Université de Strasbourg **Licence Mathématique L3 S6**

2024-2025

Analyse complexe
Contrôle continu 2
07/04/2025, durée : 1h

Les téléphones portables sont interdits. Utilisation des documents autorisée, mais pas encouragée.

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence (qui peut dépendre de la constante $a \in \mathbb{C}$) et calculer la somme de la série sur son disque de convergence

$$\sum_{n\geq 0}(n+a^n)z^n.$$

La série $\sum_{n\geq 0} nz^n$ *a le rayon égal à* 1. *La série* $\sum_{n\geq 0} a^n z^n$ *a le rayon convergence* $1/|a|$. *Donc le rayon de convergence de la série* $\sum_{n\geq 0}(n+a^n)z^n$ *est égal à* $R_c = \min(1, 1/|a|)$.

Sur le disque de convergence $z \in B(0, R_c)$ *on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2},$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+a^n)z^n = \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-az}.$$

Exercice 2. Trouver l'ordre $\operatorname*{Ord}_z f(z)$ de la fonction

$$f(z) = \frac{(1-\cot z)^3}{(z-\frac{\pi}{4})^2},$$

pour tout point $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = 0$.

L'équation $\cot z = 1$ *a comme les solutions* $z_n = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\cot z = 1 + \cot'(z_n)(z-z_n) + \mathcal{O}((z-z_n)^2) = 1 - 2(z-z_n) + \mathcal{O}((z-z_n)^2),$$

Alors,

$$(1-\cot z)^3 = 8(z-z_n)^3 + \mathcal{O}((z-z_n)^4)$$

d'où $\operatorname*{Ord}_{z_n} f(z) = 3$ *pour* $n \neq 0$ *et* $\operatorname*{Ord}_{z_0} f(z) = 1$.

Exercice 3. Trouver les résidus d'une-forme suivante à toutes ses singularités isolées et à l'infini.

$$\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}dz,$$

Remarque. Un théorème du cours pourrait aider à raccourcir le calcul.

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}dz, -1\right) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -1}\left(\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}(z+1)^3\right)'' = 2\sin 2.$$

Car la somme des residues sur $\bar{\mathbb{C}}$ vaut zéro, alors

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}dz, \infty\right) = -2\sin 2.$$

Exercice 4. Trouver la somme de la série

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(2n\alpha)}{n},$$

où $\alpha \in [0, 2\pi)$. Justifiez les étapes de calcul en précisant les théorèmes utilisés.
Remarque: La formule de transformation d'Abel

$$\sum_{n=m}^{N} a_n b_n = \sum_{n=m}^{N-1} S_n(b_n - b_{n+1}) - S_{m-1}b_m + S_N b_N,$$

où $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ S_0 = 0$.

Étudions la convergence de cette série numérique. Elle diverge pour $\alpha = 0, \pi$. Pour $\alpha \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$, par la formule de transformation d'Abel,

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{N}\frac{\cos(2n\alpha)}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} S_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + S_N\frac{1}{N} = \sum_{n=1}^{N-1} S_n\frac{1}{n(n+1)} + S_N\frac{1}{N},$$

où $S_n = \sum_{m=1}^{n}\cos(2m\alpha)$. En calculant

$$\sum_{m=1}^{n} e^{i2\alpha m} = -1 + \frac{1-e^{i2\alpha(n+1)}}{1-e^{i2\alpha}} = -1 + e^{i\alpha n}\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

on déduit

$$S_n = \sum_{m=1}^{n}\cos(2m\alpha) = -1 + \cos\alpha n\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha},$$

et $|S_n| < 1 + \frac{1}{|\sin\alpha|}$. En faisant $N \to +\infty$ dans la formule (1) on conclut que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n\alpha)}{n}$ converge pour tout $\alpha \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$.

En suite, pour $|z| < 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-z)^n}{n} = -\ln(1-z) - \ln(1+z) = -\ln(1-z^2),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\bar{z}^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\bar{z}^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\bar{z})^n}{n} = -\ln(1-\bar{z}^2),$$

Par théorème d'Abel on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n\alpha)}{n} = \lim_{r\to 1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(re^{i\alpha})^{2n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(re^{-i\alpha})^{2n}}{n}\right) = -\frac{1}{2}\ln(1-e^{i2\alpha}) - \frac{1}{2}\ln(1-e^{-i2\alpha}) = -\ln(2|\sin\alpha|),$$

pour $\alpha \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$.