Université de Strasbourg **Licence Mathématique L3 S6**

2024-2025

Analyse complexe
Contrôle continu 1
10/03/2025, durée : 1h

Les téléphones portables sont interdits. Utilisation des documents autorisée, mais pas encouragée.

Exercice 1. (*5 points.*)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'equation suivante
$$(z-i)^4 = 1.$$
Exprimer la(les) solution(s) dans la forme polaire.

Les racines 4èmes de l'unité sont $1, -1, i, -i$. *Les solutions sont*
$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$z_2 = -1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$
$$z_3 = i + i = 2\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$z_4 = -i + i = 0$$

Exercice 2. (*5 points.*) Calculer l'intégrale
$$\int_D \frac{dz d\bar{z}}{1+|z|^4},$$
où $D = \{z \mid \mathrm{Im} z > 0, \mathrm{Re} z > 0\}$.

Dans les coordonnées polaires $dz d\bar{z} = -2ir dr d\varphi$.
$$\int_D \frac{dz d\bar{z}}{1+|z|^4} = -2i \int_D \frac{r dr d\varphi}{1+|z|^4} = -2i \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r dr d\varphi}{1+r^4} = -2i \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r dr d\varphi}{1+r^4}$$
on changeant $x = r^2$,
$$= -i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = -i\frac{\pi}{2} (\arctan x)|_0^\infty = -i\frac{\pi^2}{4}$$

Exercice 3. (*5 points.*) Calculer l'intégrale
$$\int_{C(1,2)} \frac{z^2-1}{z^3-2z} dz,$$
où $C(1,2)$ est un cercle de centre 1 et de rayon 2, parcouru dans le sens trigonométrique.

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle donne

$$\frac{1}{z^3-2z} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-\sqrt{2}} + \frac{1}{z+\sqrt{2}} - \frac{2}{z}\right)$$

$$\int_{C(1,2)} \frac{z^2-1}{z^3-2z}dz = \frac{1}{4}\int_{C(1,2)} \frac{z^2-1}{z-\sqrt{2}}dz + \frac{1}{4}\int_{C(1,2)} \frac{z^2-1}{z+\sqrt{2}}dz - \frac{1}{2}\int_{C(1,2)} \frac{z^2-1}{z}dz$$

En dessinant le contour on voit que 0 *et* $\sqrt{2}$ *se trouvent à l'intérieur et* $-\sqrt{2}$ *à l'extérieur. Par Cauchy*

$$\int_{C(1,2)} \frac{z^2-1}{z^3-2z}dz = \frac{1}{4}2\pi i(\sqrt{2}^2-1) + 0 - \frac{1}{2}2\pi i(0^2-1) = \frac{3}{2}\pi i.$$

Exercice 4. (*5 points.*) Exprimer la forme différentielle sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ suivante

$$\frac{dz}{z} + \frac{d\bar{z}}{\bar{z}},$$

en coordonnées polaires (r, φ) puis en coordonnées cartésiennes (x, y).

$$\frac{dz}{z} + \frac{d\bar{z}}{\bar{z}} = 2\frac{dr}{r} = \frac{2xdx + 2ydy}{x^2+y^2}.$$