Motifs de dimension finie

Christopher Nicol

Table des matières

Notations

- Dans ce texte, le mot variété désigne un schéma de type fini sur un corps k, réduit, irréductible et séparé. $K(V)$ désigne le corps des fonctions sur V.
- $Z^k(X)$ désigne le groupe des cycles de codimension k sur X, $\mathrm{CH}^k(X)$ désigne le groupe de Chow des cycles de codimension k sur X modulo l'équivalence rationnelle, $\mathrm{CH}_k(X)$ celui des cycles de dimension k, modulo l'équivalence rationnelle. Par ailleurs celui ci est vu comme un $\mathbb{Z}$-module par défaut ou un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel si on l'a précisé en amont. S'il faut spécifiquement préciser l'anneau A de coefficients on notera $\mathrm{CH}^k(X)_A$. Enfin si on veut spécifier le sous groupe nul pour une certaine relation d'équivalence (algébrique, homologique, $\cdots$) on notera $\mathrm{CH}^k_{\mathrm{alg}}(X), \mathrm{CH}^k_{\mathrm{hom}}(X), \cdots$. En revanche pour désigner le groupe quotient par cette relation, on utilisera la notation $Z^k_{\mathrm{alg}}(X), Z^k_{\mathrm{hom}}(X)$.
- $\mathrm{Pic}^0(X)$ désigne la variété Jacobienne de X. Pour les courbes on notera aussi $J(X)$.
- $\mathrm{Chow}^k_{d,H}(X)$ désigne la variété de Chow des cycles effectifs de codimension k et degré d sur X lorsque l'on calcul le degré grâce à in diviseur très ample H.
- Pour k un corps, $\sim$ une relation adéquate et A un anneau, on note $\mathrm{Mot}_\sim(k)_A$ la catégorie des motifs sur k à coefficients dans A modulo $\sim$. Pour l'équivalence rationnelle ou numérique on raccourcira en $\mathrm{CH}(k)$ et $\mathrm{Num}(k)$. Si on ne précise pas l'anneau A il s'agira de $\mathbb{Q}$.
- Pour une variété X et $\sim$ une équivalence adéquate $\mathfrak{h}_\sim(X)$ désigne le motif $(X, \mathrm{Id}, 0)$. Si la relation $\sim$ est claire, on notera seulement $\mathfrak{h}(X)$.
- $T(X)$ désigne le noyau de l'application d'Abel-Jacobi sur $\mathrm{CH}_0^{\mathrm{hom}}(X)$.
- $H^{p,q}(X)$ désigne le terme d'ordre (p,q) dans la cohomologie de Betti, il s'agit donc $H^q(X, \Omega^p_X)$.

Introduction

L'objectif général de la géométrie algébrique est l'étude des variétés définies sur des corps. Partant d'une variété X que l'on supposera presque systématiquement projective et lisse, on peut lui associer des invariants de différentes natures :

- Des nombres à travers la cohomologie de certains faisceaux, ou plus simplement la dimension de la variété.
- Des groupes comme par exemple celui de Picard, de Neron-Sevéri, ou le groupe d'automorphismes de X.
- Des catégories, en particulier la catégorie dérivée des faisceaux cohérents sur X.
- Des espaces vectoriels avec des structures enrichies comme dans le cas des différentes cohomologies de Weil usuelles.

Une famille de groupe retiendra particulièrement notre attention, il s'agit de celle des groupes de Chow. Leur définition est un analogue algébrique de celle des groupes de cohomologie singulière en topologie algébrique. Cependant ceux ci sont généralement gros : ils ne possèdent pas une structure de module de type fini. Une manière usuelle de contourner ce problème serait de donner une structure de variété algébrique à ces groupes pour leur donner un propriété de finitude au sens de la dimension : c'est finalement ce que l'on fait avec des groupes de Lie analytiques comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1$. Nous consacrerons donc la section 1 à une étude heuristique de la notion de dimension finie pour les groupes de Chow. Bien que quelques cas peuvent vérifier notre stratégie naïve, nous montrerons qu'il n'est pas possible de parler de dimension finie des groupes de Chow pour des variétés assez générales qui sont loin d'être pathologiques.

Dès lors il faut trouver une autre manière de comprendre les groupes de Chow. Cela peut se faire suivant une filtration adéquate, conjecturée par Bloch et Beilinson que nous étudierons dans la section 2. Dans celle-ci les différentes graduations des groupes de Chow se réaliseraient comme des groupes d'extension dans une certaine catégorie avec une structure riche. Plus généralement nous formerons des catégories de motifs qui permettent essentiellement de décomposer des variétés selon des cycles qui sont des projecteurs pour une certaine loi de composition. Ces décompositions sur les motifs induiront des décomposition des groupes de Chow, ce qui simplifiera leur étude. Dans ce contexte, Kimura et O'Sullivan ont introduit une nouvelle notion de dimension finie qui prend sa source dans des considérations catégoriques élémentaires. Cette notion sera étudié dans la section 3.

Nous pouvons alors conjecturer que toutes les variétés projectives lisses sont de dimension finie dans le sens de Kimura-O'Sullivan. A l'heure actuelle cette conjecture est connue uniquement sur les motifs des variétés abéliennes comme nous le verrons dans la section 4. Pourtant, il s'avère que de nombreuses variétés ne sont pas des variétés abéliennes (surfaces K3, produits de courbes de genre $g \geq 2$, hypersurfaces de $\mathbb{P}^n$ pour $n \geq 3$). Cependant rappelons que la notion de motif permet de faire des décompositions le long de sous objets plus simples. Comme la conjecture de Kimura-O'Sullivan est stable par somme directe et facteur direct, elle est donc vérifiée plus généralement sur la catégorie tensorielle des motifs qui se décomposent sur les variétés abéliennes. La question est donc de déterminer les variétés dont le motif est dans cette sous catégorie.

Cette question est en fait à l'origine de l'introduction des motifs par Grothendieck : il est bien connu qu'à n'importe quelle variété on peut associer une variété abélienne de Picard qui détermine complètement le premier groupe de cohomologie de n'importe quelle cohomologie de Weil. On pourrait donc espérer plus généralement que tous les groupes de cohomologie d'une variété provienne d'une variété abélienne : c'est à dire que tout motif pourrait être décomposé sur des motifs de variétés abéliennes. Cette assertion est conjecturalement fausse (sur $\mathbb{C}$) mais elle nous enjoint à déterminer les variétés dont le motif est effectivement décomposé sur des variétés abéliennes. Nous développerons particulièrement cette question dans le cadre des surfaces dans la section 5. Cela sera l'occasion d'une étude de plusieurs type de surfaces, sans lien entre elles, mais qui permettra de se familiariser avec des outils généraux de l'étude de ces variétés. Nous étudierons notamment la structure de fibration elliptiques et certaines constructions sur des surfaces K3.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadrant de stage Monsieur Lie Fu pour sa disponibilité constante dans la réponse à mes questions : de nombreux apprentissages ne figurant pas dans ce mémoire sont par ailleurs le fait de discussions très enrichissantes au cours de cette période de travail. Je tiens aussi à remercier mes amis François Gatine et Enguerrand Moulinier pour leur compagnie qui a rendu supportable le travail dans les couloirs malodorants de Jussieu.

1 Taille des groupes de Chow

Commençons par définir les groupes de Chow, objets qui seront au cœur de notre étude.

Définition 1.0.1. *Soit X un schéma de type fini sur un corps k et i un entier. Un cycle de codimension i sur X est en élément de*

$$\bigoplus_{\operatorname{codim}(V)=i} \mathbb{Z} \cdot V,$$

où la somme porte sur toutes les sous variétés fermées de X qui sont de codimension i.

Soit maintenant V une variété, W une sous variété de codimension 1 et $\varphi \in K(V)$. Par restriction on obtient $\varphi_W \in \operatorname{Frac}(\mathcal{O}_{V,W})$. Définissons la fonction ordre sur l'anneau $\mathcal{O}_{V,W}$. Plus généralement pour $r \in A$ un anneau intègre de dimension 1, la quantité $\operatorname{ord}_A(r) = l(A/rA)$ est bien définie. On prolonge alors cette fonction au corps des fractions par la relation de multiplicativité.

Ensuite pour la même fonction φ, on définit son diviseur par

$$\operatorname{div}(\varphi) = \sum_W \operatorname{ord}_W(\varphi) \cdot W,$$

où la somme porte sur toutes les sous variétés de codimension 1 de V. Cette somme n'a en fait qu'un nombre fini de termes non nuls et donc induit un cycle de codimension 1 sur V.

Enfin, deux cycles Z et Z' de codimension i sur un schéma X, sont rationnellement équivalents s'il existe une sous variété fermée V dans X de codimension $i-1$ et un élément $\varphi \in K(V)$ tels que $Z - Z' = \operatorname{div}(\varphi)$ (cet élément est un cycle sur V mais il peut naturellement se voir comme un cycle sur X).

Le groupe de Chow $\operatorname{CH}^i(X)$ est alors le quotient du groupe des cycles de codimension i par la relation d'équivalence rationnelle.

Ces groupes forment des invariants importants des variétés algébriques. Comme ce sont des groupes, il est naturel de vouloir leur donner une structure de variété algébrique. Pour cela, le point manquant est la notion de voisinage algébrique. Cependant cela impliquerait une forme de voisinage de dimension finie. Nous voulons donc paramétrer les groupes de Chow par des schémas de type fini.

Contrairement aux groupes de cohomologies dont les groupes de Chow sont des analogues algébriques : on regarde les variétés d'une certaine codimension et on identifie celles qui sont des bords en un certain sens, il n'est pas évident que ces groupes soient de dimension finie comme espace vectoriels sur $\mathbb{Q}$.

Cette partie se voulant introductive à certaines problématiques, nous allons nous placer pour commencer dans un cadre un peu plus spécifique qui est le suivant.

Cadre. *On considère X une variété projective lisse de dimension d sur $\mathbb{C}$, et ses groupes de Chow sont pour le moment à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}$. Par ailleurs la cohomologie de Weil que nous utiliserons sera la cohomologie singulière.*

De nombreux arguments se généralisent à des variétés sur d'autres corps avec d'autres cohomologies de Weil comme nous le verrons à la section 1.4 , mais nous utiliserons parfois des spécificités de la théorie complexe. Citons les plus remarquables :

- $\mathbb{C}$ dispose d'une structure analytique qui permet d'utiliser le théorème GAGA de Serre.
- $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.
- $\mathbb{C}$ est de caractéristique nulle.
- $\mathbb{C}$ est infini non dénombrable, donc de degré de transcendance infini sur $\mathbb{Q}$.

Nous commencerons par donner plusieurs tentatives de définition pour la notion de dimension finie pour les groupes de Chow puis nous les comparerons entre elles. Nous vérifierons ensuite que ces définitions équivalentes ne sont pas toujours vérifiés pour des variétés concrètes, et donc il ne sera pas toujours possible de faire opérer ce formalisme. Par ailleurs ces tentatives de définitions mettrons en lumière l'importance du choix de la relation d'équivalence adéquate définissant les groupes de Chow, il sera donc utile d'étudier les différents groupes quotients pour ces relations et de trouver ceux qui sont de type fini ou dénombrable.

1.1 Premières tentatives de définition

A priori les groupes de Chow sont des quotients d'un groupe libre à une infinité (non dénombrable) de générateurs par un sous groupe. Il n'est donc pas évident que ceux si soient de type fini comme groupes abéliens, et de fait ce n'est pas toujours le cas. Pour espérer avoir une dimension finie, il faut donc la prendre au sens de la dimension algébrique. Les premiers exemples montrent la nécessité de ce point de vu.

1.1.1 Exemples en petite codimension

Le cas de la codimension 0 est absolument évident.

Proposition 1.1.1. $\mathrm{CH}^0(X)$ *est un groupe abélien libre de type fini et de rang égal au nombre de composantes irréductibles de* X.

Démonstration. X étant une variété projective, c'est en particulier un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$, et donc il n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles.
Par ailleurs au vu de la définition de l'équivalence sur les groupes de Chow, il est clair qu'il n'y a pas de quotient à faire pour définir $\mathrm{CH}^0(X)$ car il n'y a pas de variété de dimension plus grande que les composantes irréductibles. Enfin la base est explicitement donnée par ces composantes, d'où le résultat. ■

Le cas suivant n'est pas trivial mais il est bien connu.

Définition 1.1.1. *Pour le premier groupe de Chow, on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{CH}^1_{\mathrm{alg}}(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(X)/\mathrm{CH}^1_{\mathrm{alg}}(X) \longrightarrow 0$$

Dans celle-ci le quotient $\mathrm{CH}^1(X)\Big/\mathrm{CH}^1_{\mathrm{alg}}(X)$ *est appelé le groupe de Néron-Severi de* X *et noté* $\mathrm{NS}(X)$.

Remarque. *Par ailleurs on a des égalités* $\mathrm{CH}^1_{\mathrm{alg}}(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}^1_{\mathrm{num}\mathbb{Q}}(X)$. *Cet exemple est donc à prendre avec précaution car il n'indique pas quel sous groupe privilégier pour les groupes de Chow de codimension supérieure.*

L'intérêt de cette suite exacte est que les deux termes extrémaux sont usuels.

Proposition 1.1.2. *Le groupe* $\mathrm{NS}(X)$ *est finiment engendré comme groupe abélien.*

Démonstration. On regarde la suite longue de cohomologie associée à la suite exacte exponentielle.

$$\cdots \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^{\times}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

Or $\mathrm{CH}^1(X)$ s'identifie justement à $H^1(X, \mathcal{O}_X^{\times})$ et l'image de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ correspond aux diviseurs algébriquement équivalents à 0. Donc on obtient

$$\mathrm{NS}(X) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$$

Cette cohomologie étant de type fini car X est compact, on en déduit le résultat cherché. ■

Le noyau de la projection sur le groupe de Néron-Severi ne va pas être en général de type fini comme groupe abélien, mais c'est ici que l'on introduit l'idée de le voir comme ensemble des points d'une variété algébrique.

Proposition 1.1.3. *Le groupe* $\mathrm{CH}^1_{\mathrm{alg}}(X)$ *s'identifie aux* $\mathbb{C}$*-points de* $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Démonstration. On a vu que dans la suite exacte de l'exponentielle le morphisme

$$\mathrm{CH}^1(X) \longrightarrow \mathrm{NS}(X)$$

s'identifiait à

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^{\times}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$$

donc son noyau correspond à

$$H^1(X,\mathcal{O}_X)/H^1(X,\mathbb{Z})_{libre}$$

ce qui est exactement la définition analytique des $\mathbb{C}$-points de la Jacobienne.

■

Ainsi $\mathrm{CH}^1(X)$ est dans une suite exacte avec deux groupes dont l'un est une variété projective de dimension finie, et l'autre est un groupe abélien de type fini. Il est donc naturel de dire que $\mathrm{CH}^1(X)$ est de dimension finie.

Bien qu'élémentaires, ces deux exemples ont l'intérêt d'être inconditionnels sur X. Cela ne sera plus le cas pour les codimensions plus grandes.

1.1.2 Application d'Abel-Jacobi

Cadre. *On suppose maintenant que X est irréductible.*

Le prochain cas à étudier est celui de $\mathrm{CH}^d(X) = \mathrm{CH}_0(X)$. Celui ci est intéressant car on dispose d'un morphisme canonique dit d'Abel-Jacobi vers une variété abélienne. Commençons par rappeler quelques propriétés de celle-ci.

On commence par définir la variété d'Albanese, toujours sous les hypothèses du cadre (on peut même plus généralement supposer seulement que X est compacte et kählérienne).

Définition 1.1.2. *On définit par la formule suivante un tore complexe associé à X.*

$$\mathrm{Alb}(X) = H^{d,d-1}(X)/H^{2d-1}(X,\mathbb{Z})_{libre} = \Omega^1(X)^*/H_1(X,\mathbb{Z})_{libre}$$

On dispose alors d'une application importante qui se factorise via le groupe de Chow. Rappelons que sur $\mathrm{CH}^d(X)$ les équivalences numériques et homologiques coïncident (cette égalité est conjecturée pour les groupes de Chow de codimension plus petite). C'est d'ailleurs aussi le cas de l'équivalence algébrique.

Définition 1.1.3. *On fixe un point $x_0 \in X$. On définit alors l'application d'Abel-Jacobi par*

$$\mathrm{AJ}^d_{x_0} : \begin{cases} \mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X) & \longrightarrow \mathrm{Alb}(X) \\ \sum n_j(x_j - x_0) & \longrightarrow \left(\omega \to \sum n_j \int_{x_0}^{x_j} \omega \textit{ modulo les périodes}\right). \end{cases}$$

Où les périodes sont les intégrales d'une base de $\Omega^1(X)$ sur des cycles formant une base de $H_1(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{libre}}$.

Remarque. *Cette définition ne dépend du point base x_0 qu'à translation près, ce qui n'est pas important pour la suite car nous ne nous intéresserons qu'à l'image du morphisme d'Abel-Jacobi, nous omettrons donc cette référence.*

Théorème 1.1.4. *L'application d'Abel-Jacobi AJ^d est surjective.*

Démonstration. Nous allons montrer un résultat meilleur que celui annoncé. Plus précisément nous allons montrer qu'il existe un entier k tel que le morphisme somme

$$\alpha : X^k \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$$

soit surjectif. Pour cela on utilise le fait que les variétés en questions sont propres, donc l'image de X^k est un sous espace analytique connexe de $\mathrm{Alb}(X)$. Dès lors il suffit de prouver que l'image contient un ouvert. Pour cela il suffit de montrer que l'application de somme est une submersion en un point.

Étant donné un point $(x_1, \cdots, x_k)$, comme $\mathrm{Alb}(X) = H^0(X,\Omega^1_X)^*/H_1(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{libre}}$, on a $H^0(\mathrm{Alb}(X),\Omega^1_{\mathrm{Alb}(X)}) = H^0(X,\Omega^1_X)$. Dès lors le dual de la différentielle de α s'identifie au morphisme de restriction

$$H^0(X,\Omega^1_X) \longrightarrow \Omega^1_{X,x_1} \oplus \cdots \oplus \Omega^1_{X,x_k}.$$

Enfin le fait de s'annuler en x_k définit un hyperplan dans $H^0(X,\Omega^1_X)$, dès lors il suffit de prendre des points x_k tels que l'intersection de ces hyperplans soit de dimension 0 (il suffit de prendre des points de sorte que la dimension de l'intersection baisse effectivement à chaque étape). On en conclu donc l'injectivité de ce morphisme, et donc à la surjectivité de son dual. D'où le résultat.

■

Corollaire 1.1.4.1. *Si X est projective, la variété d'Albanese est aussi projective.*

Démonstration. Voir ([21],12.12). L'idée de la preuve se base sur les deux points suivants :

- En temps que tore complexe, la variété d'Albanese est clairement Kählérienne compacte.
- Dans la preuve du théorème 1.1.4, on montre en fait que l'on a une surjection $X^r \to \mathrm{Alb}(X)$ pour un entier r fixé. Alors comme X^r est projective, c'est une variété de Moishezon, comme la variété $\mathrm{Alb}(X)$ est dominée par une variété de Moishezon, elle l'est aussi.
- Une variété compacte Kählérienne de Moishezon est projective.

Ce résultat est aussi un cas particulier du lemme 1.3.3. ■

Remarque. *En analysant la preuve on voit que $k \geq h^{1,0}$ convient.*

Le corollaire 1.1.4.1 nous donne un outil supplémentaire pour comprendre le cas de la codimension d. Pour autant nous allons voir qu'il est loin d'être suffisant, car $\mathrm{CH}^d(X)$ peut être très gros tandis que $\mathrm{Alb}(X)$ est très petite. C'est par exemple le cas des surfaces où $q = 0, p_g \neq 0$ (surfaces K3, surfaces de $\mathbb{P}^3$ de degré plus grand que que 4).

On peut en fait définir des jacobiennes intermédiaires et des applications d'Abel-Jacobi en chaque codimension, mais celles-ci sont à valeurs dans des tores complexes qui ne sont pas des variétés abéliennes même si X est projective. Dès lors on dispose de moins de techniques pour les étudier, et les résultats se généralisent plus difficilement à d'autres corps.

Par ailleurs comme on dispose d'un morphisme

$$\iota_{x_0} : \begin{cases} X & \longrightarrow \mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X) \\ x & \longrightarrow (x) - (x_0). \end{cases}$$

on obtient en composant avec l'application d'Abel-Jacobi une application

$$\mathrm{alb}_X : X \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$$

qui s'avère être un morphisme algébrique. Il est alors envisageable de définir cet objet en des termes purement algébriques, et donc indépendamment d'un choix de cohomologie de Weil pour définir la variété d'Albanese, et sans passser par les groupes de Chow..

Proposition 1.1.5 (Serre, 1960)**.** *Soit X une variété projective lisse irréductible de dimension d et x_0 un point de base. Alors il existe une unique variété abélienne $\mathrm{Alb}(X)$ avec un morphisme alb_X qui envoie x_0 sur 0 qui soit initiale pour cette propriété. C'est à dire que si l'on dispose d'un morphisme $f : X \to T$ vers une variété abélienne T qui envoie x_0 sur 0, on a alors l'unique factorisation suivante par un morphisme de variétés abéliennes.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Alb}(X) \arrow[dr, dashed, "\exists ! g"] & \\ X \arrow[u, "\mathrm{alb}_X"] \arrow[r, "f"'] & T \end{tikzcd}$$

Cette variété $\mathrm{Alb}(X)$ est appelée variété d'Albanese et le morphisme est dit d'Albanese.

Démonstration. Le résultat de Serre est en fait plus général, pour s'y ramener rappelons deux faits.

- Un morphisme lisse est géométriquement réduit. En effet si une variété est lisse ses anneaux locaux sont des anneaux factoriels donc sont intègres. Or la propriété d'être lisse est stable par extension de corps, donc si on considère une extension $k'|k$, $X_{k'}$ est encore lisse donc ses anneaux locaux sont en particulier intègres, donc $X_{k'}$ est réduit. Ceci étant valable pour toutes les extensions de corps $k'|k$, on en déduit que X est géométriquement réduit.
- Une variété irréductible et projective est géométriquement irréductible. En effet Sous ces hypothèses on a alors $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$, or une extension $k'|k$ de corps est toujours fidèlement plate, donc par le théorème de changement de base on a
$$H^0(X_{k'}, \mathcal{O}_{k'}) = k \otimes_k k' = k'.$$
Comme ce groupe compte le nombre de composantes irréductibles on en déduit que $X_{k'}$ est irréductible. D'où le résultat.

La suite de la preuve est un résultat profond de géométrie algébrique, prouvée dans ([1]). ■

Encore une fois on peut prolonger le morphisme d'Albanese au groupe de Chow.

Définition 1.1.4. *Pour une variété projective lisse, on définit son morphisme d'Abel-Jacobi de la façon suivante.*

$$\mathrm{AJ}^d : \begin{cases} \mathrm{CH}^d_{\mathrm{alg}}(X) & \longrightarrow \mathrm{Alb}(X) \\ \sum n_j\left((x_j)-(x_0)\right) & \longrightarrow \sum n_j \,\mathrm{alb}_X(x_j) \end{cases}$$

Lemme 1.1.6. *Dans le cas complexe, les définitions analytiques et algébrique de la variété d'Albanese induisent des tores isomorphes.*

Démonstration. Reprenons la définition analytique et montrons que le tore complexe induit vérifie la propriété universelle de la définition 1.1.4. Dans ce cas on peut même montrer la propriété de factorisation même pour T qui est un tore complexe à priori non projectif.

L'unicité provient de la surjectivité de $X^r \to \mathrm{Alb}(X)$: pour $y \in \mathrm{Alb}(X)$ d'antécédent $(x_1, \cdots, x_r)$, l'image de y par g doit nécessairement être $\sum_{i=1}^r f(x_i)$.

Pour l'existence, comme T est un tore complexe, on a l'isomorphisme

$$T \simeq H^0(T, \Omega^1_T)^*/H_1(T, \mathbb{Z})$$

Comme par définition $\mathrm{Alb}(X) = H^0(X, \Omega^1_X)^*/H_1(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{libre}}$ il suffit de construire des applications entre espaces vectoriels. f induit un morphisme en homologie

$$f_* : H_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(T, \mathbb{Z})$$

et un morphisme sur les formes différentielles

$$f^* : H^0(T, \Omega^1_T) \longrightarrow H^0(X, \Omega^1_X).$$

En dualisant on obtient un morphisme dans le sens opposé, et la théorie de Hodge assure que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} H_1(X,\mathbb{Z})_{libre} & \xrightarrow{f_*} & H_1(T,\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left(H^0(X,\Omega^1_X)\right)^* & \xrightarrow{(f^*)^\vee} & \left(H^0(T,\Omega^1_T)\right)^* \end{array}$$

Dès lors en passant au quotient on obtient bien un morphisme $g : X \to T$. Enfin pour vérifier que $f = g \circ \mathrm{alb}_X$, il suffit de remarquer que ces deux morphismes sont égaux en x_0 par construction et qu'ils ont la même différentielle : il s'agit du dual de

$$H^0(T, \Omega^1_T) \longrightarrow H^0(X, \Omega^1_X).$$

Dès lors comme X est connexe, on peut conclure à l'égalité des fonctions.

■

Bien qu'il n'y ait plus d'emploi explicite de la cohomologie de Weil dans la définition de la variété d'Albanese, celle-ci semble apparaitre pour définir le morphisme d'Abel-Jacobi.
Cela vient du fait qu'en codimension d l'équivalence homologique et l'équivalence numérique coïncident, on pourrait donc écrire ce morphisme avec cette équivalence.

L'application d'Abel-Jacobi va être très liée à la question de la dimension finie du groupe $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$, si celle ci est inconditionnellement un isomorphisme, il est alors légitime de dire que $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$ est de dimension finie. Ce n'est cependant pas le cas.

