Université de Strasbourg **Licence Mathématique L3 S6**

2025-2026

Analyse complexe
Contrôle continu 2
08/04/2026, durée : 1h

L'utilisation d'appareils électroniques est interdite. Les documents papier (notes de cours, de TD, livres) sont autorisés, mais leur utilisation n'est pas encouragée.

Exercice 1. (6 points)

Déterminer le développement en série de Laurent centré en 0, sur les anneaux $0 < |z| < |a|$ et $|z| > |a|$, de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k},$$

ou $a \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Rappel. Série de Laurent centré en z_0 est une série de forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$.

Développement pour $0 < |z| < |a|$.

$$\frac{1}{(z-a)^k} = \frac{(-1)^k}{a^k}\left(1-\frac{z}{a}\right)^{-k}.$$

On utilise la série géométrique :

$$(1-u)^{-k} = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}}\frac{1}{1-u} = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}}\sum_{n=0} u^n$$

$$\frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=k-1} n\cdot(n-1)\cdots(n-k+2)\cdot u^{n-k+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}u^n, \qquad |u|<1.$$

Avec $u = \frac{z}{a}$, on obtient

$$\frac{1}{(z-a)^k} = (-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\frac{z^n}{a^{n+k}} \qquad (0<|z|<|a|).$$

Développement pour $|z| > |a|$

$$\frac{1}{(z-a)^k} = z^{-k}\left(1-\frac{a}{z}\right)^{-k}.$$

En utilisant à nouveau la série au dessus avec $u = \frac{a}{z}$, on obtient

$$\frac{1}{(z-a)^k} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}a^n\, z^{-n-k} \qquad (|z|>|a|).$$

$$\frac{1}{(z-a)^k} = \sum_{n\le -k}\binom{-n-1}{k-1}a^{-n-k}z^n, \qquad |z|>|a|.$$

Exercice 2. (5 points) Trouver l'ordre $\operatorname*{Ord}_z f(z)$ de la fonction

$$f(z) = \frac{(z^2 - \pi^2)^2 \sin z}{z^5},$$

pour tout point $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = 0$.

Les zéros sont en $\pm\pi n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Les deux zéros $\pm\pi$ sont d'ordre 3, tout les autres d'ordre 1.

Exercice 3. (5 points) Trouver les résidus d'une-forme suivante à toutes ses singularités isolées et à l'infini.

$$\frac{e^z}{z^2(z^2 + a^2)} dz,$$

où $a \in \mathbb{C}$, incluant le cas $a = 0$.

Remarque. Un théorème du cours pourrait aider à raccourcir le calcul.

Soit $a \neq 0$. Les singularités de $f(z)dz = \frac{e^z}{z^2(z^2+a^2)} dz$ dans $\mathbb{C}$ sont en $z = 0$ (pôle d'ordre 2) et en $z = \pm ia$ (pôles simples).

$$\mathrm{Res}_0 f dz = \frac{1}{a^2}, \quad \mathrm{Res}_{ia} f dz = -\frac{e^{+ia}}{2ia^3}, \quad \mathrm{Res}_{-ia} f dz = \frac{e^{-ia}}{2ia^3}.$$

Le point ∞ dans $\hat{\mathbb{C}}$ est une singularité isolée. Comme la somme des résidus dans $\hat{\mathbb{C}}$ vaut zéro, on a

$$\mathrm{Res}_\infty f dz = -\frac{1}{a^2} + \frac{\sin a}{a^3}.$$

Soit $a = 0$. La singularité de $f(z)dz = \frac{e^z}{z^4} dz$ dans $\mathbb{C}$ est $z = 0$, pôle d'ordre 4.

$$\mathrm{Res}_0 f dz = \frac{1}{6}, \quad \mathrm{Res}_\infty f dz = -\frac{1}{6}$$

Exercice 4. (6 points) Trouver la somme de la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\cos((2n+1)\alpha)}{2n+1},$$

où $\alpha \in [0, 2\pi)$. Justifiez les étapes de calcul en précisant le théorème utilisé.

Si $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$ la série diverge. Sinon, elle est convergente pour $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ (démontrez par votre méthode préférée – sommation d'Abel, critère de Dirichlet...). On utilise la série de Taylor de logarithme

$$\log(1 - z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1$$

,

$$\log(1 + z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n}, \quad |z| < 1$$

$$\log(1 - \bar{z}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n}, \quad |z| < 1$$

$$\log(1 + \bar{z}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{z}^n}{n}, \quad |z| < 1$$

. On pose $z = re^{i\alpha}$. Par théorème d'Abel

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos((2n+1)\alpha)}{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(2n+1)i\alpha} + e^{-(2n+1)i\alpha}}{2n+1} =$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)e^{ni\alpha} + (1-(-1)^n)e^{-ni\alpha}}{n} = \lim_{r\to 1} \frac{1}{4}\sum_{n=1} \frac{z^n - (-z)^n + (\bar{z})^n - (-\bar{z})^n}{n}$$

$$= \lim_{r\to 1} \frac{1}{4}\big(-\log(1-z) + \log(1+z) - \log(1-\bar{z}) + \log(1+\bar{z})\big)$$

$$= \frac{1}{4}\big(-\log(1-e^{i\alpha}) + \log(1+e^{i\alpha}) - \log(1-e^{-i\alpha}) + \log(1+e^{-i\alpha})\big) = \frac{1}{2}\log\big|\cot\frac{\alpha}{2}\big|.$$