ENS Cachan **Année Scolaire**
Antenne de Bretagne **2012-2013**

Licence de mathématiques - Module EVNCD

Feuille d'exercices numéro 1 : rappels sur les espaces vectoriels normés et de Banach

Espaces vectoriels normés

Exercice 1. *Identité du parallélogramme*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

a. Supposons E euclidien (*i.e.* la norme provient d'un produit scalaire). Montrer qu'on a l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

b. Réciproquement, montrer que si E vérifie l'identité du parallélogramme, alors E est euclidien.

Exercice 2. *Théorème de Riesz*

Rappeler et démontrer le théorème de Riesz sur la compacité de la boule unité d'un espace vectoriel normé.

Exercice 3. *Séparé d'un espace vectoriel muni d'une semi-norme*

Soit E un espace vectoriel, et N une semi-norme sur E. On pose

$$F = \{x \in E; N(x) = 0\}.$$

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Pour ξ appartenant au quotient E/F et x un représentant de ξ, on pose $\|\xi\| = N(x)$. Montrer que $\|.\|$ est bien définie et est une norme sur E/F.

Espaces de Banach

Exercice 4. *Point fixe et itérées*

Soient E un espace de Banach et $f : E \to E$. On suppose qu'il existe une itérée de f strictement contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 5. *Une équation fonctionnelle*

Soit K une fonction continue sur $[0,1]^2$. Soit ϕ continue sur $[0,1]$; pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, on définit :

$$T_\phi f(x) = \int_0^x K(x,y) f(y)\, dy + \phi(x), \quad x \in [0,1].$$

Montrer que l'équation $T_\phi f = f$ possède une unique solution f continue.

Exercice 6. *Un théorème de point fixe*

Soient E un espace vectoriel normé et K un compact convexe non vide de E. Soit $f : K \to K$ une fonction 1-lipschitzienne ; montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7. *Complétude et séries*

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente.

Exercice 8. *Quotients*

Soient E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E. On introduit sur le quotient E/F

$$N(\xi) = \inf_{\xi = \bar{x}} \|x\| .$$

Montrer que l'on définit ainsi une norme et que $(E/F, N)$ est complet.

Exemples

Exercice 9. *Polynômes*

Sur l'espace $\mathbb{C}[X]$ des polynômes on pose, pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$:

$$\|P\|_\infty = \sup_k |a_k|,$$
$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|, \qquad \|P\|_2 = \left(\sum_{k=0}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} .$$

Montrer que l'on définit ainsi trois normes ; sont-elles équivalentes ? $\mathbb{C}[X]$ est-il complet pour l'une d'elles ?

Exercice 10. *Fonctions continues sur* $[0,1]$

On note E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$.

a. Montrer que l'application

$$f \in E \mapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$$

définit une norme sur E.

b. $(E, \|.\|_1)$ est-il complet ?

Exercice 11. *Fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$

Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$. Démontrer que

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) + f'(t)|$$

définissent deux normes équivalentes sur E qui rendent cet espace complet.

Exercice 12. *Fonctions Höldériennes*

Soit $\alpha \in]0,1]$. On note Lip_α l'ensemble des fonctions α-Höldériennes définies sur $[0,1]$ à valeurs réelles : f appartient à Lip_α s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous x, y dans $[0,1]$

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

a. Montrer que l'application N définie par

$$N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{0\leq x<y\leq 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

est une norme sur Lip_α.

b. Montrer que Lip_α muni de N est un espace de Banach.

c. Les normes N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 13. *Espaces de suites*

Pour $1 \leq p < +\infty$, on introduit l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$ des suites (à valeurs complexes) p-sommables :

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}; \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p < +\infty \right\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p \right)^{1/p}.$$

On définit $\ell^\infty(\mathbb{N})$ comme l'espace des suites bornées, sur lequel on considère la norme $\|.\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Enfin, on note $c_0(\mathbb{N})$ le sous-espace de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ formé des suites qui tendent vers 0.

a. Soit $1 \leq p < q \leq +\infty$. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$. Cette inclusion peut-elle être une égalité ?

b. Montrer que les $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq +\infty$, sont complets.

c. Montrer que $c_0(\mathbb{N})$, muni de $\|.\|_\infty$, est complet.

d. Quelle est l'adhérence de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$?

e. Montrer que pour $1 \leq p < +\infty$, $\ell^p(\mathbb{N})$ est séparable, mais que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.

Exercice 14. *Fonctions continues sur un compact*

Soit (X, d) un espace métrique compact. On note $E = \mathcal{C}^0(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X, qu'on munit de la norme uniforme $\|.\|_\infty$.

a. Montrer que E est un espace de Banach.

On va maintenant montrer que E est séparable.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe des points $x_1^n, \ldots, x_{N_n}^n \in X$ et des fonctions $\phi_1^n, \ldots, \phi_{N_n}^n \in E$ positives et vérifiant

$$\sum_{j=1}^{N_n} \phi_j^n = 1, \quad \phi_j^n(x) = 0 \text{ si } d(x, x_j^n) \geq \frac{1}{n}.$$

c. Prouver que la famille $\left(\phi_j^n\right)_{n\geq 1, 1\leq j\leq N_n}$ est totale. Conclure.