1.1.3 Dimension finie du groupe de Chow

On va donner trois définitions de la propriété de dimension finie, puis nous verrons que celles ci sont équivalentes. Pour la première on sait que par définition tout élément de $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$ s'écrit comme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - b_i$$

Pour un certain entier n, a_i et b_i des points de X, cela vient du fait que l'équivalence homologique et numérique coïncident. Une bonne propriété de dimension finie pourrait être de borner cet entier n sur tout $\mathrm{CH}^0_{\mathrm{hom}}(X)$. Nous allons à partir de maintenant utiliser plusieurs fois des résultats faisant intervenir des espaces quotients aux sens des schémas. Nous renvoyons à l'annexe B pour des informations élémentaires sur l'existence de ces objets.

Définition 1.1.5. *Soit X une variété projective lisse. On fait agir $\mathfrak{S}_n$ sur X^n par la permutation des facteurs de X^n. Comme X est projective on peut considérer le quotient $S^nX = X^n/\mathfrak{S}_n$ qui paramètre les n-uplets de points non ordonnés. Dès lors cet espace représente les diviseurs effectifs de dimension 0 et de degré n dans $\mathbb{Z}^d(X)$.*
Cette variété est donc appelée la variété de Chow de X.

Par définition tout élément de $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$ peut s'écrire comme une différence de diviseurs effectifs. Pour dire que ce groupe est de dimension finie, on veut borner le nombre de termes dans ces sommes. La définition suivante suit celle de Roitman dans [4].

Définition 1.1.6 (Représentabilité)**.** *On a un morphisme canonique*

$$\sigma_n : \begin{cases} S^nX \times S^nX \longrightarrow \mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X) \\ (a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \end{cases}$$

On dit que $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$ est représentable si ce morphisme est surjectif pour un entier n assez grand.

Il est évident que si le morphisme précédent est surjectif au rang n, il le sera aussi au rang $n+1$. Plus généralement la suite des $\mathrm{Im}(\sigma_n)$ est croissante.

Remarque. *On n'a donné que la définition de représentabilité pour le cas de l'équivalence rationnelle, mais Roitman la prolonge en fait à une relation dite de Γ-équivalence. Mais nous n'en aurons pas besoin ici.*

Cette définition ne fonctionne qu'en dimension 0. En dimension supérieure on a aussi une notion de variété de Chow qui paramètre les diviseurs effectifs d'un certain degré, mais cette variété ne s'écrit pas aussi simplement.

Une autre piste pour la notion de dimension finie peut être la suivante : étant donné que $S^nX \times S^nX$ a une structure d'espace analytique (singulier) de dimension finie, si le groupe de Chow a aussi une notion de dimension, il faudrait alors avoir un théorème de la dimension de la fibre. Dès lors la différence de la dimension de la fibre avec la dimension de $S^nX \times S^nX$ devrait rester bornée par un entier correspondant à la dimension de $\mathrm{CH}^d(X)$ lorsque n tend vers l'infini. Nous allons alors essayer de prendre cette propriété adhoc comme définition. Pour cela il faut commencer par étudier la structure des fibres de σ_n.

Lemme 1.1.7. *Pour tout entier n, les fibres du morphisme σ_n sont des unions dénombrables de sous espaces algébriques fermés de $S^nX \times S^nX$.*

Démonstration. La preuve qui suit est issue de ([21], 10.7).

Commençons par le cas des courbes projectives lisses qui nous resservira par la suite. Soit C une telle courbe. Dans ce cas on sait que les diviseurs de degré 0 forment une variété abélienne $\mathrm{Pic}^0(C)$, par ailleurs l'application de degré étant un morphisme surjectif, une translation permet de voir que les diviseurs de degré d forment une variétés que nous notons $\mathrm{Pic}^d(C)$. Plus précisément on a

$$\mathrm{CH}^0(C) = \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}} \mathrm{Pic}^d(C)$$

Fixons nous désormais un diviseur D de degré d et étudions les diviseurs qui lui sont équivalents. On a le morphisme

$$S^m C \times S^n C \longrightarrow \mathrm{Pic}^d(C)$$

qui est alors un morphisme de variétés projectives. L'ensemble des diviseurs équivalents à D est alors l'union des fibres de ces morphismes pour les couples (m, n) tels que $m - n = d$, c'est en particulier une union dénombrable. Par ailleurs pour (m, n) fixés, la fibre est une sous variété car on a un morphisme de variétés. Dès lors on a bien le résultat voulu.

Passons au cas général. Soit $Z = Z^+ - Z^-$ un diviseur de degré 0 dans $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$. La fibre de σ_n au dessus de Z correspond aux 0-cycles Z_1 et Z_2 tels que $Z_1 - Z_2 - Z = 0$ dans $\mathrm{CH}^d(X)$. Par définition de l'équivalence rationnelle cela signifie qu'il existe des courbes $C_i \subset X$ telles qu'après normalisation

$$\tau_i : \tilde{C}_i \longrightarrow C_i \hookrightarrow X$$

on ait des fonctions rationnelles ϕ_i sur $\tilde{C}_i$ telles que

$$Z_1 - Z_2 - Z = \sum_i (\tau_i)_* div(\phi_i) =: S.$$

Mais alors en décomposant en partie positive et partie négative on obtient des diviseurs effectifs A et B tels que

$$Z_1 + Z^- + A = S^+ + B \quad (1)$$
$$Z_2 + Z^+ + A = S^- + B. \quad (2)$$

Il y a alors plusieurs choix à faire, vérifions qu'a un nombre dénombrable près de paramètres, ils se font dans des variétés.

- Les courbes ont un polynôme de Hilbert de la forme $P(z) = \alpha z + \beta$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Dès lors le choix de C_i est paramétré par un nombre dénombrable de composantes irréductibles du schéma de Hilbert de X.
- Le choix de $\mathrm{div}(\phi_i)$ se fait parmi les diviseurs équivalents à 0 sur la courbe projective lisse $\tilde{C}_i$, et on a vu en préambule que ce cas était bien paramétré par un nombre dénombrable de variétés algébriques.
- Si on fixe a et b les degrés de A et B, leur choix se fait respectivement dans $S^a X$ et $S^b X$ qui sont bien des variétés.
- Le choix de τ_i peut être rendu canonique : pour une courbe il suffit de la normaliser pour la désingulariser, dès lors dans une carte affine τ_i correspond à l'inclusion d'un anneau dans sa clôture intègre, et il y a alors un seul tel morphisme.

En résumé, une fois que l'on a choisi un nombre dénombrable de paramètres, la donnée de $(C_i, \tau_i, \phi_i, A, B)$ se fait via une variété projective irréductible K. Alors la condition de l'équation précédente se traduit par une variété algébrique fermée dans $S^n X \times S^n X \times K$ via les équations (1) et (2). Enfin la fibre au dessus de Z est l'union de toutes ces variétés en faisant varier l'espace des paramètres dénombrables. D'où le résultat.

■

Arrêtons nous un instant sur la spécificité de ce résultat. On peut montrer sur certains exemple que le condition dénombrable est nécessaire : il n'est pas toujours possible d'avoir une union finie. Par ailleurs c'est encore le cas si on se restreint aux diviseurs effectifs.

Ainsi les cycles effectifs équivalents à un cycle de dimension 0 ne forment en général pas une variété algébrique. Cela contraste avec le cas de $\mathrm{CH}^1(X)$ où les diviseurs effectifs équivalents à un diviseur D sont paramétrés par la variété algébrique $\mathbb{P}(H^0(X, D))$.

Définition 1.1.7. *La dimension de la fibre de σ_n en Z est le maximum des dimensions des variétés algébriques qui la constituent (celle ci est majorée par $2nd$).*

Lemme 1.1.8. *Il existe un ensemble dénombrable de sous variétés Zariski-fermées strictes $Z_i \subset S^n X \times S^n X$ telles que sur*

$$B = S^n X \times S^n X - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Z_i$$

la fonction $Z \to \dim(\sigma_n^{-1}\{\sigma_n(Z)\})$ soit constante en une valeur que l'on note r_n.

Définition 1.1.8 (Dimension finie)**.** *On définit la dimension de* $\mathrm{Im}(\sigma_n)$ *par* $2nd - r_n$*. Dès lors on dit que* $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$ *est de dimension infinie si*

$$\lim_{n\to+\infty} \dim(\mathrm{Im}(\sigma_n)) = +\infty.$$

Sinon on dit que $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$ *est de dimension finie.*

La propriété suivante est donc vérifiée tautologiquement.

Proposition 1.1.9. *En tout point* $Z \in S^nX \times S^nX$ *on a l'inégalité suivante*

$$\dim(\sigma_n^{-1}\{\sigma_n(Z)\}) \geq \dim(S^nX \times S^nX) - \dim(\mathrm{CH}^0(X)).$$

De plus on a égalité sur une partie dense qui correspond au complémentaire d'une union dénombrable de fermés Zariski stricts.

On a en quelque sorte forcé la propriété de semi-continuité de la dimension des fibres. En effet par le lemme de Baire, une variété privée d'une union dénombrable de fermés de Zariski est dense, donc si la dimension des fibres est constante sur cet ensemble et que la fonction de dimension est semi-continue, alors cette valeur constante est nécessairement le minimum.

Notation. *Étant donné une partie* Z *dans* S^nX*,* $z \in X$ *et* $\pi_n : X^n \to S^nX$ *la projection canonique, on note* $\tilde{Z}$ *l'image par* π_{n+1} *de la partie* $\pi_n^{-1}(Z) \times X$ *dans* X^{n+1}*. Pour l'image de la partie* $\pi_n^{-1}(Z) \times \{z\}$ *on notera* $\tilde{Z}^z$

Proposition 1.1.10. *La suite des* $\dim(\mathrm{Im}(\sigma_n))$ *est croissante.*

Démonstration. L'assertion revient à prouver que $r_{n+1} \leq 2d + r_n$. Or par la proposition 1.1.9 ce nombre correspondait au minimum de la dimension des fibres et il est atteint sur X privé d'une union dénombrable de fermés B_n d'après le lemme 1.1.8. Notons p_1 et p_2 les deux projections canoniques sur $S^nX \times S^nX$.

Commençons par traiter le cas $n = 1$. Celui ci est évident car $r_0 = 0$ et $S^1X = X$ donc les fibres sont de dimension inférieure à $2d$.

Pour le cas général on se place dans $S^{n+1}X \times S^{n+1}X$ sur $U := S^{n+1}X \times S^{n+1}X - \widetilde{p_1(B_n)} \times \widetilde{p_2(B_n)}$ qui est donc bien le complémentaire d'une union dénombrable de fermés algébriques propres.
Pour $Z = (a_1, \cdots, a_n, x, b_1, \cdots b_n, y) \in U$ on a donc

$$\sigma_{n+1}^{-1}\left(\{\sigma_{n+1}(Z)\}\right) = \bigcup_{z,t\in X^2} p_1\left(\widetilde{\sigma_n^{-1}(\{\sigma_n(a,b)\})}\right)^z \times p_2\left(\widetilde{\sigma_n^{-1}(\{\sigma_n(a,b)\})}\right)^y,$$

où z, t sont tels que $z - t = x - y$. Par le cas $n = 1$ cela décrit un espace de dimension inférieure à $2d$.

Comme sur B_n la fonction de dimension des fibres était constante en r_n, on en déduit donc sur U elle est inférieure à $r_n + 2d$. Comme r_{n+1} représente le minimum des dimensions des fibres, on en déduit que $r_{n+1} \leq 2d + r_n$, ce que l'on voulait démontrer. ■

Dès lors la définition de dimension finie correspond au cas où la suite des dimensions stagne à partir d'un certain rang.

Au vu de ce que nous avons dit sur l'application d'Abel-Jacobi, une dernière possibilité pour la notion de dimension finie est de demander que l'application d'Abel-Jacobi soit un isomorphisme.

Définition 1.1.9 (Dimension finie d'Abel-Jacobi)**.** *Une variété* X *est de dimension finie au sens d'Abel-Jacobi si le morphisme*

$$\mathrm{AJ}^d : \mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X) \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$$

est un isomorphisme.

Lien entre les définitions Commençons par vérifier l'équivalence entre la représentabilité et la première définition de dimension finie.

Théorème 1.1.11. $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$ *est représentable si et seulement s'il est de dimension finie.*

Démonstration. Voir ([21], 10.10). ■

Voyons maintenant l'équivalence avec la troisième définition. Remarquons tout d'abord que dans celle ci seule l'injectivité pose problème.

Théorème 1.1.12. *L'application* AJ^d *est surjective.*

Démonstration. Cela résulte directement du théorème 1.1.4. ■

Notation. *On note* $T(X)$ *le noyau de l'application d'Abel-Jacobi.*

On se questionne donc sur l'injectivité de ce morphisme, on peut en fait se débarrasser du cas de la torsion grâce au résultat suivant.

Théorème 1.1.13 (Roitman)**.** *L'application d'Abel-Jacobi est un isomorphisme sur la partie de torsion.*

Démonstration. Voir [5]. ■

Pour la question de l'injectivité, on est donc ramené à la partie libre du groupe abélien, donc on peut se placer sur $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)_{\mathbb{Q}}$. On a encore un théorème de Roitman.

Théorème 1.1.14 (Roitman)**.** X *est représentable si et seulement si elle est de dimension finie au sens d'Abel-Jacobi.*

Démonstration. Un sens est évident. Si X est de dimension finie au sens d'Abel-Jacobi alors on a naturellement une structure de variété abélienne sur $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$. Dès lors on vérifie que l'application

$$\sigma_n : S^n X \times S^n X \longrightarrow \mathrm{Alb(X)}$$

est un morphisme entre variétés algébriques, et dès lors le théorème de la dimension des fibres permet de borner la quantité $2nd - r_n$ par $\dim(\mathrm{Alb}(X))$. On a donc bien la propriété de dimension finie et donc de représentabilité.

Pour la réciproque voir ([21], 10.11). ■

Ainsi toutes nos définitions de dimension finie coïncident, cependant nous allons voir qu'elles ne sont pas toujours satisfaites. Pour finir, la preuve de l'équivalence entre représentabilité et dimension finie au sens d'Abel-Jacobi fait intervenir un lemme technique qui donne une nouvelle définition possible pour la dimension finie. Commençons par un résultat annexe.

Lemme 1.1.15. *Tout variété projective* X *contient une courbe projective lisse qui est intersection complète d'hyperplans.*

Démonstration. Une fois que l'on a plongé X dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, le système linéaire induit par $\mathcal{O}_X(1)$ correspond aux hypersurfaces de X qui sont les intersections de X avec les hyperplans. Dès lors ce système linéaire est non trivial. Par la suite le théorème de Bertini nous assure qu'il y a une intersection lisse. On procède alors par récurrence. ■

Proposition 1.1.16. *On a une équivalence entre :*

- $\mathrm{CH}^d(X)$ *est représentable.*
- *Pour toute courbe lisse intersection complète de diviseurs ample (on abrègera en courbe lisse ample)* $j : C \to X$*, le morphisme induit*

  $$j_* : \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(C) = \mathrm{Pic}^0(C) \longrightarrow \mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$$

  est surjectif.

L'intérêt de cette propriété est que l'espace de départ de cette surjection est une variété algébrique.

Démonstration. Supposons le deuxième point vérifié et donnons nous C une courbe lisse ample dans X (possible grâce au lemme 1.1.15), notons g son genre. Notons d'abord que le $\iota_{x_0} : X \to \mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$ se prolonge en un morphisme $\iota_{x_0} : S^m X \to \mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$ et de même pour C. Par ailleurs pour $m = g$ sur la courbe C, ce morphisme est alors surjectif. Dès lors on a le diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
S^g C \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, two heads] & S^g X \arrow[d] \\
\mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(C) \arrow[r, "j_*"'] & \mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)
\end{tikzcd}
$$

Sous l'hypothèse de l'énoncé la flèche horizontale inférieure est surjective, dès lors on en déduit que $S^g X \to \mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$ est surjectif, donc le groupe est bien représentable.

Pour la réciproque nous renvoyons à ([21], 10.12). ■

Cette équivalence peut sembler arbitraire, mais en codimension plus petite elle sera la bonne définition de la notion de dimension finie.

Remarque. *Pour le moment nous n'avons pas pris soin de distinguer l'équivalence homologique, algébrique ou numérique que nous utilisions car celles-ci coïncident sur le groupe $\mathrm{CH}^d(X)$. Ce choix pourra avoir de l'importance par la suite.*

1.2 Propriétés des variétés à groupe de Chow représentable

Nous allons tout d'abord voir que contrairement aux cas de codimension 0 ou 1, il existe des variétés dont le groupe de Chow n'est pas représentable. Ces cas particuliers sont très génériques. Nous verrons ensuite les propriétés que nous pouvons déduire sur les variétés dont le groupe de Chow est représentable.

1.2.1 Existence de cas de dimension infinie

L'injectivité de l'application d'Abel-Jacobi échoue dès que $p_g \neq 0$ pour les surfaces. On a en fait un résultat plus précis de Roitman. Commençons par le résultat spécifique de Mumford.

Théorème 1.2.1 (Mumford)**.** *Soit S une surface projective lisse telle que $p_g := h^0(S, K_S) \neq 0$. Alors pour tout entier m, les fibres générales du morphisme σ_m sont dénombrables.*

En particulier elles sont de dimension 0, et donc $\dim(\mathrm{Im}(\sigma_m)) = 2md$ tend vers l'infini. Dès lors $\mathrm{CH}^2_{\mathrm{hom}}(S)$ n'est pas de dimension finie.

Démonstration. Voir ([21], 10.15). ■

Passons maintenant au résultat plus général.

Théorème 1.2.2 (Roitman)**.** *Supposons que $H^0(X, \Omega^k_X) \neq 0$ pour un entier k. Alors pour m assez grand, les fibres générales de l'application σ_m sont de dimension*

$$d_m < 2(d - k + 1)m.$$

Démonstration. Voir ([4], Théorème 5) ou ([21],10.16). ■

Voyons comment ce résultat s'applique à des questions de non représentabilité.

Corollaire 1.2.2.1. *S'il existe un entier $k > 1$ tel que $H^0(X, \Omega^k_X) \neq 0$, alors $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$ n'est pas de dimension finie.*

Démonstration. Par définition on a

$$\dim(\mathrm{Im}(\sigma_m)) = 2md - d_m$$

Or si $k > 1$ le théorème précédent donne la majoration $d_m < 2(d-1)m$ pour m assez grand. Mais alors à partir d'un certain rang on a

$$\dim(\mathrm{Im}(\sigma_m)) > 2md - 2(d-1)m = 2m$$

Donc cette dimension tend vers l'infini, ce qui est la définition d'être de dimension infinie. ■

Cette obstruction est très forte car de très nombreuses variétés la vérifient. C'est par exemple le cas des variétés de Calabi-Yau de dimension au moins 2 ou des intersections complètes de dimension au moins 2 et de degré assez grand dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Il existe cependant des variétés pour lesquelles ces groupes de cohomologies sont effectivement nuls comme par exemple les variétés de Fano, pour autant nous ne pouvons pas en conclure que ces variétés ont des groupes de Chow représentables car la condition n'est pas à priori suffisante. Malgré cela, il s'avère que l'on a bien $\mathrm{CH}_0(X) = \mathbb{Z}$ pour des variétés de Fano.

Par le théorème 1.1.14, on en déduit donc que si $p_g \neq 0$ pour une variété de dimension plus grande que 2, alors l'application d'Abel-Jacobi n'est pas injective. La réciproque pour les surfaces fait l'objet de la conjecture de Bloch.

Conjecture 1.2.1 (Bloch)**.** *Pour une surface S projective lisse, si $p_g(S) = 0$ alors l'application d'Abel-Jacobi est injective.*

Exemple 1.2.1. *Il est extrêmement facile de trouver des surfaces dont le genre géométrique n'est pas nul. Citons par exemple les variétés abéliennes, les surfaces K3, les produits de deux courbes de genre plus grand que 1, ou toute variété birationnellement équivalente à l'un des exemples précédents.*

Terminons enfin en donnant une nouvelle preuve du résultat de Mumford, dans un langage plus moderne qui sera celui employé dans les sections suivantes.

Théorème 1.2.3. *Si S est une surface dont le genre géométrique est non nul, alors l'application d'Abel-Jacobi n'est pas injective. Autrement dit le groupe $\mathrm{CH}^2_{hom}(S)$ n'est pas de dimension finie.*

Démonstration. Nous montrerons qu'il existe un motif rationnel $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)$ dont l'unique groupe de Chow non nul est $T(X)_{\mathbb{Q}}$ et qui a pour unique cohomologie non triviale $H^2_{\mathrm{tr}}(S)$. Si $p_g(S) \neq 0$, la décomposition de Hodge assure que cette cohomologie transcendante n'est pas nulle, en particulier le motif associé n'est pas trivial.

Enfin on remarquera que pour des motifs sur $\mathbb{C}$ il y a équivalence entre le fait d'être nul et le fait d'avoir tous ses groupes de Chow nuls. En particulier $T(X)_{\mathbb{Q}}$ ne peut pas être nul dès lors que le motif $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)$ n'est pas nul. D'où la non injectivité.

■

Remarque. *Cette preuve plus conceptuelle montre que si l'on voulait raisonner avec une cohomologie de Weil différente, l'invariant à prendre en compte ne serait pas forcément p_g mais plutôt $H^2_{tr}(S)$.*

1.2.2 Conséquences de la propriété de dimension finie

Même si le fait d'être de dimension finie n'est pas inconditionnel, voyons ce que cela implique sur la variété X. Ces propriétés sont assez fortes, ce qui renforce notre idée que la propriété de représentabilité devrait être assez rare.
Tout d'abord, comme on l'a déjà vu dans la preuve du théorème de Mumford, la propriété de dimension finie implique une forte contrainte sur certains des nombres de Hodge.

Théorème 1.2.4. *Si $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$ est de dimension finie, alors on a $H^0(X, \Omega^k_X) = 0$ pour $k > 1$.*

Démonstration. Il s'agit exactement de la contraposée du corollaire 1.2.2.1. ■

Par les symétries de Hodge et la dualité de Serre, on en déduit des nullités pour les cohomologies de $\mathcal{O}_X$ et de Ω^k_X a des ordres supérieurs. On dispose ensuite d'un résultat qui reprend une hypothèse similaire à celle de la proposition 1.1.16.

Théorème 1.2.5 (Bloch, Srinivas)**.** *S'il existe $j : X' \hookrightarrow X$ une inclusion d'une sous variété lisse de dimension inférieure à 3 telle que le morphisme induit $j_* : \mathrm{CH}_0(X') \to \mathrm{CH}_0(X)$ soit surjectif, alors la conjecture de Hodge est vraie pour X en dimension 4.*

De plus si X' est de dimension plus petite que 2, alors le groupe $\mathrm{Griff}^2(X)$ est de torsion (ce groupe sera défini dans la prochaine partie).

Démonstration. Voir ([21],10.26) et ([21], 10.27). ■

Remarque. *Dans le théorème précédent, on demande la surjectivité sur tout le groupe de Chow des 0-cycles, et pas seulement sur le sous groupe homologique, mais c'est en fait équivalent grâce au digramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{CH}^{d'}_{\mathrm{hom}}(X') & \longrightarrow & \mathrm{CH}^{d'}(X') & \longrightarrow & H^{2d'}(X',\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle j_*} & & \downarrow{\scriptstyle j_*} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{CH}^{d}_{\mathrm{hom}}(X) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^{d}(X) & \longrightarrow & H^{2d}(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Corollaire 1.2.5.1. *Si $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$ est de dimension finie, alors X vérifie la conjecture de Hodge en degré 4 et $\mathrm{Griff}^2(X)$ est de torsion.*

Démonstration. Prenons une courbe comme dans le lemme 1.1.15. Celle-ci vérifie alors la surjectivité au niveau des éléments homologiquements nuls grâce à la proposition 1.1.16. Dès lors on a le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{CH}^{1}_{\mathrm{hom}}(C) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^{1}(C) & \longrightarrow & H^{2}(C,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle j_*} & & \downarrow{\scriptstyle j_*} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{CH}^{d}_{\mathrm{hom}}(X) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^{d}(X) & \longrightarrow & H^{2d}(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Une chasse élémentaire dans ce diagramme prouve que le morphisme central est surjectif. On peut donc appliquer le théorème 1.2.5 pour conclure. ∎

Par la suite nous verrons d'autres applications de la propriété de représentabilité une fois que nous aurons introduit la notion de dimension finie au sens de Kimura. Dans tous les cas la représentabilité sera une hypothèse forte qui nous donnera beaucoup de contraintes.

1.3 Cas des groupes de Chow intermédiaires

Dans cette section nous allons voir ce qui peut être fait pour prolonger les idées de la partie précédente aux groupes de Chow intermédiaires. Pour cela nous commencerons par généraliser certains objets que nous avons vu apparaitre dans l'étude du cas de dimension 0. Cependant tous ne seront pas algébriques, ce qui empêchera de faire fonctionner en l'état nos méthodes dans un contexte plus général. Nous reviendrons ensuite sur le choix du sous groupe d'équivalence à étudier et nous estimerons la taille des différents quotients. Enfin nous donnerons quelques pistes pour généraliser tout ce que nous avons fait jusque ici dans un cadre algébrique sur d'autres corps et avec la cohomologie l-adique.

1.3.1 Retour sur l'application d'Abel-Jacobi

Pour les groupes de Chow intermédiaires on construit une Jacobienne intermédiaire. Nous gardons les notations définies au début de cette partie.

Définition 1.3.1. *Pour $k > 0$ un entier, on définit la jacobienne intermédiaire de degré $2k-1$ par*

$$J^{2k-1}(X) = \frac{H^{2k-1}(X,\mathbb{C})}{F^kH^{2k-1}(X,\mathbb{C}) \oplus H^{2k-1}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{libre}}}.$$

Où $F^lH^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p\geq l} H^{p,q}$ est la filtration induite par la décomposition de Hodge.

La jacobienne intermédiaire est clairement un tore complexe.

