

Analyse complexe
Contrôle continu 1
06/03/2026, durée : 1h

L'utilisation d'appareils électroniques est interdite. Les documents papier (notes de cours, de TD, livres) sont autorisés, mais leur utilisation n'est pas encouragée.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$(iz - 2)^3 = i.$$

Exprimer la(les) solution(s) dans une forme algébrique ($x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$).

Rappel: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Les racines 3-èmes de i sont $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -i$. Les solutions sont

$$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{4 + \sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \frac{1}{2} - \frac{4 - \sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = -1 - 2i$$

Exercice 2. Pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ calculer l'intégrale

$$\int_C z^{2m} \bar{z}^{2n} dz$$

où $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ est parcouru en partant de $z = 1$.

Le chemin peut être paramétré de façon suivante: $\gamma(\theta) = e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]$.

$$\int_C z^{2m} \bar{z}^{2n} dz = \int_0^\pi e^{i\theta(2m-2n)} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi e^{i\theta(2m-2n+1)} d\theta = -\frac{2}{2(m-n)+1}.$$

Exercice 3. Calculer l'intégrale

$$\int_{C(0, \sqrt{2})} \frac{e^{\pi z}}{z^3 + z} dz,$$

où $C(0, \sqrt{2})$ est le cercle de centre 0 de rayon $\sqrt{2}$, parcouru dans le sens trigonométrique.

Fonction $e^{\pi z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Les singularités de $z^3 + z = z(z - i)(z + i)$ sont en $0, i, -i$, tous dans l'intérieur du contour. Fonction $e^{\pi z}/(z^2 + 1)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$, fonction $e^{\pi z}/(z(z + i))$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0, -i\}$, fonction $e^{\pi z}/(z(z - i))$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0, i\}$. Pour ϵ assez petit on a

$$\begin{aligned} \int_{C(0, \sqrt{2})} \frac{e^{\pi z}}{z^3 + z} dz &= \int_{C(0, \epsilon)} \frac{e^{\pi z}/(z^2 + 1)}{z} dz + \int_{C(i, \epsilon)} \frac{e^{\pi z}/(z(z + i))}{z - i} dz + \int_{C(-i, \epsilon)} \frac{e^{\pi z}/(z(z - i))}{z + i} dz \\ &= 2\pi i(1 + (-1)/(i(2i)) + (-1)/(-i(-2i))) = 4\pi i, \end{aligned}$$

où on a appliqué la formule de Cauchy à chaque intégrale.

Exercice 4. Exprimer la forme différentielle sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ suivante

$$\frac{\bar{z}dz - zd\bar{z}}{|z|^4},$$

en coordonnées polaires (r, φ) puis en coordonnées cartésiennes (x, y) .

$$\frac{\bar{z}dz - zd\bar{z}}{|z|^4} = \frac{2i}{r^2} d\varphi = \frac{2i(xdy - ydx)}{(x^2 + y^2)^2}.$$