Université de Strasbourg **L2 Mathématiques**

2016-2017

Calcul différentiel, feuille 3 : différentielle seconde

Exercice 1 (Applications bilinéaires)**.** Soit B une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F, où E_1, E_2, F sont des espaces vectoriels de dimension finie. On rappelle que B est différentiable sur $E_1 \times E_2$ et que

$$dB(a_1, a_2) \cdot (h_1, h_2) = B(a_1, h_2) + B(h_1, a_2)$$

pour $a_1, h_1 \in E_1$ et $a_2, h_2 \in E_2$. Montrer que B est deux fois différentiable sur $E \times F$ et calculer sa différentielle seconde $d^2B(a_1, a_2)$ en un point (a_1, a_2) de $E_1 \times E_2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles secondes en $(0, 0)$ et que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Que peut-on en déduire ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. On note

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0),\ \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0),\ \gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0),\ \delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0),\ \varepsilon = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0).$$

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. Calculer $g''(0)$ en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et ε.

Exercice 4. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On définit le laplacien Δf d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées secondes par rapport à toutes les variables par la formule

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

et on dit que f est harmonique si son laplacien est nul. Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (\cos x - \sin x)\exp(y)$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \exp(x)\sin y + \exp(y)\sin x + \ln(x^2+y^2).$$

Exercice 5. 1. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiables vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.
2. Trouver toutes les applications $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiables vérifiant

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

On pourra poser $\phi(u,v) = \frac{1}{2}(u+v, u-v)$ et $f = g \circ \phi$.

Exercice 6. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto 3x^2y + e^{xz^2} + 4z^3.$$

Calculer la hessienne de f en (x,y,z). En déduire une expression de la quantité $d^2f(1,1,0)\cdot(h,h)$ où $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 au point $(1,1)$ de la fonction

$$f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x+y}.$$

Exercice 8. Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 au point $(0,0)$ de la fonction f définie sur un voisinage de $(0,0)$ par $f(x,y) = \frac{\exp x}{\cos y}$. En déduire que la quantité

$$\frac{\exp(x) - (1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}$$

admet une limite quand (x,y) tend vers $(0,0)$, et calculer celle-ci.