Théorème de Paley-Wiener

Clarence Kineider

Leçons : 236, 239, 250

Références : Zuily, *Distributions et équations aux dérivées partielles.*

Théorème : On note $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ à support compact, et pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$, on note $\hat{\varphi}$ sa transformée de Fourier.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ avec $supp(\varphi) \subset [r, -r]$. Il existe une fonction $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que :

$$F|_{\mathbf{R}} = \hat{\varphi}$$

$$\forall N \in \mathbf{N},\ \exists C_N > 0,\ \forall z \in \mathbf{C},\ |F(z)| \leqslant C_N(1+|z|)^{-N} e^{r|Im(z)|} \tag{$*$}$$

2. Réciproquement, soit $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorphe vérifiant $(*)$. Il existe $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que :

$$supp(\varphi) \subset [-r, r]$$

$$\hat{\varphi} = F|_{\mathbf{R}}$$

Démonstration :

1. On pose pour tout $z \in \mathbf{C}$, $F(z) = \int_{\mathbf{R}} e^{-itz}\varphi(t)dt$. Cette intégrale est bien définie puisque φ est à support compact et on a bien sûr $F|_{\mathbf{R}} = \hat{\varphi}$, il reste donc à montrer que F est entière et qu'elle vérifie $(*)$.
On va appliquer un théorème d'holomorphie sous l'intégrale. On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \times \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ (t, z) & \mapsto & e^{-itz}\varphi(t) \end{array}.$$

On sait que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $z \mapsto f(t, z)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$. De plus, on a pour $R > 0$ et $|z| < R$,

$$|f(t, z)| \leqslant e^{t|Im(z)|}|\varphi(t)| \leqslant e^{rR}|\varphi(t)|$$

car $supp(\varphi) \subset [-r, r]$, et $t \mapsto e^{rR}|\varphi(t)|$ est intégrable.
Ainsi, pour tout $R > 0$, par le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, F est holomorphe sur $\{|z| < R\}$. On en déduit que F est holomorphe sur $\mathbf{C}$.
Montrons maintenant que F vérifie $(*)$. On observe que pour tout $N \in \mathbf{N}$ et $z \in \mathbf{C}$,

$$
\begin{aligned}
|z|^N|F(z)| &= \left|\int_{\mathbf{R}} z^N e^{-itz}\varphi(t)dt\right| \\
&= \left|\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(-i)^N}\frac{d^N}{dt^N}(e^{-itz})\varphi(t)dt\right| \\
&\overset{IPP}{=} \left|\int_{\mathbf{R}} e^{-itz}\frac{d^N\varphi}{dt^N}(t)dt\right| \\
&\overset{IT}{\leqslant} e^{r|Im(z)|}\int_{\mathbf{R}}\left|\frac{d^N\varphi}{dt^N}(t)\right|dt
\end{aligned}
$$

En posant $\widetilde{C_N} = \int_{\mathbf{R}} \left|\varphi^{(N)}(t)\right| dt < +\infty$, on a donc $\forall N \in \mathbf{N},\ |z|^N|F(z)| \leqslant \widetilde{C_N}e^{r|Im(z)|}$.
Ainsi, pour tout $N \in \mathbf{N}$,

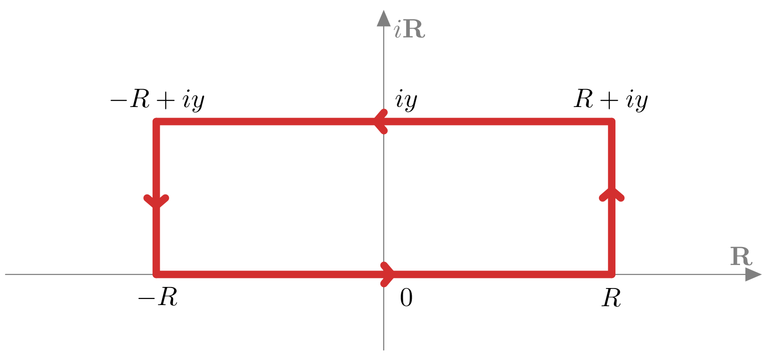
$$
\begin{aligned}
(1+|z|)^N|F(z)| &= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}|z|^k|F(z)| \\
&\leqslant \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\widetilde{C_k}\right)}_{C_N} e^{r|Im(z)|}
\end{aligned}
$$

Ainsi F vérifie $(*)$, ce qui termine la démonstration du premier point.

2. On pose pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{itx}F(x)dx$. Puisque $F|_{\mathbf{R}}$ vérifie $(*)$, elle est dans $L^1(\mathbf{R})$ donc φ est bien définie. De plus, φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ par théorème de classe $\mathcal{C}^\infty$ sous l'intégrale. Par le théorème d'inversion de Fourier, on a bien $\hat{\varphi} = F|_{\mathbf{R}}$. Il ne reste plus qu'à montrer que φ est à support compact et $supp(\varphi) \subset [-r, r]$. On va commencer par montrer que pour tout $y, t \in \mathbf{R}$, on a $\varphi(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{it(x+iy)}F(x+iy)dx$, c'est à dire que φ ne dépends pas de la ligne horizontale sur laquelle on intègre. On fixe $t \in \mathbf{R}$, et on pose

$$
g_t : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & e^{itz}F(z) \end{array}.
$$

La fonction g_t est holomorphe sur $\mathbf{C}$. On fixe $R > 0$ et on l'intègre sur le contour suivant :



Par le théorème des résidus, on obtiens :

$$0 = \underbrace{\int_{-R}^{R} g_t(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^y g_t(R+is)ds}_{I_2} - \underbrace{\int_{-R}^{R} g_t(x+iy)dx}_{I_3} - \underbrace{\int_0^y g_t(-R+is)ds}_{I_4}$$

Montrons que $I_2, I_4 \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après l'inégalité $(*)$ avec $N=1$ on a :

$$\begin{aligned} |g_t(R+is)| &= |e^{it(R+is)}F(R+is)| \\ &\leqslant e^{-ts}\frac{C_1}{1+R}e^{rs} \\ &\leqslant e^{(r-t)s}\frac{C_1}{1+R} \\ &\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

et la convergence est uniforme en $s \in [0,y]$. Donc $I_2, I_4 \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par théorème de convergence dominée, on a donc pour tout $y \in \mathbf{R}$, $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{it(x+iy)}F(x+iy)dx$.

Soit $t \in \mathbf{R}^*$ et $\lambda > 0$. On pose $y = \lambda\frac{t}{|t|}$, de sorte que $ty = \lambda|t|$ et $|y| = \lambda$. On obtient alors par $(*)$ avec $N=2$ pour $x \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} |e^{it(x+iy)}F(x+iy)| &\leqslant e^{-ty}(1+|x|)^{-2}e^{r|y|} \\ & e^{\lambda(r-|t|)}(1+|x|)^{-2} \end{aligned}$$

d'où $|\varphi(t)| \leqslant C_2 e^{\lambda(r-|t|)}\int_{\mathbf{R}}(1+|x|)^{-2}dx$. En passant à la limite lorsque $\lambda \to +\infty$ si $|t| < r$, on obtient $\varphi(t) = 0$ si $t \notin [-r,r]$, donc $supp(\varphi) \subset [-r,r]$.

$\square$

Merci à Pierre De Roubin *pour ce développement* ♡