Remarque. *On peut définir $J^{-1}(X)$ comme étant le tore de dimension 0.*

Exemple 1.3.1. *Pour $k = 1$ on retrouve la variété de Picard $\mathrm{Pic}^0(X)$ usuelle et pour $k = d$ on retrouve la variété d'Albanese.*

Ces exemples peuvent être trompeurs car ce sont les seuls cas où la jacobienne intermédiaire est systématiquement une variété abélienne. Dans le cas général il se peut que cette variété ne soit pas projective. Dès lors cette construction semble difficilement généralisable à des corps autres que celui des complexes. Nous donnerons dans la prochaine partie une ébauche de construction dans le cadre l-adique mais qui ne prendra en compte que la partie de torsion.

On peut encore construire une application d'Abel-Jacobi, notée AJ^k ou encore Φ^k_X définie par Griffiths.

Définition 1.3.2 (Griffiths)**.** *L'application d'Abel-Jacobi d'ordre k est un morphisme de groupe*

$$\mathrm{AJ}^k = \Phi_X^k : \mathrm{CH}^k_{\mathrm{hom}}(X) \longrightarrow J^{2k-1}(X).$$

Pour la définir, on identifie la jacobienne intermédiaire avec

$$J^{2k-1}(X) = \frac{F^{d-k+1}H^{2d-2k+1}(X)^*}{H_{2d-2k+1}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{libre}}}$$

Pour un cycle Z homologiquement trivial irréductible lisse, on a alors une chaine lisse Γ telle qu'en homologie $\partial\Gamma = Z$. On pose donc

$$\mathrm{AJ}^k(Z) = \int_\Gamma .$$

Le cas général s'en déduit ensuite par des arguments de désingularisation et par linéarité.

Exemple 1.3.2. *Dans le cas $k = 0$ il s'agit du morphisme nul sur le groupe nul, dans le cas $k = 1$ il s'agit de l'isomorphisme qui identifie $\mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X)$ avec la variété de Picard. Enfin dans le cas $k = d$ celui-ci coïncide avec l'application d'Abel-Jacobi que l'on a défini en 1.1.4.*

Avec le formalisme de la cohomologie de Deligne on peut en fait prolonger la définition de l'application d'Abel-Jacobi à $\mathrm{CH}^k(X)$ entier.

Définition 1.3.3. *Soit p un entier strictement positif. On définit le complexe $\mathbb{Z}_D(p)$ de Deligne comme étant*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(2i\pi)^p} \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^{p-1}_X \longrightarrow 0$$

Où le terme $\mathbb{Z}$ est en degré 0 et $\mathcal{O}_X$ en degré 1. On pose alors $H^k_D(X,\mathbb{Z}(p)) = \mathbb{H}^k(X,\mathbb{Z}_D(p))$.

L'intérêt de ce groupe est qu'il forme une extension de $\mathrm{Hdg}^{2k}(X,\mathbb{Z})$ par la jacobienne intermédiaire $J^{2k-1}(X)$.

Proposition 1.3.1. *Pour un entier strictement positif p, on a une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow J^{2p-1}(X) \longrightarrow H^{2p}_D(X,\mathbb{Z}(p)) \longrightarrow \mathrm{Hdg}^{2p}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Démonstration. Désignons par $[-1]$ l'opérateur de décalage à droite sur les complexes. Par construction on a une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow \Omega_X^{\leq p-1}[-1] \longrightarrow \mathbb{Z}_D(p) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où le dernier terme est concentré en degré 0. Cette suite exacte courte induit une suite exacte longue en hypercohomologie. Or par définition de la filtration de Hodge on a

$$\mathbb{H}^k(X,\Omega_X^{\leq p-1}) = H^k(X,\mathbb{C})/F^pH^k(X,\mathbb{C})$$

Dès lors on a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H^k_D(X,\mathbb{Z}(p)) \longrightarrow H^k(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X,\mathbb{C})/F^pH^k(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{k+1}_D(X,\mathbb{Z}(p)) \longrightarrow \cdots$$

Si on applique cette suite exacte courte en $k = 2p$ on obtient le résultat voulu.

■

Par ailleurs l'application d'Abel-Jacobi et l'application classe de cycle donnent des morphismes qui s'inscrivent dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{CH}^k_{\mathrm{hom}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{AJ}^k"'] & \mathrm{CH}^k(X) \arrow[r] & Z^k_{\mathrm{hom}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{cl}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & J^{2k-1}(X) \arrow[r] & H^{2k}_D(X,\mathbb{Z}(k)) \arrow[r] & \mathrm{Hdg}^{2k}(X,\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Remarquons d'ailleurs que par définition $Z^k_{\mathrm{hom}}(X)$ s'identifie aux classes de Hodge algébriques de dimension $2k$, c'est donc un groupe abélien de type fini. La conjecture de Hodge détermine sa partie libre.

Proposition 1.3.2. *Il existe une unique application*

$$\mathrm{cl}^k_D : \mathrm{CH}^k(X) \longrightarrow H^{2k}_D(X, \mathbb{Z}(k))$$

qui fasse commuter le diagramme précédent.

Remarque. *Par définition de l'équivalence homologique, l'application* cl *est injective, donc par une chasse au diagramme on vérifie sans peine que l'injectivité de* AJ^k *est équivalence à l'injectivité de* cl^k_D.

Essayons maintenant de corriger le fait que la jacobienne intermédiaire ne pas abélienne.

Définition 1.3.4. *On définit* $J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X)$ *comme le plus grand sous tore de* $J^{2k-1}(X)$ *dont le tangent soit inclus dans* $H^{k-1,k}(X) = H^k(X, \Omega^{k-1}_X)$.

On pose ensuite $J^{2k-1}_{\mathrm{tr}}(X) = J^{2k-1}(X) \Big/ J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X)$.

Par construction $J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X)$ est un tore complexe dont la structure de Hodge de poids 1 est la plus grande sous structure de $H^{2k-1}(X, \mathbb{Z})(k-1)$ qui soit contenue $H^{k-1,k}(X) \oplus H^{k,k-1}(X)$. Il s'agit donc de $H^{2k-1}(X, \mathbb{Z}) \cap \left(H^{k-1,k}(X) \oplus H^{k,k-1}(X)\right)(k-1)$.

Notation. *On pose* $S = H^{2k-1}(X, \mathbb{Z}) \cap \left(H^{k-1,k}(X) \oplus H^{k,k-1}(X)\right)(k-1)$.

Lemme 1.3.3. *Le tore* $J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X)$ *est une variété abélienne.*

Démonstration. $J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X)$ est un tore dont on connait la structure de Hodge de poids 1, que l'on note S. Or dans l'équivalence de catégories entre les tores complexes et les structures de Hodge de poids 1, les variétés abéliennes correspondent aux structures de Hodge polarisables.

Justement comme X est projective, on a une polarisation sur $H^{2k-1}(X, \mathbb{Z})$ que l'on peut restreindre à S. Celle ci est compatible en terme de signature avec la règle que doit respecter une polarisation sur une structure de Hodge de poids 1, car $S_{\mathbb{C}}$ est un sous espace vectoriel de $H^{k-1,k}(X) \oplus H^{k,k-1}(X)$ sur lequel la règle de signes est respectée. Donc $J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X)$ est projective. ■

Exemple 1.3.3. *Si la structure de Hodge sur* $H^{2k-1}(X, \mathbb{Z})$ *est de niveau* 1 *(c'est à dire que la décomposition de Hodge ne contient que les termes* $H^{k,k-1}(X)$ *et* $H^{k-1,k}(X)$*) alors* $J^{2k-1}(X) = J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X)$*, donc la jacobienne intermédiaire est une variété abélienne.*

On retrouve en particulier le fait que la variété de Picard et la variété d'Albanese sont des variétés abéliennes.

Remarque. *La preuve précédente ne fonctionne pas pour montrer que* $J^{2k-1}(X)$ *est projective car dans sa structure de poids* 1 *le terme de type* $(1,0)$ *est* $\bigoplus_{l \geq k} H^{l,2k-1-l}$ *qui dispose aussi d'une polarisation, mais sa signature ne correspond pas à ce qu'elle devrait être sur un espace de type* $(1,0)$ *dans la définition d'une structure de Hodge polarisable.*

On peut en fait factoriser une partie de l'application d'Abel-Jacobi via ce sous tore.

Proposition 1.3.4. *On a l'inclusion*

$$\Phi^k_X(\mathrm{CH}^k_{\mathrm{alg}}(X)) \subset J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X).$$

Démonstration. Voir ([21], 12.19) ■

On peut donc introduire le dernier objet important.

Définition 1.3.5. *On définit le groupe de Griffiths par l'égalité suivante*

$$\mathrm{Griff}^k(X) = \frac{\mathrm{CH}^k_{\mathrm{hom}}(X)}{\mathrm{CH}^k_{\mathrm{alg}}(X)}.$$

On trouve donc une nouvelle factorisation de l'application d'Abel-Jacobi.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{CH}^k_{\mathrm{alg}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{CH}^k_{\mathrm{hom}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{AJ}^k"] & \mathrm{Griff}^k(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X) \arrow[r] & J^{2k-1}(X) \arrow[r] & J^{2k-1}_{\mathrm{tr}}(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

1.3.2 Propriétés des applications intermédiaires

Bien que l'on a pu définir tous les objets nécessaires à l'étude des codimensions intermédiaires, nous allons voir que leur comportement n'est pas aussi facile que ceux de la partie précédente.

Proposition 1.3.5. $\mathrm{Griff}^k(X) = 0$ *pour* $k \in \{0, 1, d\}$.

Démonstration. C'est une simple reformulation du fait que les équivalences algébriques et homologiques coïncident sur ces groupes de Chow. ∎

Théorème 1.3.6. *Le groupe de Griffiths est dénombrable.*

Démonstration. On se donne un diviseur ample H de X. Dès lors les sous variétés sont munies d'une notion de degré via la formule

$$\deg_H(Z) =< Z, H^{d-k} >$$

pour $Z \in \mathrm{CH}^k(X)$.

On peut alors considérer la variété de Chow qui paramètre les diviseurs effectifs de X de degré r et de codimension k. Il s'agit d'une variété projective $\mathrm{Chow}^k_{d,H}(X)$ qui est munie d'une famille universelle $Z_d \subset \mathrm{Chow}^k_{d,H}(X) \times X$ telle que la première projection donne toutes les familles de cycles effectifs de degré d sur X, et la deuxième projection de la fibre au dessus d'un point de la variété de Chow donne justement le cycle associé.

On constate ensuite que tout cycle homologiquement nul est de degré nul car $\mathrm{CH}^k_{\mathrm{hom}} \subset \mathrm{CH}^k_{\mathrm{num}}$, donc il s'écrit comme la différence de deux cycles effectifs d'un certain degré. Formellement on a un morphisme surjectif

$$\varphi : \bigsqcup_{d\in\mathbb{N}} \mathrm{Chow}^k_{d,H}(X) \times \mathrm{Chow}^k_{d,H}(X) \twoheadrightarrow \mathrm{CH}^k_{\mathrm{hom}}(X)$$

Comme la seconde projection sur Z_d est plate, on en déduit que tous les éléments de $\mathrm{Chow}^k_{d,H}(X)$ qui sont dans une même composante connexe sont algébriquement équivalents entre eux, car c'est exactement la définition de cette équivalence, en prenant pour espace de paramètre la variété $\mathrm{Chow}^k_{d,H}(X)$ et comme déformation la famille Z_d.

Donc dans le morphisme φ chaque image d'un $\mathrm{Chow}^k_{d,H}(X) \times \mathrm{Chow}^k_{d,H}(X)$ ne donne qu'un nombre fini de classes modulo l'équivalence algébrique (selon le nombre de composantes connexes). Ainsi quand on compose φ avec la projection sur $\mathrm{Griff}^k(X)$ on peut quotienter l'espace de départ pour qu'il ne soit constitué que d'une union dénombrable d'ensembles finis. Donc $\mathrm{Griff}^k(X)$ est bien dénombrable. ∎

Remarque. *Cette preuve montre en fait que* $\mathrm{CH}^k_{\mathrm{num}} \big/ \mathrm{CH}^k_{\mathrm{alg}}$ *est dénombrable.*

Cependant la propriété de dénombrabilité est plus faible que celle de type fini (comme le montre l'exemple de $\mathbb{Q}$). On a a ce propos des contre-exemples.

Exemple 1.3.4. *Sur une variété très générale de Calabi-Yau de dimension* 3*, le groupe* $\mathrm{Griff}^2(X)$ *n'est pas de type fini.*

Démonstration. Voir ([19]). ∎

Étudions maintenant le comportement de la partie transcendante de l'application d'Abel-Jacobi, c'est à dire le morphisme

$$\Phi^k_{X,\mathrm{tr}} : \mathrm{Griff}^k(X) \longrightarrow J^{2k-1}_{\mathrm{tr}}(X)$$

Proposition 1.3.7. *L'application $\Phi^k_{X,\mathrm{tr}}$ est surjective si et seulement si $J^{2k-1}_{\mathrm{tr}}(X) = 0$, si et seulement si $H^{2k-1}(X, \mathbb{Z})$ est de niveau 1.*

Démonstration. On a vu que le groupe $\mathrm{Griff}^k(X)$ était dénombrable, et $J^{2k-1}_{\mathrm{tr}}(X)$ est une variété complexe connexe, donc celle ci est indénombrable dès qu'elle est de dimension non nulle. Dès lors soit ce tore est nul et dans ce cas la surjectivité est évidente, soit ce tore est non nul, donc par un argument de cardinal, il est impossible que $\Phi^k_{X,\mathrm{tr}}$ soit surjective.

Pour la deuxième équivalence, si la structure de Hodge est de niveau 1, alors nécessairement $S = H^{2k-1}(X, \mathbb{Z})$, et donc $J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X) = J^{2k-1}(X)$. Donc la partie transcendante est bien nulle. Réciproquement si $J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X) = J^{2k-1}(X)$, alors

$$\sum_{i=0}^{k-1} h^{i,2k-1-i} = \dim(J^{2k-1}(X)) = \dim(J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X)) \leq h^{k-1,k},$$

et donc finalement tous les termes $h^{i,2k-1-i}$ doivent être nuls, donc la structure de Hodge est bien de niveau 1.

■

Sauf dans le cas de la variété d'Albanese et de la Jacobienne usuelle, on voit que ce critère sur la décomposition de Hodge peut échouer. Donc $\Phi^k_{X,\mathrm{tr}}$ échoue parfois à être surjective. Par ailleurs quand cela arrive c'est dans le cas où $J^{2k-1}_{\mathrm{tr}}(X)$ est nul, donc cette application n'est pas très intéressante. En revanche cela signifie que $J^{2k-1}(X) = J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X)$ est une variété abélienne, ce qui est intéressant.

Corollaire 1.3.7.1. *Si la structure de Hodge n'est pas de niveau 1 sur $H^{2k-1}(X, \mathbb{Z})$, alors l'application d'Abel-Jacobi*

$$\mathrm{AJ}^k : \mathrm{CH}^k_{\mathrm{hom}}(X) \longrightarrow J^{2k-1}(X)$$

n'est pas surjective.

Démonstration. En effet si elle l'était cela serait aussi le cas de sa partie transcendante, ce qui n'est pas le cas sous notre hypothèse.

■

En revanche il peut à priori arriver que la partie transcendante soit surjective, sans que l'application d'Abel-Jacobi ne le soit. Comme dans ce cas $J^{2k-1}(X) = J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X)$, cela n'est pas le cas si la conjecture suivante est vraie.

Conjecture 1.3.1. *La partie algébrique de l'application d'Abel-Jacobi*

$$\Phi_{X,\mathrm{alg}} : \mathrm{CH}^k_{\mathrm{alg}}(X) \longrightarrow J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X)$$

est surjective.

En résumé l'image de $\mathrm{CH}^k_{\mathrm{hom}}$ par l'application d'Abel-Jacobi intermédiaire va en général être une union dénombrable de copies de l'image de $\mathrm{CH}^k_{\mathrm{alg}}$, que l'on conjecture être une variété abélienne.

Proposition 1.3.8. *La conjecture de Hodge implique la conjecture 1.3.1.*

Démonstration. Notons $A = J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X)$. On a vu que A correspondait à S la plus grande structure de Hodge de poids 1 contenue $H^{k-1,k}(X) \oplus H^{k,k-1}(X)$. Mais alors si on note $n = \dim(A)$, on a un isomorphisme de structures de Hodge :

$$\alpha : H^{2n-1}(A, \mathbb{Z}) \simeq S \subset H^{2k-1}(X, \mathbb{Z})$$

Autrement dit α est une injection de structures de Hodge dans $H^{2k-1}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{libre}}$. Mais alors α correspond à une classe de Hodge dans $\mathrm{Hdg}^{2(k-n)}(A \times X, \mathbb{Z})_{\mathrm{libre}}$. Si la conjecture de Hodge est vérifiée, on a donc une classe algébrique $[Z]$ et un entier $N \neq 0$ tels que

$$N\alpha = [Z].$$

Or comme A est une variété abélienne, on a $A = \mathrm{Alb}(A)$ et Z induit un morphisme $A = \mathrm{Alb}(A) \to J^{2k-1}(X)$. Par ailleurs les tores complexes sont divisibles, donc comme α est surjective sur $J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X)$, c'est encore le cas de $N\alpha = [Z]$. Enfin on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^n_{\mathrm{alg}}(A) = \mathrm{CH}^n_{\mathrm{hom}}(A) \arrow[r, "Z_*"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{AJ}^n_A"'] & \mathrm{CH}^k_{\mathrm{alg}}(X) \arrow[d] \\ \mathrm{Alb}(A) \arrow[r, two heads, "{[Z]}"'] & J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X) \end{tikzcd}$$

L'égalité $\mathrm{CH}^n_{\mathrm{alg}}(A) = \mathrm{CH}^n_{\mathrm{hom}}(A)$ vient du fait que $n = \dim(A)$, et la surjectivité de la partie inférieure du diagramme ainsi que de AJ^n_A permettent de conclure à celle de $\mathrm{CH}^k_{\mathrm{alg}}(X) \to J^{2k-1}_{\mathrm{alg}}(X)$. D'où le résultat.

■

Dès lors on peut penser que le bon sous groupe à étudier pour la notion de dimension finie est le groupe $\mathrm{CH}^k_{\mathrm{alg}}(X)$. En effet parmi toutes les relations adéquates usuelles il est celui qui est le plus petit donc qui a le plus de chance d'être de dimension finie. Par ailleurs les quotients $\mathrm{CH}^k(X)\big/\mathrm{CH}^k_{\mathrm{hom}}(X)$ et $\mathrm{CH}^k_{\mathrm{hom}}(X)\big/\mathrm{CH}^k_{\mathrm{alg}}(X)$ sont respectivement dénombrables et de type fini, donc il ne sont assez petits pour que l'on puisse prétendre que le groupe de Chow total est de dimension finie. Par ailleurs l'étude qui précède montre que ces deux groupes s'inscrivent dans des suites exacte que l'on peut étudier.

1.3.3 Notion de dimension finie

Voyons enfin comment on peut généraliser la notion de dimension finie pour les groupes de Chow. Comme nous avions vu quatre définitions qui coïncidaient dans le cas de $\mathrm{CH}^d(X)$, on dispose de plusieurs idées de généralisation.

Définition 1.3.6. *On dit que $\mathrm{CH}^k(X)$ est de dimension finie au sens d'Abel-Jacobi si l'application d'Abel-Jacobi intermédiaire AJ^k est injective (on a déjà vu qu'elle n'était pas surjective).*

Exemple 1.3.5. *Dans le cas où $k = d$, on retrouve bien la définition usuelle de dimension finie. Par ailleurs dans le cas où $k \in \{0, 1\}$, il est bien connu que cette application est toujours injective comme on l'a étudié précédemment, donc ces groupes sont bien de dimension finie.*

Encore une fois on parle dimension finie en se restreignant à $\mathrm{CH}^k_{\mathrm{hom}}(X)$, ce n'est pas très important car on a vu en 1.3.1 que $Z^k_{\mathrm{hom}}(X) \subset \mathrm{Hdg}^{2k}(X, \mathbb{Z})$ est de type fini.
Comme on le montre le théorème de Roitman pour $k = d$, il n'est pas automatique que les groupes de Chow soient de dimension finie au sens d'Abel-Jacobi. On peut déduire facilement du corollaire 1.2.2.1 le résultat suivant.

Proposition 1.3.9. *Si $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X) = 0$, alors $H^0(X, \Omega^k_X) = 0$ pour tout $k > 0$.*

On a en se sens une généralisation.

Théorème 1.3.10. *Si il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \leq k_0$, l'application*

$$\mathrm{cl} : \mathrm{CH}_k(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow H^{2d-2k}(X, \mathbb{Q})$$

soit injective, alors on a $H^{p,q}(X) = 0$ pour $p \neq q \leq k_0$.

Démonstration. Ce résultat découle essentiellement d'une formule de décomposition de la diagonale due à Paranjape et Laterveer. Sous les hypothèses du théorème, il existe un entier non nul m, des sous variétés fermées Z_i et Z' de $X \times X$ pour $i \leq k_0$ telles que Z_i soit à support dans $W_i' \times W_i$ avec $\dim(W_i) = i$, $\dim(W_i') = d - i$, Z' à support dans $T \times X$ où $\mathrm{codim}(T) \geq k_0 + 1$, et on a la décomposition

$$m\Delta_X = Z' + \sum_{i=1}^{k_0} Z_i.$$

On renvoie à ([21], 10.29) pour une preuve de ce résultat. Passons maintenant au résultat annoncé.

On note W'_{ij} les composantes irréductibles de W'_{ij}, et de même pour celles de W_i, de sorte que

$$Z_i = \sum_j n_{ij} W'_{ij} \times W_{ij}.$$

On note par ailleurs $\tau : \tilde{T} \to X$ une désingularisation de T. Comme τ est génériquement finie, $(\tau \times \mathrm{Id}_X)_*$ est surjectif par la formule de projection. Dès lors il existe un cycle $\tilde{Z}'$ tel que $(\tau \times \mathrm{Id}_X)_*(\tilde{Z}') = Z'$. On applique ensuite le morphisme classe de cycle à la décomposition de la diagonale pour obtenir une égalité dans $H^d(X \times X)$. Cette égalité se traduit par une égalité entre morphismes de structures de Hodge sur $H^l(X, \mathbb{Z})$:

$$m \,\mathrm{Id} = \sum_{i=1}^{k_0} [Z_i]^* + [Z']^*.$$

Or l'action de Z_i se déduit de sa décomposition, en utilisant la forme d'intersection :

$$[Z_i]^*(\alpha) = \sum_j n_{ij} < \alpha, [W'_{ij}] > [W_{ij}].$$

Cette formule étant aussi vérifiée sur $H^l(X, \mathbb{C})$, on en déduit que $[Z_i]^*(\alpha) = 0$ pour $\alpha \in H^{p,q}(X)$, $p \neq q$ au vu de la compatibilité du produit d'intersection avec la décomposition de Hodge. Dès lors pour un tel α on a (formule de Liebermann)

$$m\alpha = [Z']^*(\alpha) = \tau_*([\tilde{Z}']^*(\alpha)).$$

Donc $\alpha \in \mathrm{Im}(\tau_*) \cap H^{p,q}(X)$. Mais comme on peut prendre T de codimension $k_0 + 1$, on a

$$\tau_* : H^{p+q-2k_0-2}(\tilde{T}, \mathbb{Z}) \to H^{p+q}(X, \mathbb{Z})$$

qui est un morphisme de structure de Hodge de poids $(k_0 + 1, k_0 + 1)$. Dès lors pour $q \leq k_0$, $\mathrm{Im}(\tau_*) \cap H^{p,q}(X) = 0$ pour cause de type étant donné que la structure de Hodge sur l'espace de départ est effective. On a donc $\alpha = 0$ dès que $\alpha \in H^{p,q}(X)$, $p \neq q \leq k_0$. D'où le résultat. ∎

Remarque. *La proposition 1.3.9 correspond au cas $k_0 = 0$.*

Ainsi on voit que le seul cas où toutes les applications de classes sont injectives (sur la partie libre) est celui où la cohomologie est concentrée en bidegré (k, k). C'est par exemple le cas des espaces cellulaires mais cela reste exceptionnel.

Il est donc de plus en plus compliqué de comprendre les groupes de Chow seulement via l'application classe de cycle et le morphisme d'Abel-Jacobi. Cependant on garde espoir de comprendre les groupes de Chow via la cohomologie en un sens plus général.

En effet ces deux applications permettent d'obtenir une filtration sur le groupe de Chow $\mathrm{CH}^d(X)$ via $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X)$ et $T(X)$. Si l'on n'arrive pas systématiquement à comprendre $T(X)$, il est naturel de penser que la filtration précédente doit être complétée. Celle mène aux idées de Bloch et Beilinson que nous développerons dans la partie 2, les objets à comprendre sont les gradués de cette filtration. Remarquons déjà que l'application classe de cycle venait d'une connexion entre le groupe $\mathrm{CH}^d(X)$ et la cohomologie $H^{2d}(X)$; de même le noyau $T(X)$ vient d'une interaction entre $\mathrm{CH}^d(X)$ et la variété d'Albanese que nous avons construit à partir de $H^{2d-1}(X)$. pour compléter la filtration il faudrait donc exhiber des termes venant d'une interaction entre $\mathrm{CH}^d(X)$ et des cohomologies d'ordre inférieur. C'est ce que supposent Bloch et Beilinson, plus précisément ils conjecturent

$$\mathrm{Gr}^\nu_F \,\mathrm{CH}^j(X)_\mathbb{Q} = \mathrm{Ext}^\nu_\mathcal{M}(\mathbf{1}, \mathfrak{h}^{2j-\nu}(X)(j))$$

où $\mathcal{M}$ est une certaine catégorie de motifs mixtes, mais nous ne développerons pas les outils pour comprendre cette interprétation.

Une autre idée pourrait être de repasser à une information antérieure, celle des motifs pour définir une notion plus générale de dimension finie. C'est ce point de vue que nous étudierons à partir de la partie 3.

