

# Curriculum vitae détaillé\*

Yohann Le Floch

## Table des matières

<b>1 CV synthétique</b>	<b>2</b>
<b>2 Liste des articles et prépublications</b>	<b>4</b>
<b>3 Liste détaillée des exposés</b>	<b>5</b>
<b>4 Descriptif de ma thèse</b>	<b>6</b>
<b>5 Détails des enseignements</b>	<b>7</b>
<b>6 Présentation de mes travaux de recherche</b>	<b>8</b>
6.1 Contexte : quantification géométrique, opérateurs de Toeplitz . . . . .	8
6.2 Théorie spectrale des opérateurs de Toeplitz en dimension deux . . . . .	9
6.3 Problèmes inverses spectraux . . . . .	13
6.4 Formules d'Euler-MacLaurin pour les polytopes . . . . .	15
<b>7 Projet de recherche</b>	<b>17</b>
7.1 Théorie spectrale inverse semi-classique . . . . .	17
7.2 Quantification de certains systèmes intégrables . . . . .	18
7.3 Quantification et topologie symplectique . . . . .	19

---

\*Ce document est une reproduction presque fidèle (les informations personnelles ont été retirées) de mon CV détaillé pour les candidatures aux postes de maître de conférence de la session 2016. Il représente l'état de mes travaux et projets à l'époque en question, et je ne le laisse en libre accès qu'en guise d'exemple (sur la forme, et non le fond) pour les futur-e-s candidat-e-s; au moment de préparer mes candidatures, j'aurais moi-même aimé pouvoir obtenir plus d'exemples de dossiers en ligne. Je ne prétends pas qu'il s'agisse du modèle à suivre; mon but est simplement de donner une idée de l'allure d'un tel dossier, et je conseille vivement de vous procurer plusieurs CV détaillés distincts et de les comparer.

# 1 Curriculum vitae synthétique

## Informations personnelles

Adresse professionnelle	Mon adresse professionnelle
Adresse française	Mon adresse personnelle en France
Téléphone	+Mon numéro de téléphone (français)
Courrier électronique	Mon adresse mail (pérenne)
Page professionnelle	Mon site professionnel
Date de naissance	Ma date de naissance
Nationalité	Ma nationalité

## Parcours et formation

Octobre 2014-présent	Post-doctorat à l'Université de Tel Aviv, Israël ; avec Leonid Polterovich, financement : bourse ERC Advanced Grant 338809.
Février 2015	Qualification en sections CNU 25 et 26.
2011-2014	Thèse à l'IRMAR, Université Rennes 1, soutenue le 19 juin 2014. Directeurs : Laurent Charles et San Vũ Ngọc. Titre : Théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz 1D.
Juin 2011	Master de mathématiques, Université Paris Diderot-Paris 7.
2010-2011	Préparation et obtention de l'agrégation de mathématiques.
2007-2011	Élève à l'École Normale Supérieure de Rennes <sup>1</sup> .
2004-2007	Classe Préparatoire aux Grandes Écoles (CPGE), Lycée Chateaubriand, Rennes.

## Sujets de recherche

Ma recherche porte essentiellement sur les opérateurs de Berezin-Toeplitz, qui apparaissent dans l'étude de la limite semi-classique de la quantification des variétés symplectiques compactes. Je m'intéresse en particulier aux questions de théorie spectrale, de nature directe et inverse, concernant ces opérateurs. Mon domaine de compétences se situe donc à l'interface entre analyse micro-locale, analyse semi-classique, et géométries symplectique et kählérienne.

## Articles et prépublications

- Articles publiés dans des revues à comité de lecture : 4,
- prépublications : 1,
- notes de cours non publiées : 1.

Une liste détaillée est disponible en section 2.

## Exposés

- Exposés à venir dans des conférences : 1,
- exposés dans des conférences : 5,
- exposés dans des séminaires : 6,
- exposés dans des séminaires étudiants : 4.

---

1. à l'époque Antenne de Bretagne de l'École Normale Supérieure de Cachan.

Le détail de ces interventions est disponible en section 3.

### Enseignement

- 2015-2016 Cours à l'Université de Tel Aviv, Israël.
- 2011-2014 Moniteur à l'École Normale Supérieure de Rennes, et interventions à l'ENSAI.
- 2008-2009 Colleur en CPGE, Lycée Chateaubriand, Rennes.

Voir section 5 pour le détail de ces enseignements.

### Autres activités

- 2014-présent Co-organisateur d'un groupe de travail pour post-doctorants autour de la géométrie symplectique : <https://sites.google.com/site/workingsymplecticseminartau/>.
- 2012-2014 Membre étudiant du conseil scientifique de l'IRMAR.

### Stages de recherche

- 2011 Stage de M2, encadré par Laurent Charles (IMJ, Université Paris 6). *Introduction à la quantification géométrique et sa limite semi-classique.*
- 2009 Stage de deuxième année de l'ENS Rennes, encadré par Alexander Figotin et Ilya Vitebskiy (UC Irvine, États-Unis). *Wave propagation in photonic crystals.*
- 2008 Stage de première année de l'ENS Rennes, encadré par Gérard Le Caër (Institut de Physique de Rennes). *Entropie de permutation et matrices aléatoires.*

### Autres

- Langues parlées : français (langue maternelle), anglais (courant, 985/990 au TOEIC en 2008), espagnol (élémentaire).
- Informatique : programmation en Python et bonne connaissance de Matlab, Maple, R. Bonne maîtrise de  $\text{\LaTeX}$ .

## 2 Liste des articles et prépublications

### Publications dans des revues à comité de lecture

1. [31] Y. Le Floch. Singular Bohr-Sommerfeld conditions for 1D Toeplitz operators : elliptic case. *Comm. Partial Differential Equations*, 39(2) :213–243, 2014,
2. [32] Y. Le Floch. Singular Bohr-Sommerfeld conditions for 1D Toeplitz operators : hyperbolic case. *Anal. PDE*, 7(7) :1595–1637, 2014,
3. [37] Y. Le Floch, Á. Pelayo, and S. Vũ Ngọc. Inverse spectral theory for semiclassical Jaynes–Cummings systems. *Mathematische Annalen*, pages 1–21, 2015. <http://dx.doi.org/10.1007/s00208-015-1259-z>,
4. [36] Y. Le Floch and Á. Pelayo. Euler–MacLaurin formulas via differential operators. *Adv. in Appl. Math.*, 73 :99–124, 2016.

### Travaux soumis à des revues à comité de lecture

1. [35] Y. Le Floch and Á. Pelayo. Spectral asymptotics of semiclassical unitary operators. <http://arxiv.org/abs/1506.02873v2>, 2015.

### Notes de cours non publiées

1. [34] Y. Le Floch. Berezin-Toeplitz operators on compact Kähler manifolds : an introduction. <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWVpbnx5b2hhbm5sZWZsb2NoaG9tZXBhZ2V8Z3g6NDk4NDhkNjAzNzZGU3NA>, 2015

Tous mes travaux (dans leur version avant édition par les journaux) sont disponibles sur ma page personnelle : <https://sites.google.com/site/yohannleflochhomepage/>. Je peux fournir sur demande les versions finales des articles parus.

### 3 Liste détaillée des exposés

#### Exposés à venir dans des conférences

Mai 2016 *Quantum Mechanics meets Symplectic Topology*, Tel Aviv University, Israël.

#### Exposés dans des conférences

- Juillet 2015 *Joint STAMP conference and 9th ICMAT International GMC Summer School on Symplectic Geometry, Classical Mechanics and Interactions with Spectral Theory*, La Cristalera, Espagne.
- Avril 2014 *Rencontre de l'ANR Nosevol*, Université Rennes 1.
- Octobre 2013 *AMS Special Session on Spectral, Index, and Symplectic Geometry*, Washington University, St. Louis, États-Unis.
- Juillet 2013 *Summer school Integrable Systems and Semiclassical Analysis*, EPFL, Lausanne, Suisse.
- Octobre 2012 *Journées Louis Antoine*, Université Rennes 1.

#### Exposés dans des séminaires

- Mars 2016 *Séminaire d'analyse*, LMJL, Université de Nantes.
- Mars 2016 *Séminaire de Physique Mathématique-EDP*, Institut de Mathématiques de Bordeaux.
- Décembre 2015 *Séminaire d'analyse*, IRMA, Université de Strasbourg.
- Mars 2015 *Geometry & Topology seminar*, University of Haifa, Israël.
- Décembre 2014 *Geometry & Dynamics seminar*, Tel Aviv University, Israël.
- Mai 2012 *Mathematical physics seminar*, IMPA, Rio de Janeiro, Brésil.

#### Exposés dans des séminaires pour étudiants

- Février 2015 *Working symplectic seminar*, Tel Aviv University, Israel.
- Novembre 2014 *Working symplectic seminar*, Tel Aviv University, Israel.
- Avril 2014 *Séminaire Landau des jeunes chercheurs en analyse*, Université Rennes 1.
- Décembre 2012 *Séminaire Landau des jeunes chercheurs en analyse*, Université Rennes 1.

## 4 Descriptif de ma thèse

- Titre : Théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz 1D.
  
