Université de Strasbourg **Licence Mathématique L3 S6**

2025-2026

Analyse complexe
Contrôle continu 3
11/05/2026, durée : 2h

L'utilisation d'appareils électroniques est interdite. Les documents papier (notes de cours, de TD, livres) sont autorisés, mais leur utilisation n'est pas encouragée.

Exercice 1. (4 points) Trouver la somme de la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2},$$

pour $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Considérons la fonction méromorphe

$$f(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \frac{1}{(z+a)^2}.$$

Les singularités de f sont des pôles simples aux points $z = n \in \mathbb{Z}$ et un pôle double en $z = -a$. On sait que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}, n\right) = (-1)^n.$$

Ainsi,

$$\operatorname{Res}(f, n) = \frac{(-1)^n}{(n+a)^2}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{Res}(f, n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2}.$$

Le point $z = -a$ est un pôle double,

$$\operatorname{Res}(f, -a) = \left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)\right]_{z=-a} = -\pi^2 \frac{\cos(-\pi a)}{\sin^2(-\pi a)}. = -\pi^2 \frac{\cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)}.$$

En intégrant f sur un grand contour carré (comme on a fait en TD, et on ne répète pas les details ici, mais vous allez les fournir dans votre copie) et en faisant tendre sa taille vers l'infini, l'intégrale tend vers 0. La somme des résidus est donc nulle :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{Res}(f, n) + \operatorname{Res}(f, -a) = 0.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \pi^2 \frac{\cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)}.$$

Exercice 2. (4 points)
Calculer l'integrale

$$\int_C \frac{1}{z^4+1} dz$$

où C est le chemin donné par equation $x^2+y^2=2x$ et parcouru dans le sens trigonométrique.

On commence par identifier le contour C. On a

$$x^2+y^2=2x \iff (x-1)^2+y^2=1.$$

Donc C est le cercle de centre 1 et de rayon 1, parcouru dans le sens trigonométrique.
Les pôles de la fonction

$$f(z)=\frac{1}{z^4+1}$$

sont les racines de l'équation

$$z^4=-1=e^{i\pi}.$$

Ainsi,

$$z_k=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}, \qquad k=0,1,2,3.$$

Les quatre pôles sont donc

$$e^{i\pi/4}, \qquad e^{3i\pi/4}, \qquad e^{5i\pi/4}, \qquad e^{7i\pi/4}.$$

dont deux se trouvent à l'intérieur de C

$$e^{i\pi/4} \qquad \text{et} \qquad e^{7i\pi/4}=e^{-i\pi/4}.$$

Les pôles sont simples. Pour un pôle simple z_0 de f, on a

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, z_0\right)=\frac{1}{(z^4+1)'\big|_{z=z_0}}=\frac{1}{4z_0^3}.$$

Donc, par le théorème des résidus,

$$\int_C \frac{1}{z^4+1}\, dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4(e^{i\pi/4})^3}+\frac{1}{4(e^{-i\pi/4})^3}\right).$$

Ainsi,

$$\int_C \frac{1}{z^4+1}\, dz=\frac{\pi i}{2}\left(e^{-3i\pi/4}+e^{3i\pi/4}\right).$$

Or

$$e^{-3i\pi/4}+e^{3i\pi/4}=2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}.$$

Finalement,

$$\int_C \frac{1}{z^4+1}\, dz=-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$$

Exercice 3. (4 points) Calculer l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b\cos x)^2} dx,$$

où $a>b>0$, en utilisant le théorème de résidus.