1.4 Représentabilité sur des corps généraux

Finissons cette partie en donnant quelques notions sur la représentabilité des variétés algébriques sur d'autres corps. Bien que différents, les objets que nous allons exhiber sont inspirés des heuristiques vu précédemment.

Cadre. *Soit X une variété projective lisse de dimension d sur un corps k. On considère comme cohomologie de Weil une cohomologie l-adique pour $l \neq \mathrm{car}(k)$. Par ailleurs on considère les groupes de Chow à coefficients entiers.*

1.4.1 Applications classes de cycles généralisées

Comme pour toute cohomologie de Weil, on dispose d'une application classe de cycle dans la cohomologie étale. Cependant celle ci est calculée comme une cohomologie l-adique sur $\overline{X}$, mais elle est en fait définie sur X et pour des coefficients entiers. On a donc

$$\mathrm{cl} : \mathrm{CH}^j(X) \longrightarrow H^{2j}_{et}(X, \mathbb{Z}_l(j)).$$

On va maintenant essayer de prolonger les applications d'Abel-Jacobi.

Notation. *On note G_k le groupe de Galois absolu de k.*

Par des généralités sur la suite spectrale associée à une composition de foncteurs, on obtient le théorème suivant.

Théorème 1.4.1 (Hochschild-Serre)**.** *Il existe une suite spectrale $E_r^{p,q}$ telle que*

$$E_2^{p,q} = H^p(G_k, H^q_{\mathrm{t}}(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(j)))$$

et qui converge ver $H^{p+q}_{\mathrm{t}}(X, \mathbb{Z}_l(j))$. Par ailleurs cette suite spectrale tensorisée avec $\mathbb{Q}_l$ dégénère en page 2, donc on a

$$\mathrm{Gr}^{\nu}_F H^{2j}(X, \mathbb{Q}_l(j)) = H^{\nu}(G_k, H^{2j-\nu}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(j))).$$

Utilisons d'abord ce théorème dans le cas entier pour construire les applications d'Abel-Jacobi.

Au vu de la forme de la suite spectrale, il est clair que $E_{\infty}^{p,q}$ sera un sous objet de $E_2^{p,q}$ pour $p \in \{0, 1\}$.

Notation. *On note $\mathrm{CH}^j(X)_0$ le noyau de*

$$\mathrm{cl} : \mathrm{CH}^j(X) \longrightarrow H^{2j}_{et}(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(j)).$$

Restreignons le morphisme cl au sous groupe $\mathrm{CH}^j(X)_0$ et étudions dans quel degré de filtration se trouve l'image. Par définition de ce groupe son image dans $E_{\infty}^{0,2j}$ est nulle car cet espace est un sous espace de $H^{2j}_{et}(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(j))$. Dès lors l'image de $\mathrm{CH}^j(X)_0$ est contenue dans le premier terme de la filtration. On a donc un morphisme vers $E_{\infty}^{1,2j-1}$. Comme ce dernier espace est un sous ensemble de $H^1(G_k, H^{2j-1}_{et}(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(j)))$ on en déduit donc un morphisme

$$\mathrm{cl}' : \mathrm{CH}^j(X)_0 \longrightarrow H^1(G_k, H^{2j-1}_{et}(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(j)))$$

Définition 1.4.1. *Le morphisme que l'on vient de construire est dit d'Abel-Jacobi.*

Dans le cas de $\mathbb{Q}_l$ on a donc une filtration sur $H^{2j}(X, \mathbb{Q}_l(j))$ que l'on peut tirer en arrière sur $\mathrm{CH}^j(X)$ via l'application classe de cycle. Cette filtration vérifie trivialement les propriétés suivantes.

Proposition 1.4.2. *On connait les premiers termes de la filtration induite sur les groupes de Chow :*

- $F^0\,\mathrm{CH}^j(X) = \mathrm{CH}^j(X)$.
- $F^1\,\mathrm{CH}^j(X) = \mathrm{CH}^j_{\mathrm{hom}}(X)$ *où la nullité homologique est celle dans la cohomologie de $\overline{X}$.*
- $F^2\,\mathrm{CH}^j(X)$ *est modulo torsion le noyau de l'application d'Abel-Jacobi construite précédemment.*

Démonstration. Cela vient de la description explicite des gradués sur $H^{2j}(X, \mathbb{Q}_l(j))$ grâce au théorème 1.4.1. ■

Plus généralement on a par restriction des applications

$$\mathrm{cl}^{(\nu)} : F^{\nu}\,\mathrm{CH}^j(X) \longrightarrow \mathrm{Gr}^{\nu}_F H^{2j}(X, \mathbb{Q}_l(j)) = H^{\nu}(G_k, H^{2j-\nu}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(j))).$$

Cela réalise donc une partie du programme que nous avions énoncé précédemment : on a trouvé une filtration sur les groupes de Chow et on a relié ces filtrations à des objets cohomologiques de degré plus petit. Cependant il reste à comprendre les propriétés de ces morphismes, et à expliciter le terme d'arrivé qui dépend d'un groupe de Galois ; en effet ce qui fait office de Jacobienne intermédiaire est cette fois plus compliqué à étudié que les tores provenant du cas complexe.

1.4.2 Définitions de la représentabilité

Commençons par généraliser la définition de représentabilité pour $\mathrm{CH}^d(X)$ dans le cadre d'un corps. Pour cela on constate que toutes les définitions que l'on a vu précédemment font encore sens, et il est naturel de se demander lesquelles sont équivalentes, comme on l'a fait dans la section 1.1. Pour cela on dispose du résultat suivant.

Théorème 1.4.3. *Prenons $k \subset \Omega$ un corps algébriquement clos et considérons les assertions suivantes :*

1. *Il existe un entier n tel que le morphisme*

$$S^n X_\Omega \times S^n X_\Omega \longrightarrow \mathrm{CH}^d(X_\Omega)_0$$

soit surjectif.

1'. *La même chose sur $\mathrm{CH}^d(X_\Omega)_0 \otimes \mathbb{Q}$.*

2. *Il existe une courbe projective lisse C définie sur Ω et un morphisme $f : C \to X_\Omega$ tel que*

$$f_* : \mathrm{CH}^1(C)_0 \longrightarrow \mathrm{CH}^d(X_\Omega)_0$$

soit surjectif.

2'. *La même chose sur $\mathrm{CH}^d(X_\Omega)_0 \otimes \mathbb{Q}$ et $\mathrm{CH}^1(C)_0 \otimes \mathbb{Q}$.*

3. *Il existe un sous schéma fermé $Y \subset X$ de dimension 1 tel que $\mathrm{CH}^d((X - Y)_\Omega) = 0$*

3'. *La même chose sur $\mathrm{CH}^d((X - Y)_\Omega)_\mathbb{Q}$.*

4. *Il existe $B \subset X_\Omega$ une courbe lisse ample telle que $\mathrm{CH}^d(X_\Omega - B) = 0$.*

4'. *La même chose sur $\mathrm{CH}^d(X_\Omega - B)_\mathbb{Q}$.*

5. *L'application d'Abel-Jacobi*

$$\mathrm{CH}^d(X)_0 \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)_\Omega$$

est un isomorphisme.

5'. *La même chose après avoir tensorisé par $\mathbb{Q}$.*

Alors toutes les propositions sont équivalentes à leur version bis, et on a la chaine d'implications

$$(5) \implies (4) \implies (3) \implies (2) \implies (1).$$

Par ailleurs si Ω n'est pas dénombrable on a $(1) \implies (5)$. Dans ce cas toutes les propositions sont équivalentes entre elles.

Démonstration. Voir ([14], 1.6). ■

Ce résultat résume et généralise ce que nous avions étudié dans le cas complexe. Il est donc possible de prendre l'une de ces propriété comme notion de représentabilité, cependant il n'est pas évident de savoir laquelle est la plus légitime si Ω est dénombrable. Nous allons donner la bonne définition directement dans le cas de codimension quelconque.

La définition suivante suit celle de Bloch et Murre et s'inspire de la proposition 1.1.16. Comme on l'a argumenté dans la section 1.3.2, le sous groupe à considérer pour la notion de dimension finie devrait être celui de l'équivalence algébrique.

Définition 1.4.2. *Le groupe $\mathrm{CH}^i_{alg}(X)$ est représentable s'il existe une courbe projective lisse C, un cycle $Z \in \mathrm{CH}^i(C \times X)$, ainsi qu'un sous groupe algébrique $G \subset J(C)$ tels que le morphisme induit*

$$J(C_\Omega) = \mathrm{CH}^1_{\mathrm{alg}}(C) \longrightarrow \mathrm{CH}^i(X_\Omega)$$

soit surjectif de noyau G_Ω, pour Ω un corps algébriquement clos au dessus de k. Si cette surjectivité n'est vraie qu'après avoir tensorisé par $\mathbb{Q}$, on dit que le groupe est rationnellement représentable.

Comparons cette définition aux anciennes que nous avions proposé

Exemple 1.4.1. *Pour les cas de codimension $i \in \{0, 1\}$ on a toujours un groupe représentable.*

- *à $i = 0$ le groupe $\mathrm{CH}^0_{\mathrm{alg}}(V)$ est nul donc le résultat est trivial.*
- *à $i = 1$ on a $\mathrm{CH}^1_{\mathrm{alg}}(X) = \mathrm{Pic}^0(X)$, le résultat est vrai sur les corps infinis du fait que toute variété abélienne est alors dominée par la jacobienne d'une courbe.*
- *à $i = d$ sur $k = \mathbb{C}$ les définitions sont équivalentes par le théorème 1.4.3.*

1.4.3 Propriétés liées à la représentabilité

Maintenant que nous avons généralisé la notion de représentabilité à des corps quelconques, il est possible d'étudier les propriétés que cela impose à la variété X.

Cadre. *On suppose maintenant que k est algébriquement clos.*

Remarque. *La notion de représentabilité ne dépend que du choix de k et de Ω, rien n'est lié à la cohomologie de Weil dans cette propriété. En revanche les applications d'Abel-Jacobi sont définies par des cohomologies l-adiques, donc il n'est pas trivial que dans le cas complexe celles-ci soient reliées à ce que l'on trouve avec la cohomologie singulière.*

Commençons par reformuler une partie du théorème 1.4.3

Proposition 1.4.4. *Si $\mathrm{CH}^d(X)_0$ est rationnellement représentable alors l'application d'Albanese est un isomorphisme.*

Démonstration. C'est une reformulation du fait que $(3') \implies (1)$ dans le théorème 1.4.3 si l'on suppose que le corps est indénombrable. Dans le cas général voir ([28], Lemme 2). ■

Définition 1.4.3. *Un corps Ω est appelé domaine universel s'il est algébriquement clos et de degré de transcendance infini sur son corps premier. Autrement dit c'est un corps algébriquement clos indénombrable.*

Évidemment tout corps k peut être plongé dans un domaine universel via la clôture algébrique de $k(t_i,\ i \in \mathbb{N})$.

Un autre résultat intéressant à généraliser est l'algébricité du groupe H^2. En effet dans le cas complexe nous avons vu que si $\mathrm{CH}^d(X)$ est représentable, alors $p_g = 0$. En particulier la décomposition de Hodge et le théorème de Lefschetz impliquent que tous les éléments de $H^2(X, \mathbb{Q})$ sont algébriques. Nous voulons généraliser ce résultat sur un corps quelconque.

Proposition 1.4.5. *Si X est une variété sur un corps k qui vérifie la résolution des singularité en dimension $d-1$ et si $\mathrm{CH}^d(X)_0$ est représentable, alors les groupes $H^2(X)(1)$ et $H^{2d-2}(X)(d-1)$ sont algébriques.*
C'est en particulier le cas si X est une surface.

Démonstration. Dans le cas général voir ([28], Lemme 2). Il suffit de traiter le cas de H^2, l'autre s'en déduisant par le théorème de Lefschetz difficile.

Le cas particulier vient du fait que la résolution des singularités pour les courbes est toujours possible par normalisation. ■

Remarque. *La preuve précédente est en fait valable pour n'importe quelle cohomologie de Weil.*

Exemple 1.4.2. *On particulier on a un exemple où des conjectures de type Tate ou Ogus sont vérifiées sur les groupes H^2 et H^{2d-2}. Ceci était loin d'être évident car contrairement au cas de la cohomologie singulière, on ne dispose pas d'un résultat analogue au théorème $(1,1)$ de Lefschetz.*

Plus généralement on a les propriétés suivantes.

Théorème 1.4.6. *Supposons que le corps k vérifie la résolution des singularités pour les variétés de dimension $d-1$. Si $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{alg}}(X)$ est rationnellement représentable, alors les faits suivant sont vrais.*

- *$\mathrm{CH}^2_{\mathrm{alg}}(X)$ est représentable.*
- *L'inclusion $\mathrm{CH}^2_{\mathrm{alg}}(X) \subset \mathrm{CH}^2_{\mathrm{hom}}(X)$ est de conoyau nul si car$(k) = 0$ et de p torsion si car$(k) = p$. En particulier il y a égalité lorsque l'on tensorise avec $\mathbb{Q}$.*
- *$\mathrm{cl}^{(2)}$ est injectif et a un conoyau fini.*

Démonstration. Voir ([28], Lemme 2). ■

Exemple 1.4.3. *Le deuxième exemple assure que le deuxième groupe de Griffiths est nulle dans le cas complexe. C'est une amélioration du corollaire 1.2.5.1.*

Finalement nous avons bien généralisé l'étude de la section précédente sur un corps quelconque, mais il semble toujours difficile d'avoir une propriété de représentabilité car cela impose de nombreuses restrictions.

2 Conjecture de Bloch-Beilinson-Murre

Nous allons commencer par explorer la première piste qui a surgit de notre étude sur la représentabilité des groupes de Chow. Plus précisément nous allons essayer de trouver des filtrations intéressantes sur les groupes de Chow et de les relier à des informations motiviques. Pour cela nous commencerons par rappeler l'une des conjecture standard de Grothendieck. Dans toute cette partie nous adoptons le cadre suivant.

Cadre. *On prendra les groupes de Chow à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On se place par ailleurs sur des variétés projective lisses sur un corps k de dimension d et on se donne une cohomologie à coefficients dans un corps de caractéristique nulle (singulière ou étale). On notera K le corps des coefficients de la cohomologie de Weil.*

2.1 Décomposition de Künneth

2.1.1 Relèvement des projecteurs de Künneth

La conjecture de Künneth fait partie des conjectures standards. Celle-ci stipule que les éléments de $H^{2d}(X \times X)$ qui représente les projecteurs sur les composantes $H^i(X)$ proviennent des correspondances algébriques.

Notation. *On note Δ_i l'élément de $H^{2d}(X \times X)$ qui correspond à la projection sur $H^i(X)$.*

Conjecture 2.1.1 (Künneth)**.** *Il existe des cycles algébriques π_i tels que $H(\pi_i) = \Delta_i$.*

Remarque. *Ces projecteurs respectent clairement les structures de Hodge ou de G_k module, donc il n'est pas contradictoire de supposer qu'ils proviennent des correspondances.*

Ces correspondances permettent de faire remonter la graduation associée dans la catégorie des motifs homologiques.

Corollaire 2.1.0.1. *Si X vérifie la conjecture de Künneth, alors on a une décomposition*

$$\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_{i=0}^{2d} \mathfrak{h}^i(X)$$

dans la catégorie des motifs homologiques $Z_{\mathrm{hom}}(k)$.

Démonstration. Notons π_i les correspondances qui relèves projecteurs de Künneth Δ_i. Comme ces derniers forment un système complet d'idempotents orthogonaux et que le foncteur de cohomologie est fidèle sur $Z_{\mathrm{hom}}(k)$, on en déduit que c'est aussi le cas du système des π_i. Dès lors poser $\mathfrak{h}^i(X) = (X, \pi_i, 0)$ convient. ∎

Ce résultat est déjà intéressant mais il est tentant de relever cette décomposition dans la catégorie des motifs de Chow. Pour cela il faut faire en sorte que les relevés des projecteurs Δ_i forment encore un système complet d'idempotents orthogonaux, ce qui n'est pas évident à priori. On est donc amené à formuler une conjecture plus forte.

Conjecture 2.1.2 (Chow-Künneth)**.** *Il existe des correspondances $p_i(X) \in \mathrm{Corr}^0(X, X)$ qui relèvent les projecteurs de Künneth et qui forment un système complet d'idempotents orthogonaux.*

Pour que la conjecture de Künneth implique la conjecture de Chow-Künneth, il faudrait que l'on puisse relever les projecteurs homologiques tout en assurant que l'on garde la relation de système complet d'idempotents orthogonaux. Plus précisément on a le résultat suivant.

Proposition 2.1.1. *Si la conjecture de Künneth est vérifiée pour X et que l'idéal homologique est un nil-idéal dans $\mathrm{CH}^d(X \times X)$, alors la conjecture de Chow-Künneth est satisfaite.*

Démonstration. Cela découle du principe de relèvement des idempotents le long des idéaux nilpotents. On renvoie au lemme 3.1.11 pour une preuve de ce principe. ∎

Exemple 2.1.1. *Nous verrons prochainement que la deuxième hypothèse est satisfaite si la conjecture de Kimura-O'Sullivan est vérifiée.*

On peut alors utiliser ces projecteurs pour décomposer le motif associé à X.

Définition 2.1.1. *Sous la conjecture de Chow-Kunneth, on pose $\mathfrak{h}^i(X) = (X, p_i(X), 0)$. Par construction on a donc*

$$\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_{i=0}^{2d} \mathfrak{h}^i(X)$$

Cette décomposition n'est pas totalement canonique car les relevés ne sont pas uniques, en revanche elle est unique modulo l'équivalence homologique, et on conjecture que pour l'équivalence rationnelle elle est canonique modulo un isomorphisme naturel.

Terminons par une remarque élémentaire.

Proposition 2.1.2. *Si X et Y vérifient la conjecture de Chow-Künneth, alors $X \times Y$ aussi. En particulier si X vérifie la conjecture c'est aussi le cas de toutes ses puissances.*

Démonstration. Si les π_i^X sont les projecteurs associés à X et π_j^Y ceux associés à Y, alors la formule de Künneth en cohomologie montre que les projecteurs $\pi_k^{X\times Y} = \sum_{k=i+j} \pi_i^X \times \pi_j^Y$ relèvent les projecteurs de $X \times Y$. On vérifie alors sans peine les relations d'idempotence et d'orthogonalité. ■

2.1.2 Cas inconditionnels

La question précédente est encore ouverte, cependant on sait déjà relever certains projecteurs, sur toutes les variétés. Sans surprise ils s'agit de ceux pour $i \leq 1$ et $i \geq 2d - 1$.

En outre les actions de ces projecteurs sur les groupes de cohomologies sont évidentes du fait qu'ils relèvent les projecteurs de Künneth. En revanche leur action sur les groupes de Chow n'est pas imposée par la conjecture, nous essayerons alors de la déterminer.

Un problème fréquent que nous rencontrerons est l'utilisation d'objets qui ne sont définis que si le corps de base est algébriquement clos. Plus précisément nous utiliserons un k-point ainsi qu'une courbe ample C donnée par le théorème de Bertini, mais ces objets n'existent à priori que pour des corps algébriquement clos. Par un argument de descente galoisienne on peut en fait supposer qu'ils existent sur une extension galoisienne finie k' de k. Rappelons que la proposition 2.3.5 en annexe permet de relier les groupes de Chow entre les différents corps. On a plus précisément le résultat suivant.

Proposition 2.1.3. *Soit $k'|k$ une extension finie galoisienne de degré m et G le groupe de Galois associé. Soit X une variété sur k et X' son extension à k'. Posons $\beta : X' \times_{k'} X' \to X \times_k X$.*
Si $\pi'_1 \cdots \pi'_r$ est un système d'idempotents orthogonaux sur X' G-invariants, alors c'est le cas du système des $\pi_i = \frac{1}{m}\beta_*(\pi'_i)$ sur X. De plus si le premier est complet c'est aussi le cas du second.

Démonstration. D'après l'exemple 2.3.4, on a $X = X'/G$ dans le cas d'une extension finie galoisienne. Mais alors la proposition 2.3.5 montre que les morphismes β^* et $\frac{1}{m}\beta_*$ induisent un isomorphisme

$$\mathrm{CH}^i(X) \simeq \mathrm{CH}^i(X')^G.$$

On peut en particulier appliquer ce résultat à $i = d$ et à $X \times X$ dont l'extension est bien $X' \times X'$. Dès lors pour des projecteurs G-invariants π'_i orthogonaux, les π_i de l'énoncé donnent bien des cycles dans $\mathrm{CH}^d(X \times X)$. Montrons que ceux-ci sont encore un système d'idempotents orthogonaux. Pour cela vérifions la compatibilité de l'isomorphisme précédent avec la relation de composition des cycles.

Soit X, Y, Z des variétés, X', Y', Z' leurs changements de bases. Prenons $\alpha \in \mathrm{Corr}^q(X', Y')$ et $\gamma \in \mathrm{Corr}^s(Y', Z')$ des cycles G-invariants. Montrons que $\frac{1}{m}\beta_*$ respecte la loi produit. Pour plus de clarté nous préciserons β_X pour le morphisme de changement de base sur X.

Rappelons que par définition on a

$$\gamma \circ \alpha = (\mathrm{pr}_{X'Z'}^{X'Y'Z'})_* \left((\mathrm{pr}_{X'Y'}^{X'Y'Z'})^*(\alpha) \cap (\mathrm{pr}_{Y'Z'}^{X'Y'Z'})^*(\gamma) \right)$$

Or le diagramme suivant est un carré commutatif, donc on a $(\beta_{XZ})_* \circ (\mathrm{pr}_{X'Z'}^{X'Y'Z'})_* = (\mathrm{pr}_{XZ}^{XYZ})_* \circ (\beta_{XYZ})_*$.

$$\begin{array}{ccc}
X' \times Y' \times Z' & \xrightarrow{\beta_{XYZ}} & X \times Y \times Z \\
{\scriptstyle \mathrm{pr}^{X'Y'Z'}_{X'Z'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}^{XYZ}_{XZ}} \\
X' \times Z' & \xrightarrow[\beta_{XZ}]{} & X \times Z
\end{array}$$

Comme on suppose les cycles invariants par l'action de G, on peut les écrire comme des tirés en arrière par β de cycles sur les variétés X, Y, Z. La formule de projection permet alors de calculer la relation entre le poussé en avant et le produit d'intersection :

$$(\beta_{XYZ})_* \left((\mathrm{pr}^{X'Y'Z'}_{X'Y'})^*(\alpha) \cap (\mathrm{pr}^{X'Y'Z'}_{Y'Z'})^*(\gamma)\right) = \frac{1}{m}\left((\beta_{XYZ})_*(\mathrm{pr}^{X'Y'Z'}_{X'Y'})^*(\alpha)\right) \cap \left((\beta_{XYZ})_*(\mathrm{pr}^{X'Y'Z'}_{Y'Z'})^*(\gamma)\right)$$

Enfin on a les deux carrés cartésiens suivants auxquels on peut appliquer la formule de changement de base.

$$\begin{array}{ccc}
X' \times Y' \times Z' & \xrightarrow{\beta_{XYZ}} & X \times Y \times Z \\
{\scriptstyle \mathrm{pr}^{X'Y'Z'}_{X'Y'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}^{XYZ}_{XY}} \\
X' \times Y' & \xrightarrow[\beta_{XY}]{} & X \times Y
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
X' \times Y' \times Z' & \xrightarrow{\beta_{XYZ}} & X \times Y \times Z \\
{\scriptstyle \mathrm{pr}^{X'Y'Z'}_{Y'Z'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}^{XYZ}_{YZ}} \\
Y' \times Z' & \xrightarrow[\beta_{YZ}]{} & Y \times Z
\end{array}$$

Ainsi on a $(\beta_{XYZ})_* \circ (\mathrm{pr}^{X'Y'Z'}_{X'Y'})^* = (\mathrm{pr}^{XYZ}_{XY})^* \circ (\beta_{XY})_*$ et $(\beta_{XYZ})_* \circ (\mathrm{pr}^{X'Y'Z'}_{Y'Z'})^* = (\mathrm{pr}^{XYZ}_{YZ})^* \circ (\beta_{YZ})_*$. Cela prouve bien que $\frac{1}{m}(\beta_{XZ})_*(\gamma \circ \alpha) = (\frac{1}{m}\beta_{YZ})_*(\gamma) \circ (\frac{1}{m}\beta_{XY})_*(\alpha)$. D'où la compatibilité au produit des correspondances.

Ainsi comme le morphisme est compatible avec la loi de composition, on en déduit que les p_i sont aussi des idempotents et qu'ils sont encore orthogonaux entre eux. Enfin la compatibilité avec la loi de composition implique que $\frac{1}{m}\beta(\Delta_{X'}) = \Delta_X$, dès lors si le système de départ était complet, c'est aussi le cas du système des π_i.

■

Remarque. *Dans la preuve on a montré le fait auxiliaire utile que* $\frac{1}{m}\beta_*$ *est compatible à la loi de composition des correspondances lorsqu'on restreint ce morphisme à la partie invariante. C'est aussi le cas de* β^**.*

On peut maintenant justifier qu'il suffit de résoudre la conjecture de Chow-Kunneth sur X'. Contrairement à ce qui semble être insinué par certains auteurs, il ne nous semble pas évident que l'on peut toujours rendre G-invariant un système d'idempotents orthogonaux (l'opération de symétrisation n'est pas compatible à la composition des correspondances). En revanche nous pouvons conclure en rajoutant une hypothèse supplémentaire qui découlera de certaines conjectures que nous étudierons plus tard.