- Résumé (tel qu'il apparaît dans le manuscrit de thèse) : Dans cette thèse, nous prouvons des résultats de théorie spectrale, directe et inverse, dans la limite semi-classique, pour les opérateurs de Toeplitz auto-adjoints sur les surfaces. Pour les opérateurs pseudo-différentiels, les résultats en question sont déjà connus, et il est naturel de vouloir les étendre aux opérateurs de Toeplitz. Les conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles, qui caractérisent les valeurs propres proches d'une valeur régulière du symbole principal, ont été obtenues il y a quelques années seulement pour les opérateurs de Toeplitz. Notre contribution consiste en l'extension de ces conditions près de valeurs critiques non dégénérées. Nous traitons le cas d'une valeur critique elliptique à l'aide d'une technique de forme normale ; l'opérateur modèle est la réalisation de l'oscillateur harmonique sur l'espace de Bargmann, dont le spectre est bien connu. Dans le cas d'une valeur critique hyperbolique, la forme normale ne suffit plus et nous complétons l'étude en faisant appel à des arguments dus à Colin de Verdière et Parisse, à qui l'on doit le résultat analogue dans le cas pseudo-différentiel. Enfin, nous établissons un résultat de théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz auto-adjoints sur les surfaces ; plus précisément, nous montrons que sous certaines hypothèses génériques, la connaissance du spectre à l'ordre deux dans la limite semi-classique permet de retrouver le symbole principal à symplectomorphisme près. Ce résultat s'appuie en grande partie sur l'écriture des règles de Bohr-Sommerfeld.
  
- Composition du jury :
  - Yves Colin de Verdière, Professeur émérite, Université Joseph Fourier : rapporteur,
  - Steven Zelditch, Professor, Northwestern University (États-Unis) : rapporteur (non présent à la soutenance),
  - Nicolas Lerner, Professeur, Université Pierre et Marie Curie : examinateur,
  - Stéphane Nonnenmacher, Ingénieur-chercheur, CEA Saclay : examinateur,
  - Francis Nier, Professeur, Université Rennes 1 : examinateur,
  - Laurent Charles, Maître de conférences, Université Pierre et Marie Curie : directeur de thèse,
  - San Vũ Ngọc, Professeur, Université Rennes 1 : directeur de thèse.

## 5 Détails des enseignements

Durant l'année scolaire 2008/2009, j'ai dispensé des colles (interrogations orales) en CPGE, en MP\* au Lycée Chateaubriand, à Rennes, à raison d'une heure hebdomadaire. Pendant ma thèse, entre septembre 2011 et juin 2014, j'ai occupé un poste de moniteur à l'École Normale Supérieure de Rennes (ci-après ÉNS Rennes), ce qui m'a permis d'enseigner à des élèves aux profils bien distincts. En effet, je suis intervenu auprès des élèves en première année de l'ÉNS Rennes, ainsi qu'auprès des élèves en troisième année de cette même école dans le cadre de la préparation à l'agrégation de mathématiques. Enfin, dans le cadre d'accords entre l'ÉNS Rennes et l'ENSAI, je suis intervenu auprès des étudiants en première année de cette dernière. Le tableau ci-dessous rassemble les informations sur mes différents enseignements.

Année scolaire	Intitulé	Lieu	Niveau	Forme	Volume hETD
2011/2012	Algèbre linéaire numérique	ÉNS Rennes	1A (L3)	TD	24
	Optimisation et méthodes numériques	ENSAI	1A	TD + TP	18
	Oraux blancs d'agrégation	ÉNS Rennes	3A	Jury	21
	Initiation à $\LaTeX$	ÉNS Rennes	1A (L3)	Cours/TP	4
2012/2013	Espaces vectoriels normés et calcul différentiel	ÉNS Rennes	1A (L3)	TD	36
	Optimisation et méthodes numériques	ENSAI	1A	TD + TP	24
	Oraux blancs d'agrégation	ÉNS Rennes	3A	Jury	8
2013/2014	Espaces vectoriels normés et calcul différentiel	ÉNS Rennes	1A (L3)	TD	36
	Optimisation et méthodes numériques	ENSAI	1A	TD + TP	24
	Oraux blancs d'agrégation	ÉNS Rennes	3A	Jury	7
2015/2016	Berezin-Toeplitz quantization of compact Kähler manifolds	Tel Aviv University	Master	Cours	~ 30

## 6 Présentation de mes travaux de recherche

### 6.1 Contexte : quantification géométrique, opérateurs de Toeplitz

Mes travaux de recherche concernent principalement une certaine classe d'opérateurs, qui apparaissent dans l'étude de la limite semi-classique de la quantification des espaces de phases compacts : les opérateurs de (Berezin-)Toeplitz, introduits par Berezin en 1975 [2] et dont l'analyse microlocale a été initiée par Boutet de Monvel et Guillemin en 1981 [3]. Ces opérateurs comptent des applications diverses, comme en théorie quantique des champs topologique [1, 8, 9, 39], ou en géométries algébrique et kählérienne [20, 38, 49], entre autres. Une revue du sujet est donnée dans l'article [50], qui contient une liste des principales références du domaine.

Ces opérateurs agissent sur des espaces de Hilbert de dimension finie; cette dimension dépend d'un paramètre semi-classique entier, représentant formellement l'inverse de la constante de Planck, destiné à tendre vers  $+\infty$ , et plus précisément elle croît avec ce paramètre. Les opérateurs de Toeplitz sont donc représentés par des matrices de taille croissante, et l'un des enjeux de leur étude est de comprendre le comportement asymptotique des valeurs propres, vecteurs propres, etc., de ces matrices dans la limite semi-classique. Mes travaux portent en grande partie sur des problèmes spectraux, directs ou inverses, pour les opérateurs de Toeplitz. Les problèmes spectraux directs consistent à décrire le spectre d'un opérateur de Toeplitz, ou le spectre conjoint d'une famille de tels opérateurs commutant deux à deux, à l'aide de quantités classiques liées à la géométrie du système physique sous-jacent. Pour les problèmes de type inverse, l'on cherche à déterminer si la donnée du spectre d'un opérateur de Toeplitz ou du spectre conjoint d'une famille d'opérateurs de Toeplitz commutant deux à deux (ou plutôt, de la suite des spectres ou des spectres conjoints, dépendant du paramètre semi-classique) permet de retrouver le système classique sous-jacent.

**Quantification géométrique.** Dans la formulation hamiltonienne de la mécanique classique, l'espace des phases est muni d'une structure de variété symplectique, et les trajectoires d'un système physique sont celles du flot du champ de vecteurs hamiltonien associé à l'énergie totale de celui-ci. En mécanique quantique, les états sont représentés par des vecteurs unitaires d'un espace de Hilbert, et les observables quantiques correspondent à des opérateurs linéaires sur cet espace. Partant d'un système classique, on souhaite alors en construire un modèle quantique, tout en traduisant les propriétés agréables du formalisme hamiltonien : dynamique donnée par un flot (flot hamiltonien dans le cas classique, flot d'un semi-groupe unitaire dans le cas quantique), quantités conservées données par les observables commutant avec l'énergie (au sens du crochet de Poisson du côté classique, du commutateur d'opérateurs au niveau quantique), etc. Dans le cas où l'espace des phases est un fibré cotangent  $T^*X$ , cette procédure mène à l'introduction des opérateurs pseudo-différentiels sur  $L^2(X)$ , qui ont été, et sont toujours, intensément étudiés depuis leur introduction par Duistermaat et Hörmander [28, 22] dans le cas homogène et les travaux d'Helfffer, Robert, Sjöstrand et bien d'autres dans le cadre d'une théorie avec petit paramètre.

Il existe cependant des situations physiques dans lesquelles l'espace des phases n'est pas un fibré cotangent, mais une variété symplectique compacte; on peut par exemple penser au spin classique dont l'espace des phases est la sphère de dimension deux, ou encore aux systèmes obtenus par réduction symplectique à partir de systèmes définis sur des fibrés cotangents et présentant des symétries, etc. Dans ce cas, la procédure de quantification usuelle pour les fibrés cotangents ne s'applique plus, et la quantification géométrique, introduite indépendamment par Kostant et Souriau [30, 51], offre une solution à ce problème : les espaces de Hilbert de la mécanique quantique sont alors des espaces de sections de certains fibrés en droites complexes. Les opérateurs qui apparaissent dans l'étude de la limite semi-classique de la quantification géométrique sont les opérateurs de Toeplitz.