Posons

$$z = e^{ix}, \quad \text{alors,} \quad \cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \qquad dx = \frac{dz}{iz}.$$

Ainsi,

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(a + \frac{b}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} \frac{dz}{iz} = \frac{4}{i} \int_{|z|=1} \frac{z}{(bz^2 + 2az + b)^2}\, dz.$$

Les pôles sont les racines de

$$bz^2 + 2az + b = 0.$$

$$z_\pm = \frac{-a \pm \Delta}{b}, \quad \Delta = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Puisque $a > b > 0$, on a

$$|z_+| < 1, \qquad |z_-| > 1.$$

Le seul pôle à l'intérieur du cercle unité est donc z_+, et il est d'ordre 2.
Décomposition en facteurs simples

$$bz^2 + 2az + b = b(z - z_+)(z - z_-).$$

Alors

$$I = \frac{4}{ib^2} \int_{|z|=1} \frac{z}{(z - z_+)^2 (z - z_-)^2}\, dz.$$

Par le théorème des résidus,

$$I = 2\pi i \,\text{Res}\,(f, z_+), \quad f = \frac{4}{ib^2} \frac{z}{(z - z_+)^2 (z - z_-)^2}.$$

Comme le pôle est double,

$$\text{Res}\,(f, z_+) = \frac{4}{ib^2}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z - z_-)^2}\right)\right]_{z=z_+} = \frac{4}{ib^2}\left(\frac{1}{(z_+ - z_-)^2} - \frac{2z_+}{(z_+ - z_-)^3}\right).$$

Or

$$z_+ - z_- = \frac{2\Delta}{b}.$$

Après simplification, on obtient

$$I = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

Exercice 4. (4 points) Calculer l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx,$$

où $n \in \mathbb{N}$, en utilisant le théorème de résidus.

Posons

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{(z-i)^n (z+i)^n}.$$

On considère le contour formé du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle supérieur de rayon R. Comme

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|z|^{2n}}\right),$$

l'intégrale sur le demi-cercle tend vers 0 lorsque $R \to +\infty$.

Le seul pôle dans le demi-plan supérieur est $z = i$, d'ordre n. Par le théorème des résidus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f, i).$$

Or

$$\mathrm{Res}\,(f, i) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{1}{(z+i)^n}\right]_{z=i}.$$

On utilise la formule

$$\frac{d^k}{dz^k}(z+a)^{-n} = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}(z+a)^{-n-k}.$$

Avec $k = n-1$, on obtient

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z+i)^{-n} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}(z+i)^{-2n+1}.$$

Donc

$$\mathrm{Res}\,(f, i) = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{((n-1)!)^2(2i)^{2n-1}}.$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \pi \, \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}.$$

Comme la fonction est paire,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

Finalement,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}$$

Exercice 5. (4 points) Déterminer le nombre de solutions (comptés avec multiplicités) d'équation

$$z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$$

a) dans $D(0,1)$
b) dans $D(0,2)\backslash D(0,1)$
c) dans $\mathbb{C}\backslash D(0,2)$

On utilise le théorème de Rouché pour

$$f(z) = -5z^4, \qquad g(z) = z^7 + z^2 - 2.$$

Sur le cercle $|z| = 1$, on a

$$|f(z)| = 5,$$

et

$$|g(z)| \le |z^7| + |z^2| + 2 = 1 + 1 + 2 = 4.$$

Donc

$$|g(z)| < |f(z)| \qquad \text{sur } |z| = 1.$$

Par le théorème de Rouché, $P = f + g = z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$ et f ont le même nombre de zéros dans $D(0, 1)$. Or $f(z)$ possède exactement 4 zéros (comptés avec multiplicité) dans $D(0, 1)$. Ainsi, $P(z)$ possède 4 zéros dans $D(0, 1)$.

Sur le cercle $|z| = 2$, on considère

$$f(z) = z^7, \qquad g(z) = -5z^4 + z^2 - 2,$$

et on a

$$|f(z)| = 128, \quad |g(z)| \leq 5|z|^4 + |z|^2 + 2 = 86, \quad |g(z)| < |f(z)| \qquad \text{sur } |z| = 2.$$

Par le théorème de Rouché, P et $f(z) = z^7$ ont le même nombre de zéros dans $D(0, 2)$.

Comme z^7 possède 7 zéros dans $D(0, 2)$, le polynôme P possède également 7 zéros dans $D(0, 2)$, dont trois dans l'anneau

$$D(0, 2) \setminus D(0, 1).$$

Il n'y a donc aucun zéro dans $\mathbb{C} \setminus D(0, 2)$.