Corollaire 2.1.3.1. *Si la conjecture de Chow-Künneth est vérifiée sur* X' *pour une cohomologie de Weil classique, et si l'idéal homologique est nilpotent dans* $\mathrm{CH}^d(X' \times X')$*, alors la conjecture est aussi satisfaite par* X*.*

Démonstration. L'idée est de partir d'un système $\pi'_0, \cdots, \pi'_{2d}$ qui vérifie la conjecture de Chow-Künneth sur X' et de lui appliquer l'opérateur de symétrisation s. Les éléments obtenus ne sont plus forcement des idempotents orthogonaux, mais ils sont toujours des relevés des projecteurs de Künneth. Dès lors $s(\pi'_i)$ et π'_i diffèrent par un élément homologique. Comme l'idéal homologique est nilpotent, on peut modifier progressivement les $s(\pi'_i)$ pour en faire un système de projecteurs orthogonaux tout en restant G-invariant. Nous renvoyons à la preuve du théorème 3.3.12 pour les calculs précis.

■

Remarque. *La conjecture de Chow-Künneth dépend à priori du choix d'une cohomologie de Weil sur* X *et sur* X'*. La preuve précédente repose sur le fait que la cohomologie de Weil que l'on choisi sur* X' *est la restriction de celle que l'on s'est donné sur* X*, partant du fait que* X' *est à fortiori une variété projective lisse sur* k*.*

Cependant il n'est pas tout à fait évident que cette cohomologie de Weil sur les k'*-variétés soit celle que l'on veuille étudier. Si l'on s'intéresse à une cohomologie de Weil classique, il y a en général une comparaison claire entre le foncteur de Weil sur les* k'*-variétés vues comme* k*-variétés et le foncteur pris directement sur les* k'*-variétés :*

- *Il y a égalité dans le cas des cohomolgies* l*-adiques et singulières.*
- *Une extension des scalaires permet de passer de l'une à l'autre dans le cas de de Rham algébrique et dans le cas cristallin.*

On a donc ramené l'étude de la conjecture de Chow-Künneth à celui des corps algébriquement clos.

Cadre. *Dans cette section on supposera dès lors que la variété X possède un k-point e et une courbe ample C qui passe par e. Par la discussion précédente on peut toujours se ramener à ce cas.*

Pour l'existence du k-point on pourrait en fait se passer de faire une extension en prenant simplement un cycle Z défini sur k de degré d et en considérant $\frac{1}{d} \cdot Z$. L'essentiel est d'avoir un cycle de degré 1.

Remarque. *Notons cependant que cette réduction n'est possible que si l'on regarde des groupes de Chow à coefficients dans un corps de caractéristique nulle à cause de la normalisation par le degré d'une extension finie. Pour les groupes de Chow entiers il y a donc une obstruction qu'il pourrait être intéressant d'étudier.*

Les deux premiers cas sont élémentaires.

Proposition 2.1.4. *Si $d > 0$, il existe des projecteurs π_0 et π_{2d} qui relèvent les composantes de Künneth Δ_0 et Δ_{2d}. De plus ils sont orthogonaux entre eux et transposés l'un de l'autre.*

Démonstration. Soit e un k-point de X. On pose $\pi_0 = e \times X$ et $\pi_{2d} = X \times e$ qui sont des projecteurs sur X par un calcul direct évident. La relation de transposition est aussi évidente, tout comme l'orthogonalité. Montrons maintenant que ce sont bien des relevés des projecteurs de Künneth.

Comme e est de degré 1 et que l'application classe de cycle est compatible au cup-produit en cohomologie, on en déduit que $\mathrm{cl}(e) = 1 \in K \simeq H^{2d}(X)$. De même la classe de X est l'élément 1 dans $H^0(X)$. Finalement la classe de π_0 est bien l'élément identité dans $H^0(X)^* \otimes H^0(X) \simeq \mathrm{End}_K(H^0(X), H^0(X))$. En décomposant $H^d(X \times X)$ par la formule de Künneth, on a donc bien prouvé que π_0 relevait Δ_0.

Le même raisonnement prouve que π_{2d} relève Δ_{2d}. ■

Remarque. *Il y a ici un choix du point e. Cela ne nous importera pas pour la suite, mais cela montre que le relevé n'est pas canonique. Il peut par ailleurs être intéressant de se demander dans quelles circonstances ces relevés sont équivalents : c'est à dire quand est ce que les cycles associés sont rationnellements équivalents. Cela mène à des études profondes sur certaines classes de variétés.*

Précisons dès à présent les actions de ces projecteurs sur les groupes de Chow.

Proposition 2.1.5. *π_0 agit comme l'identité sur $\mathrm{CH}^0(X)$ et comme 0 sur les autres groupes de Chow.*

Démonstration. Par définition pour un cycle α on a

$$(\pi_0)_*(\alpha) = (\mathrm{pr}_2)_*(\alpha \times X \cap e \times X)$$

où $\mathrm{pr}_2 : X \times X$ est la seconde projection. Par compatibilité de l'intersection avec le produit, cette intersection vaut $(\alpha \cap e) \times X$. Or $e \in \mathrm{CH}^d(X)$, donc pour une raison de codimension seul le cas où α est de codimension 0 peut donner un résultat non nul. Dans ce dernier cas on sait que $\alpha = rX$ pour $r \in \mathbb{Q}$ et dès lors $\alpha \cap e = r \cdot e$. Donc l'intersection totale vaut $r \cdot e \times X$, et en projetant sur la seconde composante on obtient $rX = \alpha$. ■

Proposition 2.1.6. *L'action de π_{2d} sur $\mathrm{CH}^i(X)$ est nulle pour $i \neq d$. En $i = d$ on a*

$$(\pi_{2d})_*(\alpha) = \deg(\alpha) \cdot e.$$

Démonstration. Par définition pour un cycle α on a

$$(\pi_{2d})_*(\alpha) = (\mathrm{pr}_2)_*(\alpha \times X \cap X \times e)$$

Par compatibilité de l'intersection avec le produit, cette intersection vaut $\alpha \times e$. Comme la fonction pr_2 est un morphisme propre, la définition du poussé en avant montre que $(\mathrm{pr}_2)_*(\alpha \times e)$ est non nul que si α est de codimension d, et dans ce cas l'image est $\deg(\alpha) \cdot e$. ■

Pour les deux projecteurs suivants, la question est plus subtile, mais la réponse reste universelle.

Théorème 2.1.7 (Murre)**.** *Si $d > 0$, il existe des projecteurs π_1 et π_{2d-1} qui relèvent les composantes de Künneth Δ_1 et Δ_{2d-1}. De plus ils sont orthogonaux entre eux ainsi qu'aux projecteurs π_0 et π_{2d}.*

Démonstration. On construit seulement π_1 et on pose $\pi_{2d-1} = \pi_1(X)^\top$. On se contente ici seulement de définir les projecteurs pour pouvoir étudier leurs actions. On renvoie à ([32],6.2.1) pour la preuve des relations d'orthogonalité et de projection.

On se donne $i : C \hookrightarrow X$ l'inclusion d'une courbe projective lisse dans X qui est l'intersection de diviseurs amples. Celle ci existe bien par le théorème de Bertini. Dès lors on a $\alpha = i_* i^* : \mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Alb}(X)$ et on montre que ce morphisme est une isogénie. Dès lors on en déduit une isogénie $\beta : \mathrm{Alb}(X) \to \mathrm{Pic}^0(X)$ telle que $\alpha \circ \beta = m \cdot \mathrm{Id}$. Or par la propriété universelle de Alb(X), si on se fixe un point base $x_0 \in X$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{AV}}(\mathrm{Alb}(X), \mathrm{Pic}^0(X))$ représente les morphismes $X \to \mathrm{Pic}^0(X)$ qui envoient x_0 sur 0. Mais $\mathrm{Pic}^0(X)$ représente l'espace de module des diviseurs algébriques. Dès lors au morphisme β on peut associer $\mathrm{D}(\beta) \in \mathrm{CH}^1(X \times X)$ qui vérifie certaines propriétés, dont notamment

$$\mathrm{D}(\beta)_*^\top(e) = 0,\ \mathrm{D}(\beta) = \mathrm{D}(\beta)^\top.$$

Dès lors on pose $\pi_1 = \frac{1}{m}\mathrm{D}(\beta) \circ \Gamma_i \circ \Gamma_i^\top$. Autrement dit π_1 correspond au diviseur $\frac{1}{m}\mathrm{D}(\beta)$ que l'on restreint à $C \times X$ puis que l'on voit dans $X \times X$. ■

Remarque. *Pour les surfaces il faut en fait modifier un peu cette définition des projecteurs pour vérifier la relation d'orthogonalité. Ce n'est pas important pour notre étude de leur action sur les groupes de Chow.*

Remarque. *Ici encore il y a un choix d'une courbe C, cela n'impactera pas la suite de notre étude mais cela peut être gênant.*

Notation. *On notera* $\mathrm{D}(\beta)_C = \frac{1}{m}\mathrm{D}(\beta) \circ \Gamma_i \in \mathrm{CH}^1(C \times X)$.

Comme la courbe C est telle que $e \in C$, et puisque $\mathrm{D}(\beta)_*(e) = 0$, on en déduit que $(\mathrm{D}(\beta)_C) * (e) = 0$.

Proposition 2.1.8. *Le projecteur π_1 à une action non triviale uniquement sur $\mathrm{CH}^1(X)$. Sur celui ci π_1 agit comme un projecteur sur $\mathrm{CH}^1_{\mathrm{alg}}(X)$.*

Démonstration. Comme $\pi_1 = \frac{1}{m}\mathrm{D}(\beta) \circ \Gamma_i \circ \Gamma_i^\top$, on peut décomposer l'action de π_1 sur $\mathrm{CH}^k(X)$ de la façon suivante.

$$\mathrm{CH}^k(X) \xrightarrow{\Gamma_i^\top} \mathrm{CH}^k(C) \xrightarrow{\Gamma_i} \mathrm{CH}^{k+d-1}(X) \xrightarrow{\frac{1}{m}\mathrm{D}(\beta)} \mathrm{CH}^k(X)$$

Mais sur une courbe $\mathrm{CH}^k(C)$ est nul pour $k > 1$, donc par la décomposition précédente il est clair que π_1 a une action nulle dans ces cas.

Sur $\mathrm{CH}^0(X)$ l'action est aussi nulle car on doit avoir $(\pi_1)_*([X]) = (\pi_1)_*((\pi_0)_*([X]))$ étant donné que π_0 agit comme l'identité sur ce groupe de Chow. Mais alors $(\pi_1)_*((\pi_0)_*([X])) = (\pi_1 \circ \pi_0)_*([X]) = (0)_*([X])$ par la relation d'orthogonalité entre ces deux projecteurs. D'où le résultat.

Traitons enfin le cas où $k = 1$. Soit $D \in \mathrm{CH}^1(X)$, par définition on a $(\pi_1)_*(D) = (\mathrm{D}(\beta)_C)_*(C \cap D)$ où l'on voit $\mathrm{D}(\beta)_C$ comme une correspondance de C dans X. Comme $C \cap D$ correspond a un nombre fini de points sur C, on a un diviseur numériquement équivalent à $n \cdot e$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Or sur une courbe les équivalences numériques et algébriques coïncident, et on a la propriété de normalisation $(\mathrm{D}(\beta)_C) * (e)) = 0$, on en déduit que $(\pi_1)_*(D)$ est algébriquement nul. Pour les éléments D dans ce sous espace, ils correspondent à des points de $\mathrm{Pic}^0(k)$, donc par la propriété universelle de cet espace, on a bien une action identique.
Dès lors on a montré que π_1 avait son image inclus dans $\mathrm{CH}^1_{alg}(X)$ et qu'il valait l'identité sur cet espace. Ce que l'on voulait démontrer. ■

Proposition 2.1.9. *Le projecteur π_{2d-1} a une action triviale sur $\mathrm{CH}^i(X)$ pour $i \neq d$. En $i = d$ son action correspond à la projection sur la variété d'Albanese. Son noyau est donc $T(X)$.*

Démonstration. On a vu dans construction de π_1 que ce projecteur était (à équivalence près) à support dans $C \times X$ et que π_{2d-1} en était la transposée. Mais alors pour un cycle Z de codimension k, $Z \times X \cap \pi_{2d-1}$ est à support dans $Z \times C$, donc son image par pr_2 est de dimension 0 ou 1. Or $Z \times X \cap \pi_{2d-1}$ est de dimension $d - k$. Par définition du poussé par une application propre, le seul moyen que l'action soit non nulle est donc que $d - k \leq 1$. Donc l'action de π_{2d-1} sur $\mathrm{CH}^k(X)$ est nulle pour $k \notin \{d-1, d\}$. Un argument de normalisation montre encore que cette action est nulle en degré $d-1$.

Enfin en $k=d$, on sait que π_{2d} et π_{2d-1} sont orthogonaux donc $(\pi_{2d-1})_*(Z)$ est dans le noyau de $(\pi_{2d})_*$, c'est à dire que ce cycle est de degré 0. Par ailleurs comme π_1 vaut l'identité sur le groupe de Picard, c'est pas dualité aussi le cas sur la variété d'Albanese pour π_{2d-1}. Dès lors on a $\ker((\pi_{2d-1})_*) \subset T(X)$, montrons qu'il y a égalité.
Par construction on a $\pi_{2d-1} = \Gamma_i \circ \mathrm{D}(\beta)_C^\top$, donc une chasse élémentaire dans le diagramme suivant donne le résultat.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X) \arrow[rr, "(\pi_{2d-1})_*"] \arrow[dr] \arrow[ddd, "\mathrm{alb}_X"'] & & \mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X) \arrow[ddd, "\mathrm{alb}_X"] \\
& \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X) \arrow[ur] \arrow[d, "\simeq \mathrm{Alb}_C"] & \\
& J(C) \arrow[dr] & \\
\mathrm{Alb}(X) \arrow[rr, "\mathrm{Id}"'] \arrow[ur] & & \mathrm{Alb}(X)
\end{tikzcd}$$

■

On peut en fait caractériser de façon précise les motifs associés. Pour ne pas tourner en rond, on admet ce qui sera évoqué plus tard : il existe une manière canonique de construire une décomposition de Chow-Künneth sur les variétés abélienne. Nous préciserons ce théorème dans la partie suivante.

Dès lors les objets du théorème suivant peuvent faire sens de manière canonique.

Théorème 2.1.10. *Notons d_A la dimension de la variété d'Albanese de X. Pour les projecteurs précédents, on a des isomorphismes canoniques :*
- $\mathfrak{h}^0(X) \simeq \mathbf{1}$.
- $\mathfrak{h}^{2d}(X) \simeq \mathbf{1}(-d)$.
- $\mathfrak{h}^1(X) \simeq \mathfrak{h}^1(\mathrm{Pic}^0_{\mathrm{red}}(X))$.
- $\mathfrak{h}^{2d-1} \simeq \mathfrak{h}^{2d_A-1}(\mathrm{Alb}(X))(d-d_A)$.

Démonstration. Les deux premiers sont évidents en utilisant le morphisme structurel $X \to \mathrm{Spec}(k)$ et le morphisme $\mathrm{Spec}(k) \to X$ constant en le point e.

Pour les deux derniers on renvoie à ([32],6.2.1). ■

Ainsi ces motifs se comprennent essentiellement via la sous catégorie tensorielle engendrée par les variétés abéliennes. Cela permet de ramener de nombreuses informations sur des variétés abstraites à des informations sur une catégorie plus simple. Il sera naturel d'espérer continuer cette méthode à des ordres supérieurs, mais cela échoue.

Finissons enfin par une amélioration qui sera utilisé tout au long de la section suivante.

Proposition 2.1.11. *Pour une surface la conjecture de Chow-Künneth est vérifiée.*

Démonstration. En effet on a les projecteurs $\pi_0, \pi_1, \pi_3, \pi_4$ qui sont universels et il suffit de poser $\pi_2 = \Delta_X - \pi_0 - \pi_1 - \pi_3 - \pi_4$ qui permet bien de former un système complet d'idempotents orthogonaux. Comme les autres projecteurs relèvent les Δ_i et que Δ_X relève la classe de la diagonale dans la cohomologie, on en déduit que $H(p_2) = \Delta_2$. ■

Ici la construction de π_2 n'est absolument pas universelle, elle s'appuie seulement sur le fait que dans les surfaces ce projecteur est forcé d'exister car les autres prennent déjà tous les cas restants. Ce manque d'universalité explique que l'on ne peut pas généraliser cette remarque aux variétés de dimensions plus grandes, et est la cause de la compléxité du motif $\mathfrak{h}^2(X)$.

Remarque. *Pour le moment tous les projecteurs que l'on a construit vérifient la relation supplémentaire $\pi_i = \pi_{2d-i}^\top$, on peut ajouter cette égalité à la conjecture de Chow-Künneth.*

2.2 Filtrations conjecturales

2.2.1 Filtration de Bloch-Beilinson

On conjecture l'existence de filtrations sur les groupes de Chow des variétés projectives lisses. La première que nous allons étudier porte fondamentalement sur toute la catégorie car elle demande de respecter les correspondances. A partir de maintenant on suppose vérifié la conjecture de Chow-Künneth pour toutes les variétés sur k.

Conjecture 2.2.1 (Bloch-Beilinson)**.** *Pour toute variété projective lisse X, il existe une filtration décroissante F_{BB} sur chaque groupe $\mathrm{CH}^i(X)$ qui vérifie les axiomes suivantes*

1. $F^0_{BB}\,\mathrm{CH}^i(X) = \mathrm{CH}^i(X)$ *et* $F^1_{BB}\,\mathrm{CH}^i(X) = \mathrm{CH}^i_{\mathrm{hom}}(X)$.
2. *Pour le produit d'intersection on a la stabilité suivante*
$$F^r_{BB}\,\mathrm{CH}^i(X) \cdot F^s_{BB}\,\mathrm{CH}^j(X) \subset F^{r+s}_{BB}\,\mathrm{CH}^{i+j}(X)$$
3. *Pour tout morphisme $f : X \to Y$, les opérateurs f_* et f^* respectent la filtration.*
4. *Pour π_i une correspondance qui relève le projecteur de Künneth Δ_i, π_i agit sur $\mathrm{Gr}^{\nu}_F\,\mathrm{CH}^j(X)$ par $\delta_{i,2j-\nu} \cdot \mathrm{Id}$.*
5. $F^{j+1}_{BB}\,\mathrm{CH}^j(X) = 0$

A priori au point (3) on a seulement demandé la stabilité par l'action des morphismes, mais au point $4.$ on utilise l'action d'une correspondance quelconque. Ce n'est pas problématique grâce au lemme suivant.

Lemme 2.2.1. *Si le point (2) et (3) de la conjecture de Bloch-Beilinson est vérifié, alors pour Γ un cycle, son action sur les groupes de Chow respecte la filtration de Bloch-Beilinson.*

Démonstration. Soit $\Gamma \in \mathrm{Corr}^r(X, Y)$ et $\alpha \in F^{\nu}\,\mathrm{CH}^i(X)$. L'action est définie par
$$\Gamma_*(\alpha) = (\mathrm{pr}_Y)_*(\Gamma \cap (\mathrm{pr}_X)^*(\alpha))$$
En voyant Γ comme un élément de $F^0\,\mathrm{CH}^{d+r}(X \times Y)$ les axiomes (2) et (3) permettent de conclure que
$$\Gamma_*(\alpha) \in F^{\nu}\,\mathrm{CH}^{i+r}(Y)$$
Ce que l'on voulait démontrer.

■

Remarque. *Dans le point $4.$ l'action n'est à priori pas canonique car le relevé des projecteurs de Künneth n'est pas unique modulo l'équivalence rationnelle. Cependant celui ci est unique modulo l'équivalence homologique (par définition de cette équivalence).*

Mais alors deux relevés distincts diffèrent par un élément de $\mathrm{CH}^d_{\mathrm{hom}}(X \times X) = F^1_{BB}\,\mathrm{CH}^d(X \times X)$. Or par la propriété (2) cette différence augmente de 1 la filtration, donc son action est nulle sur les gradués.

Finalement l'action dans le point (4) ne dépend pas du choix du relevé.

En un certains sens c'est le point (4) qui est le plus important. Il permet de comprendre les gradués en fonction seulement de la cohomologie. En effet par les résultats que nous évoquerons plus loin sur la structure des endomorphismes des motifs, cela signifie qu'une correspondance agit sur les gradués uniquement par sa partie sur $\mathfrak{h}^i(X)$.

Dès lors toute l'information des groupes de Chow se trouverait relié aux groupes de cohomologie, ce qui est bien le programme que l'on cherche à mettre en place. De plus le choix de l'indice dans le symbole de Kronecker est cohérent avec ce que nous avons observé dans la première partie : le cran ν de la filtration sur $\mathrm{CH}^j(X)$ doit être uniquement relié à la cohomologie de degré $2j - \nu$, comme on l'a vu dans pour la variété d'Albanese ou avec la suite spectrale d'Hochschild-Serre.

Cette version de la conjecture de Bloch-Beilinson est très élémentaire, mais Beilinson la dérive en réalité d'une conjecture qui porte sur les motifs mixtes. Plus précisément il conjecture que

$$\mathrm{Gr}_F^\nu \mathrm{CH}^j(X) = \mathrm{Ext}^\nu_{\mathcal{M}}(\mathbf{1}, \mathfrak{h}^{2j-\nu}(X)(j)).$$

Dès lors l'action des correspondance se fait par composition, et comme il n'y a pas de morphismes entre les $\mathfrak{h}^i(X)$ différents (dans la catégorie des motifs homologiques, comme nous le verrons), il est clair que la seule action non triviale est celle pour laquelle $i = 2j - \nu$.

En particulier on obtient un morphisme du terme $F^\nu \mathrm{CH}^j(X)$ à valeur dans un certains groupe abélien. C'est une version motivique des applications d'Abel-Jacobi qui relie ce que nous avons dans le cas complexe et l-adique. En effet si on applique le foncteur de cohomologie on obtient les observations suivantes :

- Dans le cas $\nu = 0$, on trouve clairement l'application classe de cycle car $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, H^{2j}(X)(j)) = H^{2j}(X)(j)$.
- Dans le cas $\nu = 1$ pour la cohomologie de Hodge, le foncteur de réalisation dans la catégorie des motifs mixtes est à valeurs dans la catégorie des structures de Hodge mixtes, et on montre alors que le groupe d'extension est précisément la variété d'Albanese.
- dans le cas l-adique on obtient $\mathrm{Ext}^\nu_{G-\mathrm{mod}}(\mathbf{1}, H_l^{2j-\nu}(X)(j))$. Or la cohomologie au sens des groupes représente les foncteurs dérivés du foncteur de point fixe $A \to A^G$, et celui ci est en fait égal au foncteur $\mathrm{Hom}_{G-\mathrm{mod}}(\mathbf{1}, \cdot)$. Dès lors la définition en terme d'extension redonne celle que nous avons vu dans la section précédente.

2.2.2 Filtration de Murre

Murre conjecture aussi l'existence d'une filtration sur les groupes de Chow, l'avantage de cette conjecture est qu'elle a un sens pour X fixé.

Conjecture 2.2.2 (Murre). *Soit X une variété projective lisse sur un corps k.*

1. *On suppose tout d'abord que celle ci vérifie la conjecture de Chow-Künneth.*
2. *On suppose que sur $\mathrm{CH}^j(X)$ les actions des projecteurs $\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_{j-1}$ et $\pi_{2d}, \cdots, \pi_{2j+1}$ sont nulles. On peut alors définir la filtration suivante*

$$F^\nu \mathrm{CH}^j(X) = \ker(\pi_{2j}) \cap \cdots \cap \ker(\pi_{2j-\nu+1})$$

qui est clairement décroissante.

3. *$F^1 \mathrm{CH}^j(X) = \mathrm{CH}^j_{\mathrm{hom}}(X)$.*
4. *Cette filtration est indépendante du choix des projecteurs.*

Dans le point (3) une inclusion est par ailleurs triviale.

Lemme 2.2.2. *Pour la filtration de Murre, on a $F^1 \mathrm{CH}^j(X) \subset \mathrm{CH}^j_{\mathrm{hom}}(X)$.*

Démonstration. On par du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^j(X) \arrow[r, "\pi_{2j}"] \arrow[d, "\mathrm{cl}"'] & \mathrm{CH}^j(X) \arrow[d, "\mathrm{cl}"] \\ H^{2j}(X) \arrow[r, "\Delta_{2j}"'] & H^{2j}(X) \end{tikzcd}$$

Or par hypothèse sur F^1, ses éléments annulent π_{2j}, donc la partie supérieure du diagramme est nulle. Par ailleurs Δ_{2j} agit comme l'identité sur $H^{2j}(X)$, en particulier est injective. Dès lors le morphisme cl est nul sur F^1, donc on a bien l'inclusion cherchée. ■

Un autre avantage de cette filtration est que sa nullité à partir d'un certain rang est claire.

Proposition 2.2.3. $F^{j+1}CH^j(X) = 0$.

Démonstration. Par l'hypothèse (2), les projecteurs $\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_{j-1}$ et $\pi_{2d}, \cdots, \pi_{2j+1}$ ont une action nulle, or par définition de $F^{j+1}CH^j(X)$, les projecteurs $\pi_j, \cdots, \pi_{2j}$ y ont aussi une action nulle. Par l'égalité $\Delta_X = \sum_{i=0}^{2d} \pi_i$, on en déduit donc que Δ_X a une action nulle sur ce cran de la filtration. Or comme cette correspondance est aussi l'identité, on en déduit que l'espace est nul. ■

L'intérêt de cette filtration par rapport à celle de Bloch-Beilinson est à priori qu'elle est facile à définir une fois que l'on a la conjecture de Chow-Kunneth. Cependant elle ne semble pas vérifier d'aussi bonnes propriétés que la première. On peut tout fois les relier.

Théorème 2.2.4 (Jannsen)**.** *Les conjectures de Bloch-Beilinson et de Murre sont équivalentes, et si elles sont vraies elles induisent les même filtrations.*

Dès lors on parlera de conjecture et de filtration de Bloch-Beilinson-Murre (BBM).

On peut par ailleurs montrer que le point (4) de la conjecture de Murre découle des 3 premiers à condition de les avoir vérifiés pour toutes les sommes et puissances de X.

2.2.3 Vérification de la conjecture en petite dimension

Nous allons maintenant vérifier ces conjectures pour les variétés de dimension inférieures à 2. Pour la conjecture de Bloch-Beilinson nous omettrons le point de fonctorialité et pour la conjecture de Murre celui d'indépendance du choix des projecteurs.