**Opérateurs de Toeplitz.** Soit  $(M, \omega, j)$  une variété kählérienne compacte, i.e. munie d'une forme symplectique  $\omega$  et d'une structure complexe intégrable  $j$  compatible avec  $\omega$ , et supposons que la classe de cohomologie  $[\omega/(2\pi)]$  soit intégrale. Il existe alors un fibré préquantifiant  $L \rightarrow M$ , c'est-à-dire un fibré en droites complexes holomorphe et hermitien dont la courbure de la connexion de Chern est égale à  $-i\omega$ . Pour chaque valeur de  $k \in \mathbb{N}^*$ , l'espace d'états de la mécanique quantique est l'espace de Hilbert  $H^0(M, L^{\otimes k})$  des sections holomorphes du fibré  $L^{\otimes k} \rightarrow M$ , muni du produit scalaire naturellement donné par intégration de la forme hermitienne  $h_k$  induite sur  $L^{\otimes k}$  par celle dont  $L$  est équipé contre la mesure de Liouville  $\mu_M = |\omega^{\wedge n}|/n!$  :

$$\langle \phi, \psi \rangle_k = \int_M h_k(\phi, \psi) \mu_M.$$

Cependant, il s'avère qu'il est plus pertinent de tensoriser par un fibré de demi-formes  $\delta$ , c'est-à-dire une racine carrée du fibré canonique, et donc de considérer des sections du fibré  $L^{\otimes k} \otimes \delta$ ; en pratique, comme un tel fibré n'existe pas forcément globalement, on tensorise plutôt par un fibré en droites hermitien auxiliaire  $K$  qu'on écrit localement sous la forme  $K = \delta \otimes L_1$ .

Les opérateurs de Toeplitz sont les suites  $(T_k)_{k \geq 1}$  de la forme

$$T_k = \Pi_k f(\cdot, k) \Pi_k + R_k$$

où  $\Pi_k : L^2(M, L^{\otimes k} \otimes K) \rightarrow \mathcal{H}_k$  est le projecteur orthogonal de l'espace des sections de carré intégrable de  $L^{\otimes k} \otimes K \rightarrow M$  dans  $\mathcal{H}_k = H^0(M, L^{\otimes k} \otimes K)$ ,  $R_k$  est un opérateur dont la norme est un  $\mathcal{O}(k^{-\infty})$  (c'est-à-dire un  $\mathcal{O}(k^{-N})$  pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ), et  $f(\cdot, k)$  est une suite de fonctions de  $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$  admettant un développement asymptotique de la forme  $f(\cdot, k) \sim \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} f_\ell$  pour la topologie  $\mathcal{C}^\infty$ . Le premier terme  $f_0$  dans ce développement est appelé symbole principal de  $T_k$ .

Je résume mes travaux dans les chapitres suivants. Dans les articles [31, 32], j'ai obtenu des résultats sur la théorie spectrale des opérateurs de Toeplitz dans le cas où  $M$  est une surface. J'ai également donné deux résultats de théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz : dans le cas d'une surface, dans ma thèse [33], et dans le cas d'un système semi-torique en dimension quatre, dans l'article [37], en collaboration avec Álvaro Pelayo et San Vũ Ngọc. Dans la prépublication [35], qui est un travail en collaboration avec Álvaro Pelayo, nous avons étudié le spectre conjoint d'opérateurs semi-classiques unitaires commutant deux à deux. Enfin, l'article [36], en collaboration avec Álvaro Pelayo, traite de formules d'Euler-MacLaurin sur les polytopes de Delzant, notre intérêt pour ces formules provenant en partie de la quantification géométrique des variétés toriques.

## 6.2 Théorie spectrale des opérateurs de Toeplitz en dimension deux

Plaçons nous dans le cas où  $M$  est une surface connexe compacte; dans ce cas, il existe toujours un fibré de demi-formes  $\delta \rightarrow M$ , et l'on considère donc des opérateurs de Toeplitz agissant sur  $\mathcal{H}_k = H^0(M, L^{\otimes k} \otimes \delta)$ . Je me suis intéressé à la problématique suivante : étant donné un opérateur de Toeplitz auto-adjoint  $A_k$  sur  $M$ , comment décrire le comportement asymptotique de ses valeurs propres? Il s'avère que cette description varie radicalement selon que l'on regarde des valeurs propres proches d'une valeur régulière ou singulière du symbole principal  $a_0$ . Charles [5] a explicité cette description dans le cas où  $E$  est une valeur régulière de  $a_0$  : il existe  $\eta > 0$  tel que  $\text{Sp}(A_k) \cap [E - \eta, E + \eta]$  est, à  $\mathcal{O}(k^{-\infty})$  près, la réunion de  $N$  familles  $\sigma_j$ , avec  $N$  le nombre de composantes connexes du niveau  $a_0^{-1}(E)$ , caractérisées par des équations du type

$$\lambda \in \sigma_j \iff g^{(j)}(\lambda, k) \in 2\pi k^{-1} \mathbb{Z}, \quad (1)$$

où  $g^{(j)}(\cdot, k)$  est une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  d'une variable réelle admettant un développement asymptotique de la forme  $g^{(j)}(\cdot, k) \sim \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} g_\ell^{(j)}$  dont les coefficients sont des quantités

géométriques associées à  $a_0$ , appelées actions. Ces conditions de sélection des valeurs propres sont connues sous le nom de « conditions de Bohr-Sommerfeld ». En pratique, on sait expliciter les deux premiers termes  $g_0^{(j)}$ ,  $g_1^{(j)}$  du développement asymptotique de  $g^{(j)}(\cdot, k) : g_0^{(j)}$ , l'action principale associée à la composante connexe  $\mathcal{C}_j(E)$  d'indice  $j$  du niveau  $a_0^{-1}(E)$ , est l'holonomie du transport parallèle le long de  $\mathcal{C}_j(E)$  dans  $L$ , tandis que le terme  $g_1^{(j)}$  est donné par

$$g_1^{(j)}(E) = \int_{\mathcal{C}_j(E)} \kappa_E + \epsilon^{(j)} \pi$$

où  $\kappa_E$  est la 1-forme sur  $\mathcal{C}_j(E)$  caractérisée par  $\kappa_E(X_{a_0}) = -a_1$  ( $a_1$  est le symbole sous-principal de  $A_k$  pour un calcul symbolique bien choisi, et  $X_{a_0}$  est le champ de vecteurs hamiltonien associé à  $a_0$ ) et  $\epsilon^{(j)} \in \{0, 1\}$  est un indice associé au fibré de demi-formes (qui rappelle l'indice de Maslov dans le cas pseudo-différentiel).

J'ai cherché à comprendre ce que devient cette description dans le cas où  $E$  est une valeur critique non dégénérée de  $a_0$ . Deux situations se présentent alors : le cas d'une valeur critique de type elliptique, en d'autres termes un extremum local, et le cas d'une valeur critique de type hyperbolique, c'est-à-dire dont le niveau contient des points selle. Près d'une valeur elliptique, on s'attend à ce que la description du spectre ne varie pas énormément, car la topologie des niveaux ne change pas brutalement : au passage du niveau critique, une ou plusieurs composantes connexes doivent disparaître après avoir dégénéré en un point (voir figure 1). En revanche, près d'un point hyperbolique, la topologie est beaucoup plus complexe : par exemple pour un seul point critique sur le niveau hyperbolique, une composante connexe se divise en deux composantes connexes au passage de ce dernier (voir figure 2); on s'attend donc à ce que la description du spectre reflète cette complexité. En outre, cette complexité doit augmenter avec le nombre de points critiques sur le niveau hyperbolique.

**Cas d'un extremum local.** J'ai d'abord traité le cas d'un extremum local, dans l'article [31]. J'ai obtenu les conditions de Bohr-Sommerfeld pour un opérateur de Toeplitz auto-adjoint près d'une singularité elliptique en dimension deux, par le biais d'une réduction à un opérateur modèle, qui est la réalisation de l'oscillateur harmonique dans les espaces de Bargmann. Cela m'a amené à introduire des classes générales d'opérateurs de Toeplitz sur le plan complexe et à généraliser les désormais classiques opérateurs intégraux de Fourier, qui avaient été transposés par Boutet de Monvel et Guillemin [3] (pour le cas homogène) puis Zelditch [55] suivi par Charles [5, 6] (pour le cas semi-classique) au cadre Toeplitz, dans le but de me servir d'une méthode de forme normale; en effet, près d'un point elliptique, le symbole principal est localement symplectomorphe à l'oscillateur harmonique classique sur  $\mathbb{R}^2$ , et l'introduction d'un opérateur intégral de Fourier quantifiant le symplectomorphisme en question permet de traduire cette forme normale au niveau des opérateurs. Le résultat est que les conditions de Bohr-Sommerfeld elliptiques peuvent s'interpréter comme une « limite » des conditions usuelles, au sens où les valeurs propres proches de la valeur singulière sont sélectionnées par une équation analogue à (1) et dont les deux premiers coefficients (les termes principal et sous-principal dans le développement) sont les mêmes que dans celle-ci. Dans le contexte des opérateurs ( $\hbar$ -)pseudo-différentiels, ce cas avait été traité par Colin de Verdière dans [12].

Plus précisément, soit  $A_k$  un opérateur de Toeplitz auto-adjoint sur  $M$ ; son symbole (normalisé)  $a_0 + \hbar a_1 + \dots$  est à valeurs réelles. Pour simplifier le propos, supposons que le symbole principal  $a_0$  admet un minimum global au point  $m_0 \in M$ , avec  $a_0(m_0) = 0$ . Notons  $\lambda_k^{(1)} \leq \lambda_k^{(2)} \leq \dots \leq \lambda_k^{(j)} \leq \dots$  les valeurs propres de  $A_k$ . Le résultat principal de cet article est le suivant.

