}}AR^{-1} \\ &= R^{-1}\rho(A)(S)R^{-1} \\ &= R^{-1}SR^{-1} \\ &= I_n \end{aligned}$$

Donc $R^{-1}AR \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$. Donc H est un sous groupe de $R\mathcal{O}_n(\mathbf{R})R^{-1}$. $\square$

Remarque :
Je passe la démonstration de la continuité de ρ à l'oral. La voici, il faut être capable de la détailler si le jury le demande.
Continuité en $A \in H$: soit $B \in H$, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

$$\begin{aligned} ||(\rho(A) - \rho(B))(S)|| &= ||AS\,{}^{\mathrm{t}}A - BS\,{}^{\mathrm{t}}B|| \\ &= ||AS\,{}^{\mathrm{t}}A - BS\,{}^{\mathrm{t}}A + BS\,{}^{\mathrm{t}}A - BS\,{}^{\mathrm{t}}B|| \\ &\leq ||(A-B)S\,{}^{\mathrm{t}}A|| + ||BS({}^{\mathrm{t}}A - {}^{\mathrm{t}}B)|| \\ &\leq ||A-B||.||S||.(||A|| + ||B||) \end{aligned}$$

Donc $||\rho(A) - \rho(B)||_{GL(\mathcal{S}_n(\mathbf{R}))} \leq ||A-B||\,(||A|| + ||B||) \leq ||A-B||\,(2||A|| + ||A-B||) \underset{B \to A}{\longrightarrow} 0$