Commençons par rappeler qu'en dimension inférieure à 2 la conjecture de Chow-Kunneth est vérifiée. Par ailleurs le cas du point est trivial, traitons donc d'abord les courbes.

Proposition 2.2.5. *Les courbes vérifient les points* $1, 2, 4, 5$ *de la conjecture de Bloch-Beilinson et les points* $1, 2, 3$ *de la conjecture de Murre.*

Démonstration. On a déjà vu que la conjecture de Chow-Kunneth était vérifiée sur les courbes.

Pour la conjecture de Bloch-Beilinson, considérons les deux filtrations suivantes.

$$\mathrm{CH}^0(X) \supset 0$$

$$\mathrm{CH}^1(X) \supset \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X) \supset 0$$

Les points (1) et (5) sont vérifiés par construction, Pour le point (2) le seul produit à justifier est

$$\mathrm{CH}(X)^0(X) \cap \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X) \subset \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X).$$

Cela vient simplement du fait que l'équivalence homologique définit un idéal. Le point (4) est aussi clair.

Pour la conjecture de Murre les projecteurs sont les π_0, π_1, π_2 usuels. Sur $\mathrm{CH}^0(X)$ il est connu que π_2 et π_1 agissent trivialement sur CH^0. Par ailleurs π_0 agit par l'identité. Donc on obtient la filtration

$$\mathrm{CH}^0(X) \supset 0$$

Sur $\mathrm{CH}^1(X)$ il est aussi connu que π_0 agit trivialement, que π_2 a pour noyau les cycles homologiquement triviaux et que π_1 est le projecteur sur CH^1_{hom}. Dès lors on a la filtration

$$\mathrm{CH}^1(X) \supset \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X) \supset 0$$

Les points (2) et (3) sont donc bien vérifiés.

■

On peut en fait utiliser un résultat plus général qui nous resservira par la suite.

Proposition 2.2.6. *Si X vérifie la conjecture de Chow-Kunneth pour des projecteurs π_0 et π_1 qui sont ceux que l'on a défini précédemment, alors les points (2) et (3) de la conjecture de Murre sont vrais pour les groupes* $\mathrm{CH}^1(X)$ *et* $\mathrm{CH}^0(X)$.

Démonstration. On sait que π_1 agit comme un projecteur sur $\mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X)$. Dès lors pour $i \neq 1$ et $D \in \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X)$ on a

$$(\pi_i)_*(D) = (\pi_i \circ \pi_1)_*(D) = 0$$

$(\pi_i)_*$ est donc nul sur la partie algébrique. En particulier pour π_2 on a $\ker(\pi_2) = \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X)$. Cela prouve le point (3).

Passons maintenant au cas général. Soit D un élément quelconque de $\mathrm{CH}^1(X)$ et $i \notin \{1, 2\}$, on a

$$0 = (\pi_2 \circ \pi_i)_*(D)$$

Donc $(\pi_i)_*(D) \in \ker(\pi_2) = \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X)$. Dès lors comme π_i est un projecteur on a

$$(\pi_i)_*(D) = (\pi_i \circ \pi_i)_*(D) = 0$$

car $(\pi_i)_*(D)$ est dans $\mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X)$ qui est dans le noyau de $(\pi_i)_*$. D'où le point (2).

Le même raisonnement fonctionne sur $\mathrm{CH}^0(X)$: tous les projecteurs sont orthogonaux à π_0 qui agit comme l'identité sur le groupe de Chow. ■

Passons maintenant au cas plus intéressant des surfaces. Pour cela nous allons utiliser la table suivante qui donne les groupes de Chow des motifs $\mathfrak{h}^i(S)$. Les cas $i \neq 2$ ont déjà été traités précédemment, et nous verrons dans la partie suivante comment trouver les groupes de Chow pour $i = 2$.

M	$\mathfrak{h}^0(X)$	$\mathfrak{h}^1(X)$	$\mathfrak{h}^2(X)$	$\mathfrak{h}^3(X)$	$\mathfrak{h}^4(X)$
$\mathrm{CH}^0(M)$	$\mathrm{CH}^0(X) = \mathbb{Q}$	0	0	0	0
$\mathrm{CH}^1(M)$	0	$\mathrm{Pic}^0_{\mathrm{red}}(X)(k)$	$\mathrm{NS}(X)$	0	0
$\mathrm{CH}^2(M)$	0	0	$T(X)$	$\mathrm{Alb}(X)(k)$	$\mathrm{Num}(X) = \mathbb{Q}$

Proposition 2.2.7. *Les surfaces vérifient les points* $1, 2, 4, 5$ *de la conjecture de Bloch-Beilinson et les points* $1, 2, 3$ *de la conjecture de Murre.*

Démonstration. Pour la conjecture de Murre prenons les projecteurs construits dans la section précédente, cela donne une preuve du point (1). Par l'axiome (2) il ne reste qu'à le vérifier sur le groupe $\mathrm{CH}^2(X)$ grâce à la proposition 2.2.6. La table précédente montre alors que le point (2) est bien vérifié. Reste à prouver l'égalité $F^1 \mathrm{CH}^2(X) = \mathrm{CH}^2_{\mathrm{hom}}(X)$. Cela découle alors directement d'une étude de la table précédente.

Pour la conjecture de Bloch-Beilinson prenons les 3 filtrations suivantes.

$$\mathrm{CH}^0(X) \supset 0$$

$$\mathrm{CH}^1(X) \supset \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X) \supset 0$$

$$\mathrm{CH}^2(X) \supset \mathrm{CH}^2_{hom}(X) \supset T(X) \supset 0$$

Les points (1) et (5) sont donc bien vérifiés. Pour le second point, si le premier terme est $\mathrm{CH}^0(X)$, la stabilité est évidente car on dilate les éléments, si c'est $\mathrm{CH}^1(S)$, la stabilité découle soit d'un argument de codimension, soit du fait que la nullité homologique définit un idéal. Enfin montrons que

$$\mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X) \cdot \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X) \subset T(X).$$

Cela vient de la formule usuelle pour l'application d'Abel-Jacobi

$$\mathrm{AJ}^2(Z \cap Z') = \mathrm{cl}(Z) \cup \mathrm{AJ}^1(Z') + \mathrm{AJ}^1(Z) \cup \mathrm{cl}(Z').$$

Donc comme Z et Z' sont homologiquement nuls, $\mathrm{cl}(Z) = \mathrm{cl}(Z') = 0$, d'où le résultat.

Enfin les actions du point 4 se vérifient sur la table que nous avons rappelé. ■

2.2.4 Décomposition des morphismes

Partant d'une variété X, on a décomposé son motif en une somme de motifs $\mathfrak{h}^i(X)$. Il est naturel de se demander quel est l'influence de cette décomposition sur l'espace des morphismes. Nous allons commencer cette étude dans la catégorie des motifs homologiques.

On a vu la décomposition de Künneth pour les motifs de la forme $\mathfrak{h}(X)$. Comme tout motif s'écrit $p\mathfrak{h}(X)(r)$ pour un certain projecteur p, on en déduit des décompositions

$$M = \bigoplus_{i=0}^{2d} p\mathfrak{h}^i(X)(r).$$

Définition 2.2.1. *Un motif est dit de poids i s'il est isomorphe à un motif de la forme $p\mathfrak{h}^{2r+i}(X)(r)$.*

Cette notion est pour le moment ambiguë car il n'est pas clair qu'un motif n'ait qu'un seul poids, et l'existence des motifs $\mathfrak{h}^{2r+i}(X)$ est la plupart du temps une conjecture.

Exemple 2.2.1. *Si un motif est de poids i, alors $M(r)$ est de poids $i-2r$. Si X est pure de dimension d, alors $\left(\mathfrak{h}^i(X)\right)^\vee$ est de poids $-i$ à condition que l'on vérifié la conjecture de Künneth forte où $\pi_i^\top = \pi_{2d-i}$.*

Proposition 2.2.8. *Soit M et M' des motifs de poids i et j, alors on a*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{hom}}(\mathfrak{h}^i(X), \mathfrak{h}^j(Y)) = 0$$

pour $i \neq j$.

Démonstration. En effet un tel morphisme se traduit par une correspondance Γ de degré 0 , dès lors sa composition en cohomologie préserve le degré, c'est à dire

$$[\Gamma] : H(X) \longrightarrow H(X)$$

envoie $H^i(X)$ dans $H^i(X)$. En particulier cela induit un morphisme nul entre $H^i(X)$ et $H^j(X)$. Comme le foncteur H est fidèle sur les motifs homologiques, on en déduit que le morphisme de motifs est nul. D'où le résultat. ∎

On a donc montré que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{hom}}(\mathfrak{h}(X), \mathfrak{h}(Y)) = \bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\mathrm{hom}}(\mathfrak{h}^i(X), \mathfrak{h}^i(Y)),$$

ce qui prend la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & & * \end{pmatrix}$$

La situation dans la catégorie des motifs homologique est donc très simple. Nous allons essayer de faire passer cette décomposition dans la catégorie des motifs de Chow. En particulier on trouvera encore certains espaces nuls. Pour cela nous allons supposer que la conjecture BBM est satisfaite.

Cadre. *On se donne π_i^X et π_j^Y des projecteurs sur X et Y qui relèvent les composantes de Künneth. Sur $Z = X \times Y$ on suppose que l'on a pris les relevés correspondant à*

$$\pi_m^Z = \sum_{r+s=m} \pi_r^X \times \pi_s^Y.$$

On va travailler dans la catégorie des motifs de Chow et on suppose que la conjecture BBM est vérifiée.

Remarque. *Il suffit en fait seulement de supposer certain aspects de la conjecture de Murre, et ceci uniquement pour X, Y et $X \times Y$.*

Pour définir la notion de poids pour des motifs de Chow, il ne faut pas seulement supposer la conjecture de Künneth, mais bien la conjecture de Chow-Künneth.

Théorème 2.2.9. *On suppose vérifié la conjecture BBM. Soit M et M' deux motifs de poids i et j pour $i < j$. Alors on a*

$$\mathrm{Hom}(M, M') = 0.$$

Cependant si M et M' sont de même poids, alors on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chow}}(M, M') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{hom}}(M, M').$$

Démonstration. Dans la seconde assertion, par un argument de dualité on se ramène au cas où $M = \mathbf{1}$ et $M' = e\mathfrak{h}^{2r}(X)(r)$ est de poids 0. Dans ce cas le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chow}}(M, M')$ est simplement $p\pi_{2r}\,\mathrm{CH}^r(X)$. Il faut donc montrer l'injectivité de la projection canonique $\mathrm{CH}^i(X) \to Z_{\mathrm{hom}}(X)$ (sa surjectivité est tautologique), ou au moins que l'image par le projecteur $e\pi_{2r}$ de son noyau est nul. Or son noyau est exactement le premier terme de la filtration de Bloch-Beilinson.

Il nous suffit donc de montrer que le projecteur π_{2r} a une action nulle sur $F^1\,\mathrm{CH}^r(X)$ en montrant que son action est nulle sur tous les gradués $\mathrm{Gr}_F^{\nu}\,\mathrm{CH}^r(X)$ pour $\nu \geq 1$. Cela découle alors directement du point (4) de la conjecture de Bloch-Beilinson.

Pour la première assertion, on se ramène de même au cas $M = \mathbf{1}$ et $M' = e\mathfrak{h}^{2r'}(X)(r)$ pour $r' > 2r$. Dès lors on veut montrer que le groupe $\pi_{2r'}\,\mathrm{CH}^r(X)$ est nul. Pour cela il suffit de montrer que l'action de $\pi_{2r'}$ est nulle sur tous les gradués de CH^r, ce qui découle encore du point (4) de la conjecture de Bloch-Beilinson. ■

En terme matriciel on peut donc décomposer les éléments de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}(X), \mathfrak{h}(Y))$ de la façon suivante.

$$\begin{pmatrix}
\mathrm{rat} = \mathrm{hom} & * & * & & * & * \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & & * \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\
0 & & \ddots & \ddots & \ddots & * \\
0 & 0 & & 0 & & \mathrm{rat} = \mathrm{hom}
\end{pmatrix}$$

Le cas de même poids est particulièrement intéressant car alors l'espace des morphismes entre les motifs se plonge dans l'espace des morphismes entre les cohomologies associés par fidélité du foncteur de cohomologie. De plus si une conjecture de type Hodge ou Tate est vérifiée, on pourrait décrire cet espace comme celui des morphismes entre structures de Hodge ou structures avec une action du groupe de Galois. Par exemple sous la conjecture de Hodge on aurait :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chow}}(\mathfrak{h}^i(X), \mathfrak{h}^i(Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hodge}}(H^i(X), H^i(Y)).$$

Corollaire 2.2.9.1. *La notion de poids est non ambiguë dans la catégorie des motifs rationnels. C'est à dire qu'un motif ne peut pas avoir deux poids distincts sauf s'il est nul.*

Démonstration. En effet si M était de poids i et j pour $i \neq j$, on aurait $\mathrm{Hom}(M, M) = 0$ en voyant l'espace de départ comme de poids i et celui d'arrivé comme de poids j. Cet espace contenant l'identité, on en déduit que M est nul. ■

Dans le cas des surfaces où l'on dispose d'un raffinement de la décomposition de Chow-Künneth en une partie algébrique et une partie transcendante (voir la partie suivante), il est naturel de vouloir étudier les morphismes sous cette décomposition raffinée. On a le résultat suivant.

Lemme 2.2.10. *Étant donné deux surfaces S et S', on a les deux égalités suivantes.*

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S), \mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S')) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S), \mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S')) = 0.$$

Démonstration. Voir ([32], 7.6.4). ∎

Reste à traiter le cas des endomorphismes.

Proposition 2.2.11. *Soit encore S et S' des surfaces sur un corps algébriquement clos. On a*

$$\mathbb{Q}^{\rho(S)\rho(S')} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chow}}(\mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S), \mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{hom}}(\mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S), \mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S'))$$

Pour le cas transcendant il faut introduire la relation d'équivalence $\equiv$ liée à la dégénérescence. On a alors

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S), \mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S')) \simeq \mathrm{CH}^2(S \times S')/\mathrm{CH}^2_{\equiv}(S \times S')\ .$$

Démonstration. La première égalité découle de l'isomorphisme $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S) \simeq \mathbf{1}(-1)^{\rho(S)}$. Celui ci n'étant valable que dans le cas d'un corps algébriquement clos. Pour le reste voir ([32],7.6.5) et ([32],7.6.6) ∎

Si le corps de base n'est pas algébriquement clos, il ne faut pas considérer $\mathbb{Q}^{\rho(S)\rho(S')}$ mais plutôt

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(k^s|k)-\mathrm{mod}}(\mathrm{NS}(S_{\overline{k}}), \mathrm{NS}(S'_{\overline{k}})).$$

3 Dimension finie au sens de Kimura-O'Sullivan

Face aux difficultés de la première partie, il semble impossible de prouver que les groupes de Chow sont de dimension finie avec la notion de représentabilité. L'approche que nous allons étudier maintenant permet de voir cette question d'une autre manière. Celle ci se place dans un cadre général sur les catégories. Pour ne pas reprouver plusieurs fois les mêmes résultats nous allons d'abord rassembler ensembles plusieurs résultats usuels. Une référence sera [23].

3.1 Généralités sur les catégories monoïdales

3.1.1 Constructions élémentaires

Fixons le cadre de la catégorie que nous allons étudier.

Définition 3.1.1. *Une catégorie $\mathcal{T}$ additive sur un anneau A est une $\otimes$-catégorie (monoïdale symétrique) si on dispose d'un foncteur bilinéaire*

$$\otimes : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$$

et d'un objet unité $\mathbf{1}$ tels que l'on ait des isomorphismes :

- $a_{LMN} : L \otimes (M \otimes N) \to (L \otimes M) \otimes N$.
- *(symétrie)* $c_{MN} : M \otimes N \to N \otimes M$ *qui vérifie* $c_{MN}^{-1} = c_{NM}$.
- $u_M : M \otimes \mathbf{1} \to M$ *et* $u'_M : \mathbf{1} \otimes M \to M$.

.

qui sont compatibles entre eux via les diagrammes suivant :

<u>Diagramme du triangle</u>

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes \mathbf{1}) \otimes N \arrow[rr, "a"] & & M \otimes (\mathbf{1} \otimes N) \arrow[dl, "u"] \\
& M \otimes N \arrow[ul, "u"] &
\end{tikzcd}$$

<u>Diagramme du pentagone</u>

$$\begin{tikzcd}
& (M \otimes (N \otimes Q)) \otimes R \arrow[dr, "a"] & \\
((M \otimes N) \otimes Q) \otimes R \arrow[ur, "a"] & & M \otimes ((N \otimes Q) \otimes R) \arrow[d, "a"] \\
(M \otimes N) \otimes (Q \otimes R) \arrow[u, "a"] & & M \otimes (N \otimes (Q \otimes R)) \arrow[ll, "a"]
\end{tikzcd}$$

<u>Diagramme de l'hexagone</u>

$$\begin{tikzcd}
& (M \otimes L) \otimes N \arrow[r, "a"] & M \otimes (L \otimes N) \arrow[dr, "c"] & \\
(L \otimes M) \otimes N \arrow[ur, "c"] & & & M \otimes (N \otimes L) \arrow[dl, "a"] \\
& L \otimes (M \otimes N) \arrow[ul, "a"] & (M \otimes N) \otimes L \arrow[l, "c"] &
\end{tikzcd}$$

Remarque. *A partir de maintenant nous ne reviendrons jamais explicitement sur ces diagrammes, le point essentiel est que comme dans les groupes abéliens on peut ne pas tenir compte de l'ordre des opérations que l'on fait.*

Définition 3.1.2. *Une $\otimes$-catégorie $\mathcal{T}$ sur A est dite $\otimes$-rigide si on un foncteur linéaire de dualité*

$$\cdot^{\vee} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^{op}$$

tel que pour tout objet M on ait :

- *le foncteur $\cdot \otimes M^\vee$ est adjoint à gauche de $\cdot \otimes M$.*
- *le foncteur $M^\vee \otimes \cdot$ est adjoint à droite de $M \otimes \cdot$.*

Définition 3.1.3. *Un foncteur $\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ est dit $\otimes$-foncteur s'il est A-linéaire et qu'on a des isomorphismes :*
- *$o_{MN} : \omega(M \otimes N) \to \omega(M) \otimes \omega(N)$.*
- *$o_1 : \omega(\mathbf{1}) \to \mathbf{1}'$.*

qui sont compatibles aux contraintes a, c, u, u'.

Lemme 3.1.1. *Soit $\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un $\otimes$-foncteur entre $\otimes$-catégories rigides. Alors ω commute à l'autodualité $\cdot^\vee$.*

Exemple 3.1.1. *Étant donné un anneau A et une équivalence adéquate $\sim$, la catégorie des motifs $\mathrm{Mot}_\sim(k)_A$ est $\otimes$-rigide sur A.*

Exemple 3.1.2. *La catégorie des espaces vectoriels gradués est rigide.*

3.1.2 Généralités sur les idéaux monoïdaux

Passons ensuite à la notion d'idéal et de $\otimes$-idéal.

Définition 3.1.4. *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie additive. Un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{T}$ est la donnée pour tous les objets $M, M' \in \mathcal{T}$ d'un sous module $\mathcal{I}(M, M') \subset \mathrm{Hom}(M, M')$ tel que*
- *Pour tous les M, M' et pour tout objet N, pour tout $g \in \mathrm{Hom}(N, M)$ et tout $f \in \mathcal{I}(M, M')$, alors $f \circ g \in \mathcal{I}(N, M')$.*
- *De même si $g \in \mathrm{Hom}(M', N)$ alors $g \circ f \in \mathcal{I}(M, N)$.*

En particulier, pour tout objet M, $\mathcal{I}(M, M)$ est un idéal bilatère de $\mathrm{End}(M)$ au sens usuel des anneaux.

Pareillement si $\mathcal{T}$ est une catégorie monoïdale symétrique, un $\otimes$-idéal est un idéal qui vérifie la condition supplémentaire suivante.
- *Pour tout $f \in \mathcal{I}(M, M')$ et pour tout objet N on a $f \otimes \mathrm{Id}_B \in \mathcal{I}(M \otimes N, M' \otimes N)$, et de même pour le produit tensoriel a gauche.*

Via le diagramme commutatif suivant, on vérifie que c'est en fait équivalent à la propriété plus générale

$$\begin{tikzcd} M \otimes N \arrow[r, "f\otimes \mathrm{Id}_N"] \arrow[dr, "f\otimes g"'] & M' \otimes N \arrow[d, "\mathrm{Id}_{M'} \otimes g"] \\ & M' \otimes N' \end{tikzcd}$$

- *Pour tout $f \in \mathcal{I}(M, M')$ et pour tout $g \in \mathrm{Hom}(N, N')$ on a $f \otimes g \in \mathcal{I}(M \otimes N, M' \otimes N')$, et de même pour le produit tensoriel à gauche.*

Exemple 3.1.3. *L'idéal nul est un $\otimes$-idéal.*

Voyons ensuite une spécificité des $\otimes$-idéaux, la possibilité de définir un radical.

Définition 3.1.5. *Soit $\mathcal{I}$ un $\otimes$-idéal de $\mathcal{T}$, alors on pose pour les objets M, M' de $\mathcal{T}$:*

$$\sqrt[\otimes]{\mathcal{I}}(M, M') = \{f \in \mathrm{Hom}(M, M') \ / \ \exists n \in \mathbb{N},\ f^{\otimes n} \in \mathcal{I}(M^{\otimes n}, M'^{\otimes n})\}.$$

Proposition 3.1.2. *Le radical d'un $\otimes$-idéal est encore un $\otimes$-idéal si $\mathcal{T}$ est symétrique.*

Démonstration. La stabilité par composition est claire car $(g \circ f)^{\otimes n} = g^{\otimes n} \circ f^{\otimes n}$.

La troisième propriété est aussi claire car on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (M \otimes N)^{\otimes n} \arrow[r, "(f\otimes \mathrm{Id}_N)^{\otimes n}"] \arrow[d, "\simeq"'] & (M' \otimes N)^{\otimes n} \arrow[d, "\simeq"] \\ M^{\otimes n} \otimes N^{\otimes n} \arrow[r, "f^{\otimes n}\otimes \mathrm{Id}_{N^{\otimes n}}"] & M'^{\otimes n} \otimes N^{\otimes n} \end{tikzcd}$$

Où la flèche inférieure est dans $\mathcal{I}$ par hypothèse, donc celle du haut aussi grâce à la propriété de composition.

Enfin pour la loi d'addition, on utilise encore la propriété de symétrie pour ramener $h = f^{\otimes n_1} \otimes g^{\otimes m_1} \otimes \cdots$ à une expression de la forme $f^{\otimes n} \otimes g^{\otimes n}$:

$$\begin{array}{ccc} M^{\otimes n_1} \otimes M^{\otimes m_1} \otimes \cdots & \xrightarrow{h} & M'^{\otimes n_1} \otimes M'^{\otimes m_1} \otimes \cdots \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ M^{\otimes n} \otimes M^{\otimes m} & \xrightarrow{f^{\otimes n} \otimes g^{\otimes m}} & M'^{\otimes n} \otimes M'^{\otimes m} \end{array}$$

Dès lors si $f^{\otimes a} \in \mathcal{I}$ et $g^{\otimes b} \in \mathcal{I}$ alors on développe $(f+g)^{\otimes a+b}$ et on ramène tous les termes présents à ceux de la forme $f^{\otimes n} \otimes g^{\otimes m}$ pour $m + n = a + b$ et il est alors clair que tous ces éléments sont dans $\mathcal{I}$, d'où le résultat. ■

Exemple 3.1.4. *L'exemple le plus important pour la suite sera celui de* $\sqrt[\otimes]{0}$.

Voyons maintenant deux autres idéaux qui reviendront souvent dans notre étude. Pour cela rappelons la notion de trace. Pour cela supposons que la catégorie $\mathcal{T}$ est rigide. Dès lors les unités et counités de l'adjonction donnent un morphisme :

$$\epsilon : M \otimes M^{\vee} \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Par ailleurs si f est un endomorphisme d'un objet M, alors par adjonction il induit

$$\mathbf{1} \longrightarrow M^{\vee} \otimes M$$

que l'on note $f^{\vee}$.

Définition 3.1.6. *L'endomorphisme de **1** défini par*

$$\mathbf{1} \xrightarrow{f^{\vee}} M^{\vee} \otimes M \xrightarrow{\simeq} M \otimes M^{\vee} \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{1}$$

est appelé la trace de f.

Exemple 3.1.5. *Dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie, on trouve l'homothétie dont le rapport redonne la trace usuelle.*

Cadre. *On suppose à partir de maintenant que* $\mathcal{T}$ *est une* $\otimes$*-catégorie symétrique rigide.*

Définition 3.1.7. *On définit la partie* $\mathcal{N}$ *par*

$$\mathcal{N}(M, M') = \{f \in \mathrm{Hom}(M, M') \ / \ \forall g \in \mathrm{Hom}(M', M) \textit{ on a } \mathrm{Tr}(g \circ f) = 0\}$$

Lemme 3.1.3. $\mathcal{N}$ *est un* $\otimes$*-idéal.*

Démonstration. Si $f \in \mathcal{N}(A, B)$ et $h \in \mathrm{Hom}(C, A)$, alors $\mathrm{Tr}((f \circ h) \circ g) = \mathrm{Tr}(f \circ (h \circ g))$ et ce dernier terme est nul par hypothèse sur f. Donc $f \circ h$ est dans $\mathcal{N}$. Si maintenant $h \in \mathrm{Hom}(B, C)$ il suffit d'utiliser l'égalité $\mathrm{Tr}(h \circ f \circ g) = \mathrm{Tr}(f \circ g \circ h)$.

La stabilité par somme est claire par linéarité de la trace.