**Théorème.** *Il existe  $E^0 > 0$ , une suite  $f(\cdot, k)$  de fonctions de  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  admettant un développement asymptotique de la forme  $f(\cdot, k) \sim \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} f_\ell$  pour la topologie  $C^\infty$ , et un entier positif  $k_0$  tel que pour*

tout entier  $N \geq 1$  et pour tout  $E \leq E^0$ , il existe une constante  $C_N > 0$  telle que pour  $k \geq k_0$  :

$$\left( \lambda_k^{(j)} \leq E \text{ ou } E_k^{(j)} \leq E \right) \Rightarrow \left| \lambda_k^{(j)} - E_k^{(j)} \right| \leq C_N k^{-N}$$

où

$$E_k^{(j)} = f\left(k^{-1}\left(j + \frac{1}{2}\right), k\right), \quad j \in \mathbb{N}.$$

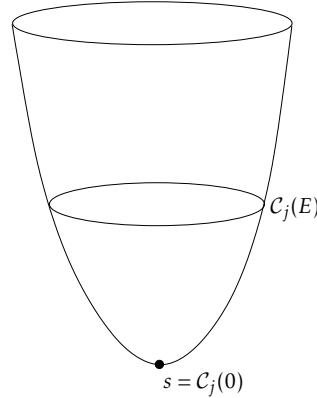


FIGURE 1 – Voisinage d'un point elliptique

Dès lors qu'on sait expliciter les  $f_\ell$ ,  $\ell \geq 0$ , cela permet d'obtenir des développements asymptotiques à tout ordre pour les valeurs propres de  $A_k$  plus petites que  $E^0$ . Il s'avère que  $2\pi f(\cdot, k)$  est construite comme l'inverse local d'une suite  $g(\cdot, k)$  qui admet également un développement asymptotique  $g(\cdot, k) \sim \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} g_\ell$  pour la topologie  $\mathcal{C}^\infty$ , et les premiers termes  $g_0, g_1$  sont les mêmes que ceux du développement asymptotique de  $g^{(1)}$  (il n'y a qu'une seule composante connexe ici) dans l'équation (1). Ce résultat permet de retrouver les conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles loin de la singularité, jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(k^{-2})$ . J'ai testé ce résultat numériquement pour un exemple explicite d'opérateur de Toeplitz sur le tore.

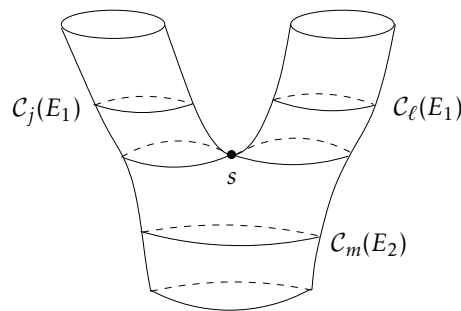


FIGURE 2 – Voisinage d'un point hyperbolique

**Cas d'une valeur hyperbolique.** Dans l'article [32], j'ai traité le cas d'une singularité hyperbolique avec plusieurs points critiques (toujours pour un opérateur de Toeplitz auto-adjoint en dimension deux), étendant à cette occasion des techniques dues à Colin de Verdière, Parisse et Vũ Ngọc [15, 16, 17] au cas des opérateurs de Toeplitz. Les formes normales jouent encore un rôle crucial dans ce contexte, mais ne sont plus suffisantes pour écrire les règles de Bohr-Sommerfeld,

car les états propres ne sont pas localisés dans un voisinage du point critique où l'on peut écrire la forme normale (voir figure 3). Les conditions de sélection des valeurs propres impliquent des régularisations des quantités géométriques qui apparaissent dans le cas régulier ; par exemple, l'intégrale de la forme sous-principale présente une divergence logarithmique. Au cours de ce travail, j'ai été amené à étendre l'approche faisceautique proposée par Vũ Ngọc [53] pour les opérateurs pseudo-différentiels au cadre des opérateurs de Toeplitz.

Supposons que zéro est une valeur critique du symbole principal  $a_0$  de l'opérateur de Toeplitz auto-adjoint  $A_k$ , que le niveau  $\Gamma_0 = a_0^{-1}(0)$  est connexe et que tous les points critiques sur  $\Gamma_0$  sont non dégénérés et de type hyperbolique. Soit  $S = \{s_j\}_{1 \leq j \leq n}$  l'ensemble de ces points critiques.  $\Gamma_0$  est un graphe compact plongé dans  $M$ , et chacun de ses sommets est de degré 4. À chaque sommet  $s_j$ , on note  $e_m$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$ , les arêtes locales, étiquetées en suivant l'ordre cyclique (1, 3, 2, 4) par rapport à l'orientation de  $M$  près de  $s_j$ , et de sorte que  $e_1, e_2$  (respectivement  $e_3, e_4$ ) correspondent aux variétés instables (respectivement stables) locales. On coupe  $n + 1$  arêtes de  $\Gamma_0$ , chacune correspondant à un cycle  $\gamma_i$  d'une base  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1})$  de  $H_1(\Gamma_0, \mathbb{Z})$ , de sorte que le graphe final soit un arbre maximal  $T$ . Le résultat principal de cet article est le suivant :

**Théorème.** *Zéro est une valeur propre de  $A_k$  à  $\mathcal{O}(k^{-\infty})$  près si et seulement si le système suivant de  $3n + 1$  équations linéaires d'inconnues  $(x_\alpha \in \mathbb{C}_k)_{\alpha \in \{\text{arêtes de } T\}}$  possède une solution non triviale :*

1. *si les arêtes  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  se rencontrent au sommet  $s_j$ , alors*

$$\begin{pmatrix} x_{\alpha_3} \\ x_{\alpha_4} \end{pmatrix} = T_j \begin{pmatrix} x_{\alpha_1} \\ x_{\alpha_2} \end{pmatrix},$$

2. *si  $\alpha$  et  $\beta$  sont les extrémités d'un cycle coupé  $\gamma_j$ , alors*

$$x_\alpha = \exp(ik\theta(\gamma_j, k))x_\beta,$$

*avec l'orientation suivante :  $\gamma_j$  peut être représenté par un chemin fermé commençant sur l'arête  $\alpha$  et se terminant sur l'arête  $\beta$ .*

*En outre,  $T_j$  est une matrice dépendant seulement d'un invariant semi-classique  $\varepsilon_j(k)$  du système au point singulier  $s_j$ , et  $\theta(\gamma, k)$  admet un développement asymptotique en puissances négatives de  $k$ . Les deux premiers termes de ce développement impliquent des régularisations des invariants géométriques (actions et indice) apparaissant dans les conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles.*

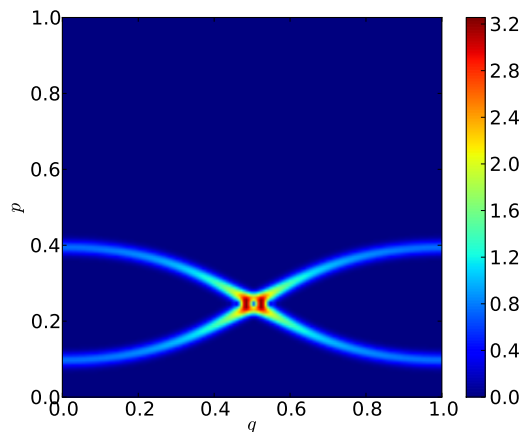


FIGURE 3 – Module d'un vecteur propre du quantifié de la fonction hauteur sur le tore, associé à la valeur propre la plus proche d'un niveau critique hyperbolique,  $k = 500$ .

Pour l'analyse spectrale de  $A_k$  près de la valeur singulière, on utilise ce théorème en remplaçant  $A_k$  par  $A_k - E$  pour  $E$  variant dans un voisinage de taille fixe de celle-ci. Cette analyse permet de retrouver les conditions de Bohr-Sommerfeld régulières pour des valeurs propres éloignées de l'énergie critique. J'ai fourni une validation numérique de mes résultats à travers l'étude de trois exemples aux topologies variées; deux sur le tore, et un sur la sphère de dimension deux.

Ce résultat est similaire à celui obtenu par Colin de Verdière et Parisse [15] dans le cas des opérateurs pseudo-différentiels, mais la nouveauté réside dans le cadre de travail qu'il a été nécessaire de mettre en place afin d'étendre leurs techniques au cas des opérateurs de Toeplitz, et bien sûr dans les invariants géométriques spécifiques à ce contexte.

### 6.3 Problèmes inverses spectraux

Un autre pan de ma recherche est dédié à l'étude de problèmes spectraux inverses pour les opérateurs de Toeplitz et pseudo-différentiels. Il s'agit de comprendre en quelle mesure le spectre d'un tel opérateur, ou le spectre conjoint d'une famille de tels opérateurs commutant deux à deux, permet de reconstruire le système classique sous-jacent. Une stratégie générale consiste à s'intéresser à des classes de systèmes intégrables dont la classification symplectique est bien établie, et à détecter les invariants symplectiques sur le spectre.