Soit $f : A \to B$, montrons que $f \otimes \mathrm{Id}_C$ est dans $\mathcal{N}$. Si on se donne $g : B \otimes C \to D$, on peut lui associer par adjonction un morphisme $\tilde{g} : B \to C^{\vee} \otimes D$. Comme f est dans $\mathcal{N}$ on peut appliquer la propriété de $\mathcal{N}$ à $\tilde{g} \otimes f$ qui est donc de trace nulle. On vérifie alors que par construction de l'adjonction, $g \circ (f \otimes \mathrm{Id}_C)$ et $\tilde{g} \circ f$, ont la même trace, ce qui permet de conclure. ■

L'intérêt de cet idéal est sa propriété de maximalité. Pour cela commençons par définir une relation d'inclusion sur des idéaux.

Définition 3.1.8. *Soit* $\mathcal{I}$ *et* $\mathcal{I}'$ *deux idéaux d'une catégorie* $\mathcal{T}$*. On dit que* $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}'$ *si pour tout couple d'objets* M, N *on a* $\mathcal{I}(M, N) \subset \mathcal{I}'(M, N)$*. On adopte la même définition pour les* $\otimes$*-idéaux.*

Lemme 3.1.4. *Pour vérifier la relation $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}'$, il suffit de le faire en $M = N$.*

Démonstration. Cette condition est évidemment nécessaire. Réciproquement donnons nous M, N deux objets de $\mathcal{T}$ que l'on suppose additive. Alors sur l'objet $M \oplus N$ on a $\mathcal{I}(M \oplus N, M \oplus N) \subset \mathcal{I}'(M \oplus N, M \oplus N)$ par hypothèse.

Soit maintenant $f \in \mathcal{I}(M, N)$. En composant à droite par la projection $M \oplus N \to M$ et à gauche par l'inclusion $N \to M \oplus N$, on obtient un élément de $\mathcal{I}(M \oplus N, M \oplus N)$ qui est donc aussi dans $\mathcal{I}'$. Concrètement on a identifié f à l'endomorphisme par blocs

$$\begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si on compose maintenant à droite par l'inclusion $M \to M \oplus N$ et à gauche par la projection $N \to M \oplus N$, la stabilité par composition assure que l'on a un élément de $\mathcal{I}'(M, N)$. Mais dans un biproduit on a la relation $p \circ i = \mathrm{Id}$, donc l'élément que l'on obtient est justement f. D'où le résultat.

■

On peut évoquer une variante de ce principe pour les catégories tensorielles rigides.

Lemme 3.1.5. *Sur $\mathcal{T}$ une catégorie rigide, un $\otimes$-idéal $\mathcal{I}$ est entièrement déterminé par la donnée des $\mathcal{I}(\mathbf{1}, M)$.*

Démonstration. C'est évidemment une donnée nécessaire. Réciproquement on a l'isomorphisme d'adjonction $\mathrm{Hom}(M, N) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, M^\vee \otimes N)$. Il nous faut montrer que cet isomorphisme fait correspondre $\mathcal{I}(M, N)$ et $\mathcal{I}(\mathbf{1}, M^\vee \otimes N)$. Dans un sens cela vient du fait que le morphisme est donné par

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, M^\vee \otimes N) \\ \varphi \longrightarrow (\mathrm{Id}_{M^\vee} \otimes \varphi) \circ \eta \end{cases}$$

Où η est la counité de l'adjonction. Par les propriétés des $\otimes$-idéaux, si φ est dans $\mathcal{I}$, cela sera aussi le cas de son image. La réciproque de l'isomorphisme est donnée par

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, M^\vee \otimes N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N) \\ \varphi \longrightarrow (\epsilon \otimes \mathrm{Id}_N) \otimes (\mathrm{Id}_M \otimes \varphi) \end{cases}$$

Là encore les propriétés des $\otimes$-idéaux permettent de voir que si $\varphi \in \mathcal{I}$, alors c'est aussi le cas de son image. Ce qui conclu.

■

Montrons maintenant la propriété annoncée.

Proposition 3.1.6. *Supposons que $\mathcal{T}$ est K-linéaire pour un corps et que $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = K$. Alors $\mathcal{N}$ est le plus grand $\otimes$-idéal strict de $\mathcal{T}$ et le seul pour lequel $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ est une catégorie semi-simple.*

Démonstration. On a déjà vu le fait que $\mathcal{N}$ était un $\otimes$-idéal. Par ailleurs, le fait que $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ assure que $\mathcal{N}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ est nul sur cet élément, donc l'idéal est strict.

Par le lemme précédent, il suffit de tester la propriété de maximalité sur les mêmes objets. Dès lors on se donne $\mathcal{I}$ un $\otimes$-idéal strict et $f \in \mathcal{I}(M, M)$. On veut montrer que pour tout $g \in \mathrm{Hom}(M, M)$ on a $\mathrm{Tr}(g \circ f) = 0$. Comme $\mathcal{I}$ est un idéal, $g \circ f$ est aussi un élément de l'idéal, donc sans perte de généralité il faut montrer que la trace de tous les éléments de $\mathcal{I}$ est nulle. Or rappelons que la trace est construite par le diagramme suivant.

$$\mathbf{1} \xrightarrow{f^\vee} M^\vee \otimes M \xrightarrow{\simeq} M \otimes M^\vee \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{1}$$

Or comme $\mathcal{I}$ est un $\otimes$-idéal, on en déduit que $f^\vee$ est aussi dans $\mathcal{I}$ (car c'est la composition de la counité avec $\mathrm{Id}_{M^\vee} \otimes f$). Dès lors $\mathrm{Tr}(f) \in \mathcal{I}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ par stabilité par composition. Comme on a supposé que $\mathcal{I}$ était strict et que $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ était un corps, on a nécessairement $\mathcal{I}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = 0$. Donc $\mathrm{Tr}(f) = 0$, ce qui conclu.
Voir ([23], 7.1.4) pour le dernier point.

■

Exemple 3.1.6. *Les catégories de motifs sur des corps vérifient les hypothèses de cette proposition. Par ailleurs sur celle ci $\mathcal{N}$ correspond à l'équivalence numérique, donc on retrouve une partie du théorème de Jannsen.*

Définition 3.1.9. *On pose*

$$\mathcal{R}(M,M') = \mathrm{rad}(\mathcal{T})(M,M') = \{f \in \mathrm{Hom}(M,M') \ / \ \forall g \in \mathrm{Hom}(M',M),\ \mathrm{Id}_M - g\circ f \textit{ est inversible}\}$$

Proposition 3.1.7. *$rad(\mathcal{T})$ est un idéal de $\mathcal{T}$ et c'est le plus grand qui rende le foncteur quotient conservatif.*

Démonstration. Voir [2].

■

Cet idéal est important car on veut factoriser par celui ci, cependant il n'est pas à priori monoïdal, ce qui est gênant pour la théorie des motifs. Introduisons la notion d'enveloppe monoïdale.

Définition 3.1.10. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{T}$. $\mathcal{I}^{\otimes}$ est le plus petit $\otimes$-idéal qui contient $\mathcal{I}$.*

Comme $\mathcal{I}^{\otimes}$ est déterminé par les valeurs des $\mathcal{I}^{\otimes}(\mathbf{1}, A)$, il est important ce comprendre celles ci.

Lemme 3.1.8. *On a $\mathcal{I}^{\otimes}(\mathbf{1}, A) = \mathcal{I}(\mathbf{1}, A)$.*

Démonstration. Via l'isomorphisme d'adjonction, on peut définir une $\otimes$-idéal $\mathcal{J}$ par l'égalité

$$\mathcal{J}(\mathbf{1}, A) = \mathcal{I}(\mathbf{1}, A).$$

Les isomorphismes de la preuve du lemme 3.1.5 montrent que cette formule définit bien un $\otimes$-idéal. Par minimalité on a donc $\mathcal{I}^{\otimes} \subset \mathcal{J}$. Par ailleurs $\mathcal{I}^{\otimes}$ doit contenir $\mathcal{I}$, d'où le résultat.

■

Proposition 3.1.9. *Supposons que $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = K$ est un corps. Alors l'idéal $\mathcal{N}$ est le plus petit idéal monoïdal qui contient $\mathcal{R}$. En particulier $\mathcal{R}$ est monoïdal si et seulement si $\mathcal{R} = \mathcal{N}$.*

Démonstration. Il faut montrer que le $\otimes$-idéal engendré par $\mathcal{R}$ est $\mathcal{N}$. Comme c'est une égalité entre $\otimes$-idéaux, il suffit de la vérifier sur les couples $(\mathbf{1}, A)$. Or sur ceci on a par définition $\mathcal{R}^{\otimes} = \mathcal{R}$ donc on est ramené à montrer $\mathcal{R}(\mathbf{1}, A) = \mathcal{N}(\mathbf{1}, A)$.

Pour $\mathcal{R}$ on a par définition

$$\mathcal{R}(\mathbf{1}, A) = \{f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, A) \ / \ \forall g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, A), \mathrm{Id}_{\mathbf{1}} - g\circ f \textit{ est inversible}\}$$

Mais dans End($\mathbf{1}$) qui est un corps, être inversible est équivalent à ne pas être nul. Donc pour toutes les fonctions g, $g\circ f$ est un scalaire différent de 1. Or comme $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, A)$ est un K-module, on peut dilater g pour obtenir $g\circ f = 1$ dès qu'il existe un g tel $g\circ f \neq 0$. Dès lors on a

$$\mathcal{R}(\mathbf{1}, A) = \{f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, A) \ / \forall g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1}, A), g\circ f = 0\}$$

Comme les éléments nuls sont de trace nulle, on en déduit bien $\mathcal{R}(\mathbf{1}, A) \subset \mathcal{N}(\mathbf{1}, A)$. De plus dans Hom($\mathbf{1}, A$) on a en fait égalité car sur End($\mathbf{1}$) qui est un corps, la trace est nulle si et seulement si l'élément est nul. D'où le résultat.

■

Remarque. *Par maximalité de $\mathcal{N}$ parmi les $\otimes$-idéaux, $\mathcal{N}$ est donc le seul $\otimes$-idéal qui contienne $\mathcal{R}$.*

Passons enfin au dernier aspect important des idéaux.

Définition 3.1.11. *Un idéal $\mathcal{I}$ d'une catégorie $\mathcal{T}$ est dit nil-idéal si pour tout objet M et pour tout $f \in \mathcal{I}(M,M)$, f est nilpotent.*

Un idéal $\mathcal{I}$ est dit nilpotent si pour tout objet M, il existe un entier k tel que $\mathcal{I}(M,M)^k = 0$.

Remarque. *Cette définition porte uniquement sur les anneaux d'endomorphismes, elle ne stipule rien sur les modules $\mathcal{I}(M,M')$.*

En théorie des anneaux, il est bien connu que tous les éléments nilpotents sont dans l'intersection des idéaux premiers, et donc aussi dans l'intersection des idéaux maximaux. Nous allons voir une généralisation de ce fait dans le cadre catégorique.

Proposition 3.1.10. *Les nil-idéaux sont inclus dans $\mathcal{R}$.*

Démonstration. Il suffit de le tester sur les anneaux $\mathrm{End}(M, M)$. Or sur ceux ci $\mathcal{I}(M, M)$ est un idéal bilatère au sens usuel. Dès lors si $g \in \mathcal{I}$ alors pour tout $g \in \mathrm{End}(M, M)$ on a $g \circ f \in \mathcal{I}(M, M)$ donc $g \circ f$ est nilpotent. Dès lors $\mathrm{Id}_M - g \circ f$ est bien inversible d'inverse donné par $\mathrm{Id}_M + g \circ f + (g \circ f)^2 + \cdots + (g \circ f)^{k-1}$, où $(g \circ f)^k = 0$ ■

L'intérêt des idéaux nilpotents vient du lemme de relèvement suivant.

Lemme 3.1.11. *Soit A un anneau (potentiellement non commutatif) et I un nil-idéal bilatère. Alors tout idempotent de A/I se relève en un idempotent de A.*

Si A est commutatif on peut montrer plus généralement que tout système complet d'idempotents orthogonaux se relève en un système de la même sorte.

Démonstration. Soit $r \in A$ tel que $r^2 = r[I]$. Posons $s = 1 - r$. Par construction on a $sr = rs \in I$. Donc il existe un entier k tel que $(rs)^k = r^k s^k = 0$.
Par ailleurs en développant l'expression de $(r + s)^k$ on voit que

$$(r + s)^k = r^k + s^k = 1[I]$$

car $rs = sr \in I$. Donc $x = 1 - r^k - s^k \in I$. Mais alors $1 - x = r^k + s^k$ est inversible d'inverse $u = 1 + \cdots + x^l$. Comme x commute à r et s, c'est aussi le cas de u et par ailleurs $u = 1[I]$. Mais alors si on multiplie l'égalité $ur^k + us^k = 1$ par ur^k il vient

$$(ur^k)^2 + u^2 r^k s^k = ur^k$$

Comme $r^k s^k = 0$, on en déduit que ur^k est bien un idempotent et modulo I il est bien congru à r, d'où le résultat. Pour le cas général, on construit par ce procédé des idempotents qui relèvent chaque éléments du système sur A/I. Ceux ci commutent et leur produit est un idempotent qui est dans un nil-idéal, donc celui ci est bien nul. On vérifie de même que la somme vaut 1 car sinon on aurait un idempotent nilpotent.

Proposons une preuve de nature plus géométrique du premier point. Commençons par le cas où R est un anneau commutatif.
Si I est un nil-idéal, il induit un morphisme

$$\mathrm{Spec}(R/I) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$$

qui est un homéomorphisme au sens topologique. Or les idempotents d'un anneau sont en bijection avec les décompositions de $\mathrm{Spec}(R/I)$ en unions disjointes topologiques. Plus précisément si r est un idempotent d'un anneau anneau, il permet d'écrire $A \simeq B \times C$ où cet isomorphisme envoie r sur $(1, 0)$. Au niveau du spectre cela induit $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(B) \sqcup \mathrm{Spec}(C)$.

Dans notre situation si r est un idempotent de R/I, on en déduit $\mathrm{Spec}(R/I) = A \sqcup B$, par l'homéomorphisme avec $\mathrm{Spec}(R)$, on en déduit une décomposition topologique $Spec(R) = A \sqcup B$ et donc en prenant l'idempotent associé on trouve bien un relèvement de r.

Montrons en fait que le cas général peut se ramener au cas commutatif. Soit r un idempotent de R/I et $\tilde{r}$ un relèvement dans R qui à priori n'est pas idempotent. On pose alors $\tilde{R} \subset R$ le sous anneau engendré par $\tilde{r}$ et $\tilde{I} = I \cap \tilde{R}$. Par construction $\tilde{R}$ est commutatif (c'est un anneau de polynômes en $\tilde{r}$) et $\tilde{I}$ est encore nilpotent.

Par ailleurs on a une injection $\tilde{R}/\tilde{I} \hookrightarrow R/I$ telle que r est dans son image. Par le cas commutatif on peut donc relever r en un idempotent de $\tilde{R}$, qui est donc aussi un idempotent de R.

■

Rappelons que $\mathcal{R}$ est le plus grand idéal par lequel la factorisation reste conservative. On a donc vu les deux propriétés importantes du morphisme de projection

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{I}$$

dans le cas où $\mathcal{I}$ est un nilidéal.

- Ce foncteur est conservatif.
- On peut relever les idempotents.

On doit maintenant voir un exemple d'un tel idéal.

Théorème 3.1.12. $\sqrt[\otimes]{0}$ *est un nil-idéal. De plus si* $\mathrm{End}(\boldsymbol{1}) = K$*, alors c'est un idéal nilpotent.*

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{End}(M)$ un élément tel que $f^{\otimes n} = 0$. On veut montrer que $f^{\circ n} = 0$. Remarquons plus généralement que si l'on a $f : A \to B$ et $g : B \to C$ alors les propriétés d'adjonction donnent des morphismes $f^{\vee} : \mathbf{1} \to A^{\vee} \otimes B$ et $g^{\vee} : \mathbf{1} \to B^{\vee} \otimes C$. Dès lors en appliquant la counité on a

$$\mathbf{1} \xrightarrow{f^{\vee} \otimes g^{\vee}} A^{\vee} \otimes B \otimes B^{\vee} \otimes C \xrightarrow{\mathrm{Id}_{A^{\vee}} \otimes \epsilon \otimes \mathrm{Id}_C} A^{\vee} \otimes C$$

On obtient donc un morphisme $\mathbf{1} \to A^{\vee} \otimes C$, et par les propriétés universelles des unités, on vérifie qu'il s'agit bien de $(g \circ f)^{\vee}$.

Dès lors dans notre cas particulier si $f^{\otimes n} = 0$, on montre que $f^{\circ n \vee}$ s'inscrit dans un diagramme avec $f^{\otimes n}$ et des unités. Comme le premier est nul, c'est donc aussi le cas de $f^{\circ n}$. D'où le fait que c'est un nil-idéal.

Pour le deuxième point cela découle d'un lemme de Nagata-Higman, voir ([20], 7.2.8).

■

3.1.3 Construction via l'action du groupe symétrique

Dans les catégories monoïdales rigides nous allons pouvoir définir la puissance symétrique et antisymétrique d'un objet. A partir de maintenant on suppose que l'on vérifie toujours le cadre suivant.

Cadre. *On se place sur une catégorie $\mathcal{T}$ qui est $\otimes$-rigide sur un anneau A où $n!$ est inversible. Pour ne pas s'alourdir inutilement, on supposera même que l'on est sur un corps K de caractéristique nulle. Par ailleurs on suppose que $\mathcal{T}$ est pseudo-abélienne et que* $\mathrm{End}(\boldsymbol{1}) = K$.

Donnons nous un objet M de $\mathcal{T}$. Grâce aux axiomes des $\otimes$-catégories, on peut construire un morphisme

$$\mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M^{\otimes n})$$

qui à une permutation σ associe l'endomorphisme de $M^{\otimes n}$ qui échange les facteurs selon σ via les morphismes c_{MM}.

En effet si on utilise la présentation de $\mathfrak{S}_n$ rappelée en annexe, il suffit d'envoyer les générateurs sur :

$$t_i \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Id}}_{i-1 \, fois} \otimes c_{MM} \otimes \underbrace{\mathrm{Id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Id}}_{n-i-1 \, fois}.$$

via l'identité $c_{MM}^{-1} = c_{MM}$, il est clair que la relation t_i^2 est respectée. De plus si $|i-j| > 1$, il est clair que les images de t_i et t_j commutent. Enfin par l'axiome de l'hexagone on obtient la dernière relation. Donc on obtient bien un morphisme de groupe.

Exemple 3.1.7. *Si $n = 2$, $\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}_2}$ est envoyé sur $\mathrm{Id}_{M \otimes M}$ et $(1,2)$ est envoyé sur c_{MM}.*

Notation. *A partir de maintenant on ne fera plus référence à ce morphisme et on notera directement les éléments de $\mathfrak{S}_n$ comme des objets de $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M)$.*

On peut alors définir les deux morphismes essentiels à notre étude.

Définition 3.1.12. *Sur un objet M de $\mathcal{T}$, on définit deux endomorphismes par les formules suivantes :*

$$s_n(M) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma, \ \lambda_n(M) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma$$

Où ϵ désigne la signature d'une permutation.

Proposition 3.1.13. *Les morphismes $s_n(M)$ et $\lambda_n(M)$ sont des projecteurs.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que dans un groupe la multiplication à gauche induit une bijection, donc $\tau \circ s_n(M) = s_n(M)$ pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Dès lors comme Card$(\mathfrak{S}_n) = n!$, il est évident que $s_n(M) \circ s_n(M) = s_n(M)$.

De même comme la signature est un morphisme de groupe, on a $\epsilon(\tau)\tau \circ \lambda_n(M) = \lambda_n(M)$ et par le même calcul on en déduit que $\lambda_n(M)$ est un projecteur. ∎

Comme la catégorie $\mathcal{T}$ est pseudo-abélienne la définition suivante fait donc sens.

Définition 3.1.13. *Dans le cadre que nous nous sommes donné, on peut définir dans $\mathcal{T}$ les deux objets*

$$S^n M = \mathrm{Im}(s_n(M)), \ \bigwedge^n M = \mathrm{Im}(\lambda_n(M))$$

que l'on appelle respectivement la puissance symétrique et antisymétrique de M.

Plus généralement grâce aux résultats rappelés dans l'annexe, à toute partition λ on peut associer un projecteur sur M noté c_λ et poser

$$S_\lambda(M) = \mathrm{Im}(c_\lambda)$$

Du fait que l'on a un système complet de projecteurs orthogonaux dans une catégorie pseudo-abelienne, on en déduit le lemme qui suit.

Lemme 3.1.14. *On a une décomposition canonique*

$$M^{\otimes n} = \bigoplus_\lambda S_\lambda(M)^{\oplus d_\lambda}$$

où la somme porte sur toutes les partitions de n, et d_λ est la dimension de la représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ associée à λ. En particulier pour $S^n M$ et $\bigwedge^n M$, cet entier vaut 1.

On peut facilement appliquer ce lemme à des petites valeurs de n.

Exemple 3.1.8. *Pour $n \leq 2$ on a les décompositions suivantes*
- $M^{\otimes 0} = \mathbf{1} = S^0 M = \bigwedge^0 M$.
- $M^{\otimes 1} = S^1 M = \bigwedge^1 M$.
- $M \otimes M = S^2 M \oplus \bigwedge^2 M$.

Comme exemple d'application citons un théorème de Deligne.

Théorème 3.1.15 (Deligne)**.** *Si $\mathcal{T}$ est une $\otimes$-catégorie rigide abélienne sur un corps K (de caractéristique nulle) telle que $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(\mathbf{1}) = K$ alors on a une équivalence entre*
- *$\mathcal{T}$ est tannakienne.*
- *Pour tout objet M, on a $\bigwedge^n M = 0$ pour n assez grand.*

Démonstration. Voir ([27], 7). ∎

L'heuristique de la définition de dimension finie que nous allons donner apparait déjà dans l'exemple suivant.

Exemple 3.1.9. *Un espace vectoriel V sur un corps est de dimension finie si et seulement si $\bigwedge^n V = 0$ pour un n assez grand. Par ailleurs s'il existe un indice m tel que $\bigwedge^m V = 0$, alors c'est aussi le cas pour tout $n > m$. La dimension de V est d'ailleurs le plus grand entier pour lequel $\bigwedge^m V$ n'est pas nul.*

Ainsi il parait naturel de demander à ce qu'un objet soit de dimension finie si et seulement si $\bigwedge^n M = 0$ pour n assez grand. Cependant lorsque l'on regarde sur la catégorie des espaces vectoriels gradués, on voit que la règle de changement de signe de Kozul fait apparaitre des objets symétriques au sens non gradué. Il faut donc aussi les prendre en compte.

Définition 3.1.14. *Un objet M de $\mathcal{T}$ est*
- *impair si $S^n M = 0$ pour n assez grand.*
- *pair si $\bigwedge^n M = 0$ pour n assez grand.*
- *de dimension finie s'il s'écrit comme une somme $M = M_1 \oplus M_2$ où M_1 est pair et M_2 est impair.*

On peut en fait montrer que dès que l'un de ces éléments est nul, c'est le cas de tous les suivants.

Lemme 3.1.16. *Si $S^n M = 0$ (respectivement $\bigwedge^n M = 0$) alors $S^{n+1} M = 0$ (respectivement $\bigwedge^{n+1} M = 0$).*

Démonstration. On utilise la proposition 1.1.4 pour écrire $e_{(n+1)} = r \circ e_{(n)} \otimes$ Id dans $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M^{\otimes n+1})$. Dès lors si $S^n M = 0$ c'est que $e_{(n)} = 0$ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M^{\otimes n})$, et donc l'égalité précédente prouve que $e_{(n+1)} = 0$. Le cas de $\bigwedge^n M$ se traite de même. ■

Dès lors on passe d'un cas où $S^n M$ n'est jamais nul à un cas où $S^n M$ est toujours nul. La définition suivante fait donc sens.

Définition 3.1.15. *Pour un objet pair, sa dimension de Kimura est le plus grand entier pour lequel $\bigwedge^n M$ n'est pas nul. On la note $\mathrm{kim}(M)$. On donne la définition analogue pour les objets impairs.*

La notation précédente peut être ambigüe pour des objets à la fois pairs et impairs. Ce n'est pas très important car nous verrons que seul l'objet nul est de ce type, et qu'il est évidemment de dimension nulle au sens pair et impair.

Il est tentant de donner une définition de la dimension pour un objet de dimension finie, mais il faut un lemme d'indépendance de la décomposition, nous remettons cela à plus tard.

Définition 3.1.16. *$\mathcal{T}$ est dite de Kimura-O'Sullivan si elle vérifie les propriétés du cadre et que tous ses objets sont de dimenion finie.*

Pour appliquer des notions de fonctorialité, il faut vérifier que ces constructions sont compatibles aux $\otimes$-foncteurs

Lemme 3.1.17. *Les $\otimes$-foncteurs commutent aux constructions S^n et $\bigwedge^n$. Plus généralement, ils commutent à S_λ.*

Démonstration. On se donne $\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un $\otimes$-foncteur. Étant donné un objet M de $\mathcal{T}$, on vérifie d'abord que les constructions des représentations de $\mathfrak{S}_n$ sont compatibles, c'est à dire que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S}_n \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M) \arrow[d, "\omega"] \\ & \mathrm{End}_{\mathcal{T}'}(\omega(M)) \end{tikzcd}$$

Ce fait est clair car la définition de l'image de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ne dépend que de $\otimes$ et des contraintes c_{MM}. Or celles ci commutent à ω par hypothèse, donc les constructions sont compatibles.