**Opérateurs de Toeplitz en dimension deux.** Dans ma thèse [33], j'ai obtenu un résultat de théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz sur les surfaces. Dans le cadre pseudo-différentiel, Vũ Ngọc a récemment montré [54] que la description précise du spectre grâce aux conditions de Bohr-Sommerfeld permet, en dimension deux, de retrouver la dynamique classique à partir du spectre. J'ai prouvé un résultat analogue dans le cadre Toeplitz : étant donné un opérateur de Toeplitz auto-adjoint  $A_k$  de symbole principal  $a_0$  sur une surface  $M$ , la donnée du spectre de  $A_k$  à  $\mathcal{O}(k^{-2})$  près détermine  $M$  et  $a_0$  à symplectomorphisme près, modulo des hypothèses génériques sur  $a_0$ . Ce travail repose sur deux outils essentiels : les conditions de Bohr-Sommerfeld singulières pour les opérateurs de Toeplitz sur les surfaces (voir section précédente) ainsi que la classification symplectique des systèmes intégrables en dimension deux via le graphe de Reeb (voir figure 6.3) décoré fournie par Dufour, Molino et Toulet [21].

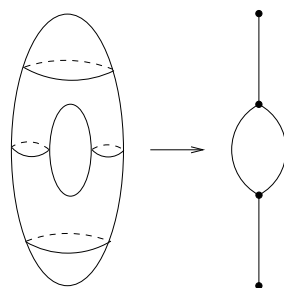


FIGURE 4 – Le graphe de Reeb de la fonction hauteur sur  $\mathbb{T}^2$ . Celui-ci est naturellement muni d'une mesure induite par  $\omega$ , et le graphe de Reeb décoré est obtenu en y attachant les longueurs des arêtes et des séries de Taylor aux sommets trivalents.

Soit  $(M, \omega)$  une variété kählérienne compacte connexe de dimension deux, munie d'un fibré pré-quantifiant et éventuellement d'un fibré en droites holomorphe et hermitien auxiliaire. Soit  $A_k$  un opérateur de Toeplitz auto-adjoint sur  $M$ , dont le symbole principal  $a_0$  est une fonction de Morse simple, c'est-à-dire que tous les points critiques de  $a_0$  sont non dégénérés et que deux d'entre eux ne peuvent pas avoir la même image par  $a_0$ . On appelle *type symplectique* de  $(M, a_0)$  la classe d'équi-

valence de ce couple pour la relation «  $(M, a_0)$  équivaut à  $(\tilde{M}, \tilde{a}_0)$  si et seulement s'il existe un symplectomorphisme  $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$  tel que  $a_0 = \tilde{a}_0 \circ \varphi$  ». J'ai démontré le théorème suivant.

**Théorème.** *Sous certaines hypothèses génériques, la connaissance du spectre de  $A_k$  modulo  $\mathcal{O}(k^{-2})$  détermine le type symplectique de  $(M, a_0)$ .*

En particulier, la connaissance du spectre approché entraîne celle de la dynamique classique sous-jacente. Les hypothèses en question font notamment intervenir une condition de transversalité pour les périodes du système classique.

**Systèmes semi-toriques en dimension quatre.** On peut se poser le même type de questions en dimension supérieure. Récemment, Charles, Pelayo et Vũ Ngọc [10] ont prouvé que le spectre conjoint d'un système intégrable quantique torique d'opérateurs de Toeplitz détermine le système intégrable classique sous-jacent. L'idée de la preuve est que le spectre conjoint permet de retrouver l'image de l'application moment du système classique, le polytope de Delzant du système, qui classe les systèmes intégrables toriques à symplectomorphisme près.

Dans l'article [37], en collaboration avec Álvaro Pelayo et San Vũ Ngọc, nous nous sommes intéressés au cas des systèmes semi-toriques. Plus précisément, nous avons obtenu un résultat de théorie spectrale inverse, cette fois-ci en dimension quatre (dans le cadre d'une quantification axiomatique englobant à la fois le cas des opérateurs pseudo-différentiels et celui des opérateurs de Toeplitz) pour deux opérateurs qui commutent et dont les symboles principaux forment un système intégrable de type semi-torique. Ceux-ci ont la particularité de ne posséder que des singularités à blocs elliptiques et foyer-foyer. Nous avons montré que la connaissance du spectre conjoint d'un tel système dans la limite semi-classique permet de retrouver la dynamique classique. Ce travail s'est appuyé sur la classification symplectique de ces systèmes obtenue récemment par Pelayo et Vũ Ngọc [43], encodée par cinq invariants, et sur un résultat de théorie inverse semi-global au voisinage d'une singularité foyer-foyer démontré par ces deux mêmes auteurs [44].

Le résultat de ce travail est le suivant. Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique connexe de dimension quatre. Un système intégrable  $F = (J, H) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  est dit semi-torique si  $J$  est l'application moment pour une action hamiltonienne fidèle de  $\mathbb{S}^1$  et est une application propre, et si toutes les singularités de  $F$  sont non dégénérées et sans composante hyperbolique. Un système intégrable quantique de type semi-torique est la donnée de deux opérateurs qui commutent et dont les symboles principaux respectifs forment un système intégrable semi-torique.

**Théorème.** *Soit  $(P_{\hbar}, Q_{\hbar})$  un système intégrable quantique de type semi-torique dont le système intégrable formé par les symboles principaux possède une unique singularité foyer-foyer, et pour lequel le spectre près des valeurs régulières est donné par les conditions de Bohr-Sommerfeld. Alors la connaissance du spectre conjoint de  $(P_{\hbar}, Q_{\hbar})$  modulo  $\mathcal{O}(\hbar^2)$  entraîne celle des symboles principaux à isomorphisme de systèmes semi-toriques près.*

La notion d'isomorphisme évoquée dans ce théorème est la suivante : les systèmes semi-toriques  $(M_1, \omega_1, F_1 := (J_1, H_1))$  et  $(M_2, \omega_2, F_2 := (J_2, H_2))$  sont isomorphes s'il existe un symplectomorphisme  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  tel que  $\varphi^*(J_2, H_2) = (J_1, h(J_1, H_1))$  pour une certaine fonction  $h$  de classe  $C^\infty$  et vérifiant la condition  $\frac{\partial h}{\partial H_1} > 0$ .

**Opérateurs semi-classiques unitaires.** Dans l'article [41], Pelayo, Polterovich et Vũ Ngọc ont proposé une définition axiomatique des opérateurs semi-classiques, englobant à la fois les opérateurs  $\hbar$ -pseudo-différentiels et de Berezin-Toeplitz auto-adjoints, et ont montré que le spectre conjoint d'un système intégrable quantique, c'est-à-dire une famille d'opérateurs semi-classiques commutant deux à deux et dont les symboles principaux forment un système intégrable, converge vers l'enveloppe convexe de l'image de l'application moment du système classique sous-jacent dans la limite

semi-classique. Ce résultat fournit une seconde preuve du fait que deux systèmes toriques quantiques dont les spectres conjoints coïncident dans la limite semi-classique proviennent du même système torique classique. Dans le travail [35], en collaboration avec Álvaro Pelayo, nous avons étendu la définition ci-dessus pour inclure le cas des opérateurs non nécessairement auto-adjoints, et nous avons étudié la convergence du spectre conjoint d'un système d'opérateurs semi-classiques unitaires commutant deux à deux dans la limite semi-classique. Notre motivation provient du fait qu'une action de tore symplectique mais non hamiltonienne admet une application moment à valeurs dans le tore [42], et les opérateurs unitaires en question sont des candidats pour quantifier cette application moment. La difficulté principale provient du fait que le spectre conjoint d'une telle famille d'opérateurs unitaires ainsi que l'image de son symbole principal conjoint sont des parties d'un tore. Nous avons donc introduit une notion « d'enveloppe convexe » pour des parties du tore, et montré qu'à partir de la famille des enveloppes convexes des spectres conjoints, l'on peut retrouver l'image de l'application moment dont les composantes sont les symboles principaux.

#### 6.4 Formules d'Euler-MacLaurin pour les polytopes

Les formules d'Euler-MacLaurin sont des expressions qui servent à approcher des sommes de Riemann de fonctions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  de la forme

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap N\Delta} f\left(\frac{k}{N}\right)$$

où  $\Delta$  est un polytope, en termes de  $f$  et de ses dérivées, et possèdent des applications potentielles aux opérateurs de Toeplitz [25, 56, 4]. En collaboration avec Álvaro Pelayo, dans l'article [36], nous avons montré comment retrouver de manière élémentaire des formules d'Euler-MacLaurin sur des polytopes de Delzant en dimension inférieure ou égale à trois. Ces formules fournissent un développement asymptotique pour les sommes de Riemann de fonctions définies sur un tel polytope, en termes d'intégrales de la fonction et de ses dérivées successives sur les différentes faces du polytope. Ces résultats avaient déjà été obtenus par Tate [52] dans un cadre plus général mais nous avons privilégié une approche qui nous paraît beaucoup plus élémentaire. Nous avons également fourni des exemples en dimension deux : un exemple où le développement asymptotique en question est fini et où nous calculons tous ses coefficients, et un exemple où nous proposons une validation numérique de nos résultats. Notre résultat principal est le suivant :

**Théorème.** Soit  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Alors

(i) Si  $W$  est un « dièdre » régulier de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , la somme de Riemann

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap NW} f\left(\frac{k}{N}\right)$$

est égale modulo  $\mathcal{O}(N^{-\infty})$  à

$$\sum_{q \geq 0} N^{-q} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = q}} C(W, \alpha) \int_{\bigcap_{\substack{1 \leq i \leq d \\ \alpha_i > 0}} \mathcal{H}_i} D^{q-v(\alpha)} f \cdot v_{\alpha-r(\alpha)},$$

où l'intégrale est prise sur  $W$  si l'intersection est vide, et l'intégrale sur un point signifie l'évaluation en ce point (je renvoie à [36] pour les définitions précises des termes de cette formule).

(ii) Si  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \{1, 2, 3\}$ , est un polytope de Delzant de dimension  $n$  à sommets dans  $\mathbb{Z}^n$ , alors pour tout  $q \geq 1$  et toute face  $F \in \mathcal{F}_m$  (ensemble des faces de codimension  $m$  de  $\Delta$ ) avec  $m \leq q$ , il existe

un opérateur différentiel linéaire  $R_q(F, \cdot)$  de degré  $q - m$  dépendant seulement de  $F$  et impliquant uniquement des dérivées de  $f$  dans des directions normales à  $F$  tel que

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap N\Delta} f\left(\frac{k}{N}\right) = \int_{\Delta} f + \sum_{q \geq 1} N^{-q} \sum_{\substack{1 \leq m \leq q \\ F \in \mathcal{F}_m}} \int_F^{\star} R_q(F, f) + \mathcal{O}(N^{-\infty}).$$

De plus, nous avons complètement explicité ce développement dans le cas  $n = 2$  (le cas  $n = 1$  étant le cas classique bien connu).



## 7 Projet de recherche

Je propose ici quelques idées de recherche que je compte explorer à l'avenir. Ce projet se compose de trois grands axes de réflexion concernant les opérateurs de Berezin-Toeplitz. Ma première piste de travail concerne la théorie spectrale inverse semi-classique de ces opérateurs (et éventuellement des opérateurs pseudo-différentiels), et constitue une suite directe de mes travaux. La seconde direction que je propose d'explorer est l'application de ces opérateurs à l'étude de la quantification de systèmes intégrables concrets issus de la physique et de la chimie. Le dernier axe de travail présenté dans ce projet se rapporte à l'étude des liens entre certains objets et résultats de topologie symplectique et certains phénomènes de nature quantique.

### 7.1 Théorie spectrale inverse semi-classique

**CONTEXTE.** Les problèmes inverses spectraux forment un domaine bien établi et très populaire depuis la fameuse question de Kac [29] sur le spectre du laplacien dans un domaine du plan. Ces questions comptent de nombreuses applications (par exemple en sismologie, spectroscopie, tomographie, etc.) et récemment, des résultats ont été obtenus dans la limite semi-classique [14, 13, 57, 54, 10, 44, 37]. En outre, de tels problèmes forment un pan important du programme de classification symplectique et spectrale des systèmes intégrables récemment proposé par Pelayo et Vũ Ngọc [40]. Je propose ci-dessous quelques-unes des questions m'intéressant particulièrement.

**QUELQUES PROBLÈMES PRÉCIS.** Comme expliqué précédemment (voir section 6.3), j'ai montré dans ma thèse [33] que dans le cas d'un opérateur de Toeplitz sur une surface, dont le symbole principal est une fonction de Morse simple, et moyennant certaines hypothèses génériques, la donnée du spectre modulo  $\mathcal{O}(\hbar^2)$  détermine la surface et le symbole principal à symplectomorphisme près. Un résultat analogue avait été obtenu par Vũ Ngọc [54] dans le cadre pseudo-différentiel. Ces travaux se sont appuyés sur la classification symplectique à l'aide du graphe de Reeb décoré. Une extension naturelle de ces travaux serait de comprendre ce qu'il se passe lorsque l'on relâche les hypothèses sur le symbole principal. En effet, cela peut être nécessaire lorsque l'on étudie des **systèmes possédant des symétries** (on peut par exemple penser, dans le cadre pseudo-différentiel, à l'opérateur de Schrödinger pour un potentiel de type double puits symétrique). Le simple fait d'autoriser la présence de plusieurs points critiques sur un même niveau singulier complique le problème, car de nouveaux invariants symplectiques apparaissent sur le graphe de Reeb, et il n'est pas clair que ceux-ci puissent être déduits du spectre. L'un des problèmes est que les invariants en question ne sont pas très maniables en l'état, et un travail préliminaire serait d'en donner une version plus flexible.

Les résultats précédents ont pu être obtenus grâce à deux ingrédients essentiels : d'une part la **classification symplectique** des systèmes intégrables sur les surfaces, et d'autre part la description précise du spectre de l'opérateur à travers les **conditions de Bohr-Sommerfeld**, que j'ai obtenues pour les cas singuliers [31, 32] dans le contexte Toeplitz. En dimension supérieure, on est encore loin de disposer de ces deux outils en toute généralité ; c'est pourquoi une première étape est de se restreindre à des cas pour lesquels la classification symplectique et la description du spectre sont bien connues. En ce sens, les systèmes toriques forment sans doute la classe de systèmes la plus simple : d'une part les singularités d'un tel système sont uniquement elliptiques, et la contribution de telles singularités au spectre est bien comprise, d'autre part la classification symplectique des variétés toriques est bien connue depuis les travaux de Delzant [19]. Il n'est donc pas surprenant que les premiers résultats inverses en toute dimension concernent ce cas torique [10]. Une généralisation raisonnable de ces systèmes est donnée par les systèmes semi-toriques, pour lesquels on proscrit les singularités à composantes hyperboliques, et qui admettent des singularités de type

foyer-foyer<sup>1</sup>; avec Álvaro Pelayo et San Vũ Ngọc [37], nous avons obtenu un résultat inverse pour ces systèmes, dans le cas d'une seule singularité foyer-foyer. Nous comptons étendre ce résultat au cas de **plusieurs singularités foyer-foyer**, et il s'agira alors de comprendre comment retrouver sur le spectre un invariant symplectique appelé « twisting index », une famille de nombres entiers quantifiant la manière dont les topologies aux voisinages des fibres foyer-foyer sont reliées. Pour le moment, la définition de cet invariant ne permet apparemment pas de comprendre simplement comment le retrouver à partir du spectre conjoint, et il serait intéressant d'en donner une définition équivalente plus maniable. De plus, d'autres problèmes se posent logiquement dans la continuité de ces travaux, comme par exemple l'étude des **systèmes semi-toriques en dimension supérieure**, ou encore de systèmes comportant des **singularités hyperboliques en dimension quatre**. Toutefois, ces objectifs ne sont sans doute pas atteignables à court terme car la classification symplectique de tels systèmes n'est pas encore disponible.

Dans ce qui précède, le problème se résumait à comprendre dans quelle mesure le spectre permet de retrouver la dynamique classique dans une classe de systèmes donnés : la classe des fonctions de Morse pour le cas des surfaces, la classe des systèmes intégrables semi-toriques en dimension quatre, etc. Cependant, on peut naturellement se demander **si l'appartenance à une classe donnée peut se détecter sur le spectre conjoint**. Par exemple, peut-on décider si un système intégrable est torique à travers la donnée du spectre conjoint de son homologue quantique? Comme corollaire des résultats de Pelayo, Polterovich et Vũ Ngọc [41], on sait que pour un système torique, le spectre conjoint converge, dans la limite semi-classique, vers l'image de l'application moment, qui est un polytope très particulier, dit de Delzant; on peut s'interroger sur la réciproque : si le spectre conjoint converge vers un polytope de Delzant, le système est-il torique? Pour aller encore plus loin, on peut même se demander s'il est envisageable de **détecter l'intégrabilité** (l'indépendance presque partout des différentielles) **sur le spectre conjoint** d'opérateurs semi-classiques qui commutent deux à deux. Dans un projet à moyen terme en collaboration avec Álvaro Pelayo, nous envisageons d'explorer cette gamme de questions.

## 7.2 Quantification de certains systèmes intégrables

Dans cette piste de réflexion, je propose de m'intéresser à l'application des opérateurs de Berezin-Toeplitz à la meilleure compréhension de la quantification de certains systèmes intégrables. Ce programme présente deux aspects complémentaires : d'une part **l'étude complète d'exemple précis** rentrant dans ce cadre, d'autre part **la mise en place d'outils théoriques généraux** facilitant cette étude.

**CONTEXTE.** L'utilisation des opérateurs de Berezin-Toeplitz s'avère naturelle pour la quantification des systèmes définis sur des variétés symplectiques compactes. L'intérêt n'est pas seulement théorique, car ce cadre s'applique à un certain nombre d'exemples pertinents en physique et chimie, que ce soit en spectroscopie moléculaire, comme nous allons le voir plus bas, ou encore dans l'étude de systèmes obtenus comme réductions de systèmes avec symétries sur des fibrés cotangents (on peut trouver un certain nombre de tels exemples dans [18]). Toutefois, l'étude systématique de ceux-ci n'est que peu développée. Or, en plus de permettre une explication mathématique complètement rigoureuse de certains résultats prédits par les physiciens, cette étude soulève parfois des problèmes théoriques très généraux et dignes d'intérêt; j'en présente un certain nombre ci-dessous.

**QUELQUES PROBLÈMES PRÉCIS.** Les opérateurs de Toeplitz semblent pouvoir apporter des éclaircissements nouveaux concernant l'analyse du **spectre rotationnel de certaines molécules**. Un exemple est donné par l'hexafluorure de soufre ( $SF_6$ ) qui possède une structure octaédrique. Hecht [27] a

---

1. Ces singularités n'existent qu'en dimension plus grande que quatre.

proposé un modèle pour décrire ce spectre rotationnel : le hamiltonien classique  $H$  est un polynôme de degré quatre sur la sphère de dimension deux de rayon correspondant à une valeur fixée de la norme du moment angulaire total de la molécule, considérée comme un solide semi-rigide, plus précisément

$$H(x, y, z) = \alpha R^2 + \beta \left( x^4 + y^4 + z^4 - \frac{3R^4}{5} \right),$$

où  $x, y, z$  sont les coordonnées sur la sphère de rayon  $R$  et  $\alpha, \beta$  sont des paramètres physiques. Le cadre Toeplitz est donc bien adapté à ce problème, et en principe les conditions de Bohr-Sommerfeld que j'ai obtenues dans [32] devraient permettre de décrire jusqu'à un certain point la structure du spectre observée par Robbins, Creagh et Littlejohn [47, 48], dont l'approche repose sur une analyse subtile de la fonction de Green du système et la notion de trajectoire complexe du flot classique. Toutefois, mes résultats sur la théorie spectrale des opérateurs de Toeplitz ne permettent pas de décrire l'effet tunnel observé ici (valeurs propres exponentiellement proches), et ce problème peut fournir une motivation pour étudier cet effet dans le contexte des opérateurs de Toeplitz. En outre, l'utilisation des opérateurs de Toeplitz fournirait sans doute un cadre théorique commun à ce genre de problèmes (par exemple, le cas de molécules icosaédriques [26] semble lui aussi présenter un intérêt certain pour les chimistes).

Comme les auteurs des travaux ci-dessus le soulignent eux-mêmes, on devrait pouvoir simplifier encore davantage l'étude en mettant à profit les symétries du système. En effet, le niveau hyperbolique contenant douze points critiques, l'écriture directe des conditions de Bohr-Sommerfeld s'avère relativement fastidieuse. Néanmoins, le hamiltonien possède lui-même une symétrie octaédrique, et considérer le système défini sur le quotient de l'espace des phases par cette symétrie aboutirait certainement à des équations plus maniables. Le souci est que l'espace des phases réduit n'est plus une variété, mais un orbifold, c'est-à-dire une généralisation de la notion de variété dans laquelle on autorise des singularités. La machinerie des **opérateurs de Toeplitz sur les orbifolds** a été en partie mise en place par Charles [7]; reste à comprendre comment écrire un analogue des conditions de Bohr-Sommerfeld dans ce contexte.

Enfin, ce problème de spectroscopie moléculaire est également lié à celui de la **réduction symplectique**. En effet, le fait de se restreindre à une valeur donnée de la norme du moment angulaire total peut être interprété comme une réduction symplectique d'un système classique défini sur  $T^*SO(3)$  par une action de  $SO(3)$ . Le hamiltonien avant réduction se quantifie naturellement dans le contexte des opérateurs pseudo-différentiels, tandis qu'on a vu que la quantification pertinente pour le hamiltonien après réduction passe par les opérateurs de Toeplitz. Or on dispose également d'une procédure de réduction quantique, qui consiste à restreindre un opérateur à un de ses sous-espaces stables bien choisis. Dès lors, la question naturelle qui se pose est la suivante : étant donné un opérateur pseudo-différentiel quantifiant un hamiltonien sur un fibré cotangent, sa réduction quantique est-elle un opérateur de Toeplitz quantifiant le hamiltonien réduit ? Cette question fait l'objet d'un projet avec Laurent Charles, qui a déjà étudié ce lien entre quantification et réduction dans le cas où l'espace des phases est une variété symplectique compacte et le groupe agissant sur le système est un tore [7]. Elle devrait avoir son utilité dans l'étude d'autres situations faisant intervenir une réduction symplectique ; on peut par exemple citer le cas de l'opérateur de Schrödinger sur la sphère [23, 24].

### 7.3 Quantification et topologie symplectique

La troisième direction de recherche que je propose a pour objectif d'explorer les liens entre certains résultats de **topologie symplectique** et certains **phénomènes quantiques**.

**CONTEXTE.** Les opérateurs de Berezin-Toeplitz ont récemment permis d'éclairer certains résultats de topologie symplectique à la lumière de leurs conséquences au niveau quantique. Il est par exemple décrit dans les articles [45, 46, 11] comment certains phénomènes de rigidité symplectique permettent de quantifier le bruit inhérent aux mesures simultanées de certaines observables quantiques. En principe, le langage de la quantification géométrique et des opérateurs de Berezin-Toeplitz devrait permettre de transcrire d'autres résultats de topologie symplectique en termes de mécanique quantique, et d'offrir de nouveaux points de vue sur des objets et questions de nature symplectique (déplacement d'ouverts et de sous-variétés lagrangiennes, distance de Hofer, etc.).

**QUELQUES PROBLÈMES PRÉCIS.** Dans les articles [46, 11], Polterovich, puis Charles et Polterovich, ont montré comment quantifier le bruit inhérent à la mesure simultanée de deux mesures à valeurs opérateurs positifs (POVM) donnés par les familles d'opérateurs de Toeplitz  $(T_k(f_i))_{i \in I}$ ,  $(T_k(g_j))_{j \in J}$  associés à deux partitions de l'unité  $(f_i)_{i \in I}$ ,  $(g_j)_{j \in J}$  subordonnées à deux recouvrements ouverts d'une variété symplectique compacte, à l'aide d'invariants symplectiques mesurant le degré de recouvrement de ces deux recouvrements ouverts. Ce problème correspond à la version quantique de la localisation dans l'espace des phases. Les articles cités ci-dessus traitent des cas où les recouvrements ouverts en question sont d'échelle macroscopique ou d'échelle quantique (taille des ouverts d'ordre  $\sqrt{\hbar}$ ). Cependant, le problème est toujours pertinent à des échelles plus petites, et il serait intéressant de quantifier le bruit intrinsèque à une telle mesure pour de telles échelles. Avec Leonid Polterovich et Ood Shabtai, nous travaillons actuellement sur l'exemple de la mesure simultanée des signes de deux composantes de spins, l'espace des phases étant donc la sphère  $\mathbb{S}^2$ , et il conviendrait d'étudier le cas général.

Parmi les objets centraux de la topologie symplectique, on trouve les quasi-états symplectiques, qui sont des fonctionnelles (non nécessairement linéaires) sur l'espace des fonctions continues de la variété symplectique  $M$  considérée. Ces quasi-états constituent des outils puissants dans l'étude de la géométrie du groupe des difféomorphismes hamiltoniens sur  $M$ , ou encore du déplacement de sous-variétés de  $M$  à l'aide de symplectomorphismes. Un exemple important de quasi-état symplectique est donné par le **quasi-état médian** sur la sphère de dimension deux. Étant donnée une fonction de Morse simple  $f$  sur la sphère, on considère son graphe de Reeb  $\Gamma$  (voir figure 6.3), c'est-à-dire le quotient de  $M$  par la relation d'équivalence « appartenir à la même composante connexe d'un niveau de  $f \gg$ . La forme symplectique induit une mesure sur ce graphe, et on montre qu'il existe un unique point  $m$  sur  $\Gamma$  tel que la mesure de chaque composante connexe de  $\Gamma \setminus \{m\}$  soit inférieure à la moitié de la mesure totale de  $\Gamma$ ; la valeur du quasi-état médian en  $f$  est donnée par la valeur de  $f$  correspondant au niveau représenté par  $m$ . Le résultat de théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz auto-adjoints sur les surfaces obtenu dans ma thèse [33], qui se base lui-même sur l'obtention du graphe de Reeb du symbole principal à l'aide du spectre, est une bonne indication du fait que l'on devrait pouvoir construire un analogue quantique de ce quasi-état à l'aide des opérateurs de Toeplitz, ce qui donnerait un éclairage nouveau sur celui-ci et fournirait peut-être de nouvelles idées pour l'analyse des quasi-états sur d'autres variétés symplectiques.

## Références

- [1] J. E. Andersen and J. L. Blaavand. Asymptotics of Toeplitz operators and applications in TQFT. In *Geometry and quantization*, volume 19 of *Trav. Math.*, pages 167–201. Univ. Luxemb., Luxembourg, 2011.
- [2] F. A. Berezin. General concept of quantization. *Comm. Math. Phys.*, 40 :153–174, 1975.
- [3] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin. *The spectral theory of Toeplitz operators*, volume 99 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.
- [4] D. Burns, V. Guillemin, and Z. Wang. Stability functions. *Geom. Funct. Anal.*, 19(5) :1258–1295, 2010.
- [5] L. Charles. Quasimodes and Bohr-Sommerfeld conditions for the Toeplitz operators. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(9-10) :1527–1566, 2003.
- [6] L. Charles. Symbolic calculus for Toeplitz operators with half-form. *J. Symplectic Geom.*, 4(2) :171–198, 2006.
- [7] L. Charles. Toeplitz operators and Hamiltonian torus actions. *J. Funct. Anal.*, 236(1) :299–350, 2006.
- [8] L. Charles and J. Marché. Knot state asymptotics. I : AJ conjecture and abelian representations. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 121 :279–322, 2015.
- [9] L. Charles and J. Marché. Knot state asymptotics. II : Witten conjecture and irreducible representations. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 121 :323–361, 2015.
- [10] L. Charles, Á. Pelayo, and S. Vũ Ngọc. Isospectrality for quantum toric integrable systems. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 46(5) :815–849, 2013.
- [11] L. Charles and L. Polterovich. Sharp correspondence principle and quantum measurements. Preprint, <http://arxiv.org/abs/1510.02450>, 2015.
- [12] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d’opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. II. Le cas intégrable. *Math. Z.*, 171(1) :51–73, 1980.
- [13] Y. Colin de Verdière. A semi-classical inverse problem II : reconstruction of the potential. In *Geometric aspects of analysis and mechanics*, volume 292 of *Progr. Math.*, pages 97–119. Birkhäuser/Springer, New York, 2011.
- [14] Y. Colin de Verdière and V. Guillemin. A semi-classical inverse problem I : Taylor expansions. In *Geometric aspects of analysis and mechanics*, volume 292 of *Progr. Math.*, pages 81–95. Birkhäuser/Springer, New York, 2011.
- [15] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique. II. Conditions de Bohr-Sommerfeld. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 61(3) :347–367, 1994.
- [16] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Singular Bohr-Sommerfeld rules. *Comm. Math. Phys.*, 205(2) :459–500, 1999.
- [17] Y. Colin de Verdière and S. Vũ Ngọc. Singular Bohr-Sommerfeld rules for 2D integrable systems. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36(1) :1–55, 2003.

- [18] R. H. Cushman and L. M. Bates. *Global aspects of classical integrable systems*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [19] T. Delzant. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment. *Bull. Soc. Math. France*, 116(3) :315–339, 1988.
- [20] S. K. Donaldson. Scalar curvature and projective embeddings. I. *J. Differential Geom.*, 59(3) :479–522, 2001.
- [21] J.-P. Dufour, P. Molino, and A. Toulet. Classification des systèmes intégrables en dimension 2 et invariants des modèles de Fomenko. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(10) :949–952, 1994.
- [22] J. J. Duistermaat and L. Hörmander. Fourier integral operators. II. *Acta Math.*, 128(3-4) :183–269, 1972.
- [23] V. Guillemin. Some spectral results for the Laplace operator with potential on the  $n$ -sphere. *Advances in Math.*, 27(3) :273–286, 1978.
- [24] V. Guillemin. Band asymptotics in two dimensions. *Adv. in Math.*, 42(3) :248–282, 1981.
- [25] V. Guillemin and Z. Wang. The Mellin transform and spectral properties of toric varieties. *Transform. Groups*, 13(3-4) :575–584, 2008.
- [26] W. G. Harter and D. E. Weeks. Rotation-vibration spectra of icosahedral molecules. I. Icosahedral symmetry analysis and fine structure. *J. Chem. Phys.*, 90 :4727–4743, May 1989.
- [27] K. T. Hecht. The vibration-rotation energies of tetrahedral  $XY_4$  molecules. Part I. Theory of spherical top molecules. *Journal of Molecular Spectroscopy*, 5 :355–389, 1961.
- [28] L. Hörmander. Pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 :501–517, 1965.
- [29] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly*, 73(4, part II) :1–23, 1966.
- [30] B. Kostant. Quantization and unitary representations. *Uspehi Mat. Nauk*, 28(1(169)) :163–225, 1973. Translated from the English (Lectures in Modern Analysis and Applications, III, pp. 87–208, Lecture Notes in Math., Vol. 170, Springer, Berlin, 1970) by A. A. Kirillov.
- [31] Y. Le Floch. Singular Bohr-Sommerfeld conditions for 1D Toeplitz operators : elliptic case. *Comm. Partial Differential Equations*, 39(2) :213–243, 2014.
- [32] Y. Le Floch. Singular Bohr-Sommerfeld conditions for 1D Toeplitz operators : hyperbolic case. *Anal. PDE*, 7(7) :1595–1637, 2014.
- [33] Y. Le Floch. *Théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz 1D*. PhD thesis, Université Rennes 1, 2014.
- [34] Y. Le Floch. Berezin-Toeplitz operators on compact Kähler manifolds : an introduction. <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWVpbm5b2hhbm5sZWZsb2NoaG9tZXBhZ2V8Z3g6NDk4NDdkNjAzNmZ2ZGU3NA>, 2015.
- [35] Y. Le Floch and Á. Pelayo. Spectral asymptotics of semiclassical unitary operators. <http://arxiv.org/abs/1506.02873v2>, 2015.

- [36] Y. Le Floch and Á. Pelayo. Euler–MacLaurin formulas via differential operators. *Adv. in Appl. Math.*, 73 :99–124, 2016.
- [37] Y. Le Floch, Á. Pelayo, and S. Vũ Ngọc. Inverse spectral theory for semiclassical Jaynes–Cummings systems. *Mathematische Annalen*, pages 1–21, 2015. <http://dx.doi.org/10.1007/s00208-015-1259-z>.
- [38] X. Ma and G. Marinescu. *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels*, volume 254 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [39] J. Marché and T. Paul. Toeplitz operators in TQFT via skein theory. *Trans. Am. Math. Soc.*, 367(5) :3669–3704, 2015.
- [40] Á. Pelayo and S. V. Ngọc. First steps in symplectic and spectral theory of integrable systems. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 32(10) :3325–3377, 2012.
- [41] Á. Pelayo, L. Polterovich, and S. Vũ Ngọc. Semiclassical quantization and spectral limits of  $\hbar$ -pseudodifferential and Berezin-Toeplitz operators. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 109(3) :676–696, 2014.
- [42] Á. Pelayo and T. S. Ratiu. Circle-valued momentum maps for symplectic periodic flows. *Enseign. Math. (2)*, 58(1-2) :205–219, 2012.
- [43] A. Pelayo and S. Vũ Ngọc. Semitoric integrable systems on symplectic 4-manifolds. *Invent. Math.*, 177(3) :571–597, 2009.
- [44] Á. Pelayo and S. Vũ Ngọc. Semiclassical inverse spectral theory for singularities of focus-focus type. *Comm. Math. Phys.*, 329(2) :809–820, 2014.
- [45] L. Polterovich. Quantum unsharpness and symplectic rigidity. *Lett. Math. Phys.*, 102(3) :245–264, 2012.
- [46] L. Polterovich. Symplectic geometry of quantum noise. *Comm. Math. Phys.*, 327(2) :481–519, 2014.
- [47] J. M. Robbins, S. C. Creagh, and R. G. Littlejohn. Complex periodic orbits in the rotational spectrum of molecules : the example of SF<sub>6</sub>. *Phys. Rev. A*, 39(6) :2838–2854, 1989.
- [48] J. M. Robbins, S. C. Creagh, and R. G. Littlejohn. Uniform quantization conditions in the presence of symmetry : the rotational spectrum of SF<sub>6</sub>. *Phys. Rev. A*, 41(11) :6052–6062, 1990.
- [49] Y. A. Rubinstein and S. Zelditch. The Cauchy problem for the homogeneous Monge–Ampère equation, I. Toeplitz quantization. *J. Differential Geom.*, 90(2) :303–327, 2012.
- [50] M. Schlichenmaier. Berezin-Toeplitz quantization for compact Kähler manifolds. A review of results. *Adv. Math. Phys.*, pages Art. ID 927280, 38, 2010.
- [51] J.-M. Souriau. Quantification géométrique. *Comm. Math. Phys.*, 1 :374–398, 1966.
- [52] T. Tate. Asymptotic Euler–Maclaurin formula over lattice polytopes. *J. Funct. Anal.*, 260(2) :501–540, 2011.
- [53] S. Vũ Ngọc. Bohr–Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type. *Comm. Pure Appl. Math.*, 53(2) :143–217, 2000.

- [54] S. Vũ Ngọc. Symplectic inverse spectral theory for pseudodifferential operators. In *Geometric aspects of analysis and mechanics*, volume 292 of *Progr. Math.*, pages 353–372. Birkhäuser/Springer, New York, 2011.
- [55] S. Zelditch. Index and dynamics of quantized contact transformations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 47(1) :305–363, 1997.
- [56] S. Zelditch. Bernstein polynomials, Bergman kernels and toric Kähler varieties. *J. Symplectic Geom.*, 7(2) :51–76, 2009.
- [57] S. Zelditch. Inverse spectral problem for analytic domains. II.  $\mathbb{Z}_2$ -symmetric domains. *Ann. of Math. (2)*, 170(1) :205–269, 2009.