Ensuite dans $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M)$ on sait que les c_λ forment un système complet d'idempotents orthogonaux, et donc qu'ils induisent une décomposition

$$M = \bigoplus_\lambda S_\lambda(M)$$

Mais comme ω est additif, il commute aux sommes directes, donc on a

$$\omega(M) = \bigoplus_\lambda \omega\left(S_\lambda(M)\right)$$

Cette décomposition est entièrement déterminée par une somme d'idempotents dans $\mathrm{End}_{\mathcal{T}'}(\omega(M))$, mais celle ci est par construction l'image de la décomposition induite par les c_λ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M)$ par fonctorialité. Comme $\omega(c_\lambda) = c'_\lambda$, on a donc bien $\mathrm{Im}(c'_\lambda) = \omega(\mathrm{Im}(c_\lambda))$, c'est à dire $S_\lambda(\omega(M))) = \omega(S_\lambda(M))$.

■

3.2 Exemples et premières propriétés

On suppose toujours vérifiés les hypothèses du cadre dressé à la section précédente.

3.2.1 Résultats formels

Plus généralement on peut traduire les formules du théorème 1.2.2 dans le cadre que l'on étudie.

Théorème 3.2.1. *Pour λ une partition de n, on a les égalités suivantes*

- $S_\mu(M) \otimes S_\nu(M) = \bigoplus_{\lambda, |\lambda|=|\mu|+|\nu|} S_\lambda(M)^{N^\lambda_{\mu\nu}}$.
- $S_\lambda(M \oplus N) = \bigoplus_{\mu,\nu,|\lambda|=|\mu|+|\nu|} (S_\mu(M) \otimes S_\nu(N))^{N^\lambda_{\mu\nu}}$.
- $S_\lambda(M \otimes N) = \bigoplus_{\mu,\nu,|\lambda|=|\mu|=|\nu|} (S_\mu(M) \otimes S_\nu(N))^{[V_\mu \otimes V_\nu : V_\lambda]}$.
- *Si $\lambda \subset \mu$ alors $S_\lambda(M) = 0$ implique que $S_\nu(N) = 0$.*

Par ailleurs on a aussi

$$S_\lambda(M)^\vee = S_\lambda(M^\vee).$$

Le but de notre étude va être d'appliquer ce formalisme à des catégories de motifs. Commençons par donner un exemple de catégorie de Kimura-O'Sullivan qui va servir de fil conducteur.
Pour cela rappelons par une formule que nous utiliserons de manière systématique.

Lemme 3.2.2. *On a les égalités :*

$$S^n(M \oplus N) = \bigoplus_{k+l=n} S^k M \otimes S^l N$$

$$\bigwedge^n (M \oplus N) = \bigoplus_{k+l=n} \bigwedge^k M \otimes \bigwedge^l N.$$

Démonstration. Cela vient essentiellement des formules du théorème 3.2.1 et du calcul des coefficients $N^\lambda_{\mu\nu}$ pour ces deux partitions très particulières dans le corollaire 1.2.3 de l'appendice A. ■

Corollaire 3.2.2.1. *Si la catégorie $\mathcal{T}$ vérifie les hypothèses du cadre, alors c'est aussi le cas de sa catégorie des objets gradués $\mathcal{T}$-gr où l'inversion est donnée par la règle de Koszul*

$$a \otimes b \longrightarrow (-1)^{|a||b|} b \otimes a$$

alors si on décompose un objet en $M = M_+ \oplus M_-$ selon ses graduations paires et impaires, on a les égalités

$$S^n M = \bigoplus_{k+l=n} S^k M_+ \otimes \bigwedge^l M_-$$

$$\bigwedge^n M = \bigoplus_{k+l=n} \bigwedge^k M_+ \otimes S^l M_-$$

Où le terme de gauche se réfère à la construction dans la catégorie $\mathcal{T}$-gr et le terme de droites aux constructions dans $\mathcal{T}$.

Démonstration. Le premier point est évident. Pour le second, le problème est que le foncteur d'oubli n'est pas un $\otimes$-foncteur à cause de la règle de Koszul. Mais alors on change la convention des signes dans $\mathcal{T}$ pour que cette catégorie vérifie aussi la règle de Koszul. Dès lors comme l'oubli commute aux constructions S_λ, on peut appliquer le lemme précédent pour obtenir

$$S^n M = \bigoplus_{k+l=n} S^k M_+ \otimes S^l M_-$$

$$\bigwedge^n M = \bigoplus_{k+l=n} \bigwedge^k M_+ \otimes \bigwedge^l M_-$$

Dans cette égalité on voit grâce au foncteur d'oubli les termes de droites comme des objets de $\mathcal{T}$ avec la contrainte modifiée. Il ne reste plus qu'à relier les constructions de S^n et $\bigwedge^n$ dans $\mathcal{T}$ avec la règle des signes modifiés à celles dans $\mathcal{T}$ avec la règle usuelle. Pour cela on remarque que sur M_+ la règle des signes modifiée est inopérante, donc les constructions sont les mêmes. En revanche sur M_- la nouvelle contrainte fait apparaitre un changement de signe pour chaque inversion élémentaire. Dès lors une permutation σ y agit désormais comme $\epsilon(\sigma) \cdot \sigma$. Ainsi les endomorphismes s_n et λ_n sont inversés par rapport à la convention usuelle. Donc on a

$$S^n_{\text{gradu}} M_- = \bigwedge^n_{\text{nongradu}} M_-$$

$$\bigwedge^n_{\text{gradu}} M_- = S^n_{\text{nongradu}} M_-$$

■

Remarque. *On voit dans ce corollaire ce qui est la source principale de confusion : on note de la même manière les constructions S^n et $\bigwedge^n$ dans toutes les catégories, cependant le foncteur d'oubli d'une catégorie graduée dans sa catégorie sous-jacente n'est pas un $\otimes$-foncteur à cause de la règle de Koszul. Dès lors on a*

$$\bigwedge^n_{\mathcal{T}-\text{gr}} V \neq \bigwedge^n_{\mathcal{T}} V$$

Si le contexte est clair on ne notera pas dans quelle catégorie on regarde la construction S^n et $\bigwedge^n$: s'il y a une égalité reliant des S^n à des $\bigwedge^n$ c'est sans doute que l'on a utilisé de manière tacite le corollaire.

Proposition 3.2.3. *La catégorie des espaces vectoriels sur K, gradués et de dimension finie (par $\mathbb{Z}$ ou par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) est de Kimura-O'Sullivan.*

Démonstration. Il est clair que cette catégorie est abélienne et K-linéaire. Le seul point non évident est de vérifier qu'elle satisfait les axiomes de dimension finie.

Rappelons d'abord que dans cette catégorie la règle d'interversion c_{MN} se fait avec la règle des signes de Koszul. Mais alors si on décompose V selon les degrés pairs et impairs en

$$V = V_0 \oplus V_1,$$

on en déduit par le corollaire 3.2.2.1 les égalités

$$S^n V = \bigoplus_{m+l=n} S^m V_0 \otimes \bigwedge^l V_1$$

$$\bigwedge^n V = \bigoplus_{m+l=n} \bigwedge^m V_0 \otimes S^l V_1$$

où le terme de droite est construit dans la catégorie des espaces vectoriels non gradués, donc sans la règle de Koszul.

En particulier si V est purement de degré pair, on en déduit $\bigwedge^n V = \bigwedge^n V$ (le deuxième au sens non gradué), donc comme V est de dimension finie, ce terme est bien nul pour n assez grand. Donc V est pair dans le sens de la définition 3.1.14.
De même si V est purement de degré impair, on a $S^n V = \bigwedge^n V$ au sens usuel, qui est bien nul pour n assez grand. Donc V est impair aussi dans le sens de la définition 3.1.14.
Dans le cas général on écrit $V = V_0 \oplus V_1$ qui est bien la somme d'un objet pair et d'un objet impair, d'où le résultat. ■

Passons maintenant à la catégorie des motifs. Prenons une cohomologie de Weil sur un corps K et une équivalence $\sim$ plus grossière que l'équivalence homologique. On a donc un $\otimes$-foncteur de cohomologie partant de $\mathrm{Mot}_\sim(k)_K$ à valeurs dans la catégorie VecGr_K des espaces vectoriels gradués de dimension finie. Par ce que l'on a dit de la compatibilité des $\otimes$-foncteurs à la construction de Kimura-O'Sullivan, l'exemple suivant est immédiat.

Exemple 3.2.1. *Si M est un motif de Chow et H un foncteur de cohomologie, alors $H(S_\lambda(M)) = S_\lambda(H(M))$ où le terme de droite est à comprendre dans la catégorie des espaces vectoriels gradués (ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gradués).*

Voyons maintenant la stabilité de la notion de dimension finie.

Définition 3.2.1. *Dans la catégorie $\mathcal{T}$ on note $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}}$ la sous catégorie pleine dont les objets sont de dimension finie.*

Comme $\mathcal{T}$ a une structure monoïdale rigide, on se demande si $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}}$ l'est aussi.

Proposition 3.2.4. *$\mathcal{T}_{\mathrm{kim}}$ est stable par dualité, somme, produit tensoriel. Plus précisément on montre que :*
- *le dual d'un objet (im)pair est (im)pair.*
- *une somme d'objets (im)pairs est (im)paire.*
- *un produit tensoriels d'objets de même parité est pair et un produit tensoriel d'objets de parités différentes est impair.*

Démonstration.
- Le premier point est un cas particulier de la formule $S_\lambda(M^\vee) = (S_\lambda(M))^\vee$. Par ailleurs le foncteur de dualité respecte la somme directe donc une décomposition en pair et impair sur M induit la même chose sur $M^\vee$.
- Si M est pair de dimension m et N est pair de dimension n alors on a
$$\bigwedge^{m+n+1}(M \oplus N) = \bigoplus_{k+l=m+n+1} \bigwedge^k M \otimes \bigwedge^l N$$
mais alors on a soit $k \geq m+1$ soit $l \geq n+1$ donc tous les termes de cette somme sont nuls. D'où l'assertion. On fait de même dans le cas pair. Dès lors si $M = M^+ \oplus M^-$ et $N = N^+ \oplus N^-$ sont de dimension finie, leur somme est de dimension finie pour la décomposition en $M^+ \oplus N^+$ et $M^- \oplus N^-$.
- Si M est de dimension m et N de dimension n, posons $q = mn+1$, on applique la formule du calcul de $S_\lambda(M \otimes N)$ pour $\lambda = (q)$ ou $\lambda = (1_q)$. Celle ci exprime tout en fonction des $(S_\mu(M) \otimes S_\nu(N))^{[V_\mu \otimes V_\nu : V_\lambda]}$. Dès lors on applique le lemme 1.2.4 pour annuler les termes.

  Enfin si $M = M^+ \oplus M^-$ et $N = N^+ \oplus N^-$ sont de dimension finie, alors $M \otimes N$ est de dimension finie pour la décomposition en $M^+ \otimes N^+ \oplus M^- \otimes N^-$ et $M^- \otimes N^+ \oplus M^+ \otimes N^-$.

■

Il reste à vérifier la stabilité par passage aux facteurs directs.

Lemme 3.2.5. *Si $M \oplus N$ est (im)pair, alors c'est aussi le cas de M et N.*

Démonstration. Si $S^n(M \oplus N) = \bigoplus_{k+l=n} S^k M \otimes S^l N = 0$ alors tous ses termes sont nuls. Or en $k = n$ on a justement $S^n M$ et en $l = 0$ on a $S^n N$. Donc M et N sont impairs. Le cas pair se traite de même. ■

En revanche il est moins évident qu'un facteur direct d'un objet de dimension finie est de dimension finie, car il n'est pas clair que le facteur direct soit compatible avec la décomposition en partie paire et impaire. Cela va découler des arguments suivants.

Proposition 3.2.6. *Si M et N sont deux objets de parité différente, alors tout morphisme $f : M \to N$ est $\otimes$-nilpotent.*

Démonstration. Par l'adjonction avec $M^\vee$ il est équivalent de traiter le cas de $\mathbf{1} \to M^\vee \otimes N$, on peut donc supposer $M = \mathbf{1}$ et N impair. Mais alors le morphisme $f^{\otimes n} : \mathbf{1} \to N^{\otimes n}$ est $\mathfrak{S}_n$ invariant donc il se factorise via

$$\begin{tikzcd} & S^n N \arrow[d] \\ 1 \arrow[ur] \arrow[r, "f^{\otimes n}"'] & N^{\otimes n} \end{tikzcd}$$

Mais par imparité $S^n N$ est nul pour n assez grand. D'où le résultat. ■

Corollaire 3.2.6.1. *Dans $\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0}$ la décomposition en objet pair et impair est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. Si on a deux décompositions en pairs et impairs cela induit

$$M_1^+ \oplus M_1^- \simeq M_2^+ \oplus M_2^-$$

Mais alors cet isomorphisme φ se décompose matriciellement en

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}$$

Par la proposition 3.2.6 les applications φ_{12} et φ_{21} sont $\otimes$-nilpotentes, donc nulles dans $\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0}$. Dès lors φ est diagonale donc elle induit des isomorphismes $M_1^+ \simeq M_2^+$ et $M_1^- \simeq M_2^-$. D'où le résultat. ∎

Corollaire 3.2.6.2. *Dans $\mathcal{T}$ le seul objet à la fois pair et impair est l'objet nul.*

Démonstration. En effet si M est pair et impair alors la proposition 3.2.6 appliquée à l'identité de M induit que cet élément est $\otimes$-nilpotent. Or la $\otimes$-nilpotence implique la nilpotence au vu du théorème 3.1.12, donc Id_M est nilpotent, or il est aussi idempotent. Donc $\mathrm{Id}_M = 0$, donc $M = 0$. ∎

Théorème 3.2.7. *Un objet M est de dimension finie si et seulement si son image M_{red} dans $\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0}$ est de dimension finie. Autrement dit $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}}/\sqrt[\otimes]{0} = \left(\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0}\right)_{\mathrm{kim}}$*

Démonstration. Comme le foncteur de projection $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0}$ est un $\otimes$-foncteur, il envoie les objets de dimension finie sur des objets de dimension finie. Donc si M est de dimension finie, c'est aussi le cas de M_{red}.

Réciproquement supposons que M_{red} est de dimension finie. Soit alors p_{red}^+ l'idempotent associé à la partie paire. Comme $\sqrt[\otimes]{0}$ est un idéal nilpotent (théorème 3.1.12), on peut relever p_{red}^+ en un idempotent dans $\mathrm{End}(M)$ que l'on note p^+ via le lemme 3.1.11. Par ailleurs si on pose $p^- = 1 - p^+$ c'est nécessairement un idempotent qui relève l'idempotent définissant la partie impaire de M_{red}.
Dès lors ces deux idempotents définissent une décomposition de $M \simeq M^+ \oplus M^-$. Comme le foncteur de projection sur $\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0}$ est un $\otimes$-foncteur conservatif grâce à la proposition 3.1.10, on en déduit que M^+ et M^- sont respectivement pairs et impairs. ∎

Corollaire 3.2.7.1. *La sous catégorie $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}}$ est stable par facteur direct.*

Démonstration. Soit M un objet de dimension finie que l'on décompose en $M = M^+ \oplus M^-$. Par ailleurs on se donne N un facteur direct défini par un idempotent p. On décompose p sur M^+ et M^- en

$$\begin{pmatrix} p_{++} & p_{+-} \\ p_{-+} & p_{--} \end{pmatrix}$$

si on passe au quotient par $\sqrt[\otimes]{0}$, la proposition 3.2.6 montre que p_{+-} et p_{-+} sont nuls. Donc sur la décomposition induite

$$M_{\mathrm{red}} = M_{\mathrm{red}}^+ \oplus M_{\mathrm{red}}^-$$

dans $\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0}$, p induit deux idempotents sur respectivement M_{red}^+ et M_{red}^-. On a donc deux sous objets N_{red}^+ et N_{red}^- tels que

$$N_{\mathrm{red}} = N_{\mathrm{red}}^+ \oplus N_{\mathrm{red}}^-$$

et qui sont des sous objets de M_{red}^+ et M_{red}^-. Or on a vu au lemme 3.2.5 que cela impliquait que N_{red}^+ et N_{red}^- sont respectivement pairs et impairs. Par le théorème 3.2.7, on en déduit que N est aussi de dimension finie. D'où le résultat. ∎

On a donc bien prouvé le résultat souhaité de stabilité de la catégorie $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}}$.

Définition 3.2.2. *Soit M un objet de dimension finie décomposé en $M = M^+ \oplus M^-$. On définit sa dimension par*

$$\dim(M) = \dim(M^+) + \dim(M^-)$$

Lemme 3.2.8. *La dimension d'un objet de dimension finie ne dépend pas du choix de la décomposition.*

Démonstration. Dans $\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0}$ c'est clair car la décomposition est unique à isomorphisme près. Dans $\mathcal{T}$ cela vient du fait que le foncteur de projection est conservatif, donc la dimension d'un objet (im)pair ne change pas si on le regarde dans $\mathcal{T}$ ou dans $\mathcal{T}/\sqrt[\otimes]{0}$. D'où le résultat. ■

Remarquons que l'on a insisté sur le fait que $\mathcal{N}$ était un idéal nilpotent, pas seulement un nil-idéal. Cela vient essentiellement du résultat suivant que nous admettrons.

Théorème 3.2.9 (André-Kahn)**.** *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie monoïdale sur un corps K telle que $\mathcal{N}$ soit nilpotent et que $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}/\mathcal{N}$ soit semi-simple. Alors le foncteur de projection $\mathcal{T} \to \overline{\mathcal{T}}$ admet une section qui est unique à isomorphisme près.*

3.2.2 Propriétés liées à l'idéal maximal

Voyons maintenant des propriétés liées à l'idéal maximal dans une catégorie de Kimura. Notons $\mathcal{N}$ le $\otimes$-ideal maximal d'une catégorie $\mathcal{T}$, et $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}/\mathcal{N}$. Rappelons que $\mathcal{N}$ contient l'idéal $\mathcal{R}$ qui est maximal pour la propriété de conservativité, mais en général l'inclusion est stricte, donc la réduction modulo $\mathcal{N}$ n'est pas conservative. Dans les catégories de Kimura-O'Sullivan ce problème n'émerge pas.

Lemme 3.2.10. *Si $f \in \mathcal{N}(M, M)$ pour M un objet (im)pair, alors $f^{\dim(M)+1} = 0$.*

Démonstration. Voir ([20], 7.2.7) ■

Remarque. *Outre la nilpotence, le point clef de ce théorème est que la borne d'annulation est uniforme : elle ne dépend que de M. On peut en fait l'améliorer à l'ordre $\dim(M)$ mais cela ne sera pas nécessaire ici.*

Proposition 3.2.11. *Si M est de dimension finie, $\mathcal{N}(M, M)$ est un idéal nilpotent.*

Démonstration. On décompose M en une somme $M_+ \oplus M_-$ et tout endomorphisme f se décompose en la somme de deux endomorphismes préservant M_+ et M_- et d'un terme croisé : $f = f_+ + f_- + g$. Par construction on a $f_+ \circ f_- = f_- \circ f_+ = 0$. Si on décompose f^n on a donc des monômes de la forme

$$m = f_{\epsilon_1}^{k_1} \circ g \circ f_{\epsilon_2}^{k_2} \circ \cdots \circ f_{\epsilon_r}^{k_r}$$

où $\epsilon_i \in \{+, -\}$ et $k_i \in \mathbb{N}$ (il est important d'autoriser le cas $k_i = 0$ car il peut y avoir des termes de la forme g^l). Comme f_+ et f_- sont des endomorphismes d'objets pairs et impairs, le lemme 3.2.10 assure que $m = 0$ dès que $k_i > \dim(M)$.

Par ailleurs comme g se décompose en la somme de deux morphismes qui échangent les parités, il est donc $\otimes$-nilpotent, et donc nilpotent, pour un indice borné par $\dim(M)^2$. Dès lors comme les morphismes de symétrie permettent d'exprimer les compositions en fonction des produits tensoriels et des morphismes d'évaluation et de coévaluation, on en déduit que si $r > \dim(M)^2$, alors le monôme sera nul.

Finalement r est borné et les k_i aussi, donc pour $n > \dim(M) + \dim(M)^2$ on a $f^n = 0$. Ce qui prouve que $\mathcal{N}$ est un nil-idéal. Pour montrer que c'est un idéal nilpotent, on utilise ensuite un résultat de Nagata-Higman (voir ([20],7.2.8)). ■

Passons au résultat le plus important.

Théorème 3.2.12. *Le foncteur $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}} \to \overline{\mathcal{T}_{\mathrm{kim}}}$ de quotient par l'idéal $\mathcal{N}$ est conservatif.*

Démonstration. Cela découle du fait que $\mathcal{N}$ est nilpotent et de la proposition 3.1.10. ■

Corollaire 3.2.12.1. *Si M est de dimension finie, sa parité se détermine dans $\overline{\mathcal{T}}$.*

Démonstration. En effet le foncteur de projection est un $\otimes$-foncteur conservatif, donc on a $S^n M = 0$ si et seulement si $S^n \overline{M} = 0$, donc M est impair si et seulement si $\overline{M}$ l'est et ces deux objets ont la même dimension. ■

Rappelons que $\mathcal{N}$ est le seul idéal pour lequel la catégorie quotient est semi-simple. En outre comme on a supposé que $\mathcal{T}$ était pseudo abélienne, cela implique que le quotient est aussi une catégorie abélienne.

Corollaire 3.2.12.2. *Dans $\mathcal{T}_{\mathrm{kim}}$ tous les objets peuvent s'écrire comme somme d'objets indécomposables et un objet est indécomposable si et seulement si son image dans $\overline{\mathcal{T}}$ est un objet semi-simple.*

3.3 Cas des motifs

La partie précédente à étudié la propriété de dimension finie dans un cadre catégorique général. Comme nous avons vu que les catégories de motifs sont monoïdales rigides, on peut traduire dans ce contexte ce qui a été fait jusque là.

3.3.1 Traduction des résultats généraux

On peut maintenant annoncer la conjecture de Kimura-O'Sullivan.

Conjecture 3.3.1. *La catégorie des motifs de Chow sur un corps K est de Kimura-O'Sullivan.*

Remarquons que l'on peut faire deux réductions faciles :

- Comme (X, p, m) et $(X, p, 0)$ ont même espace d'endomorphisme, l'un est de dimension finie si et seulement si l'autre l'est. Plus généralement les constructions S_λ commutent aux twists de Tate.
- Comme $M \oplus N$ est de dimension finie si et seulement si M et N le sont, on peut se ramener au cas où $p =$Id.

Dès lors il suffit de vérifier la conjecture sur les motifs de la forme $\mathfrak{h}_\sim(X)$.

Remarque. *En revanche si la conjecture est fausse, il peut arriver que $\mathfrak{h}(X)$ ne soit pas de dimension finie, mais que pour un certain p, $(X, p, 0)$ soit de dimension finie.*

Avant d'en dire plus sur cette conjecture, voyons ce qu'il se passe sur d'autres choix d'équivalences.

Proposition 3.3.1. *Si la conjecture des signes $C^+(X)$ est vérifiée sur une variété X, alors $\mathfrak{h}_{\mathrm{hom}}(X)$ est de dimension finie.*

Démonstration. Grâce à la conjecture $C^+(X)$ on peut décomposer le motif $\mathfrak{h}_{\mathrm{hom}}(X)$ en

$$\mathfrak{h}^+_{\mathrm{hom}}(X) + \mathfrak{h}^-_{\mathrm{hom}}(X)$$

tel que ces deux objets donnent en cohomologie les sous espaces $H^+(X)$ et $H^-(X)$ découpés selon la parité du degré.

Mais comme le foncteur de cohomologie est un $\otimes$-foncteur, on en déduit les égalités

$$H\left(\bigwedge^n \mathfrak{h}^+_{\mathrm{hom}}(X)\right) = \bigwedge^n H^+(X) = \bigwedge^n H^+(X)$$

$$H\left(S^n \mathfrak{h}^-_{\mathrm{hom}}(X)\right) = S^n H^-(X) = \bigwedge^n H^n(X)$$

Où le passage de la deuxième à la troisième égalité viens du foncteur d'oubli entre la catégorie graduée et la catégorie non-graduée.

Dès lors en prenant un entier n plus grand que les dimensions de $H^+(X)$ et $H^-(X)$, il est clair que ces objets sont respectivement pairs et impairs. Or pour l'équivalence homologique, le foncteur H est fidèle, donc s'il envoie un objet sur 0, c'est que cet objet est lui même nul.

Donc pour n assez grand on a $\bigwedge^n \mathfrak{h}^+_{\mathrm{hom}}(X) = S^n \mathfrak{h}^-_{\mathrm{hom}}(X) = 0$. Donc $\mathfrak{h}_{\mathrm{hom}}(X)$ est bien de dimension finie. ∎

Par les réductions que nous avons évoqué, cela prouve bien que la catégorie des motifs homologiques est de Kimura-O'Sullivan si la conjecture des signes est vérifiée.

Corollaire 3.3.1.1. *Si la conjecture des signes est vérifiée, alors pour toute équivalence $\sim$ plus grossière que l'équivalence homologique, la catégorie $\mathrm{Mot}_\sim(k)_K$ est de Kimura-O'Sullivan.*

Par ailleurs ailleurs vu du théorème 3.2.7, on peut relier la conjecture de Kimura-O Sullivan pour plusieurs relations d'équivalence.

Proposition 3.3.2. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence adéquate plus fine que l'équivalence $\sim_\otimes$. Alors la conjecture de Kimura O-Sullivan pour $\sim_{rat}$ est équivalente à la même conjecture pour $\sim$.*

Plus généralement la conjecture de Kimura-O'Sullivan pour l'équivalence rationnelle implique la même conjecture pour toute équivalence adéquate. La réciproque est vraie pour toute relation adéquate dont l'idéal associé est un nil-idéal.

Démonstration. Sous la conjecture de Kimura-O'Sullivan, l'idéal $\mathcal{N}$ est un nil-idéal. Comme $\sim$ est plus fine que $\sim_{num}$, on en déduit que l'idéal associé est aussi un nil-idéal, donc par relèvement des idempotents, on en déduit que le $\otimes$-foncteur

$$\mathrm{CHM}(k)_K \longrightarrow \mathrm{Mot}_\sim(k)_K$$

est plein et essentiellement surjectif. Dès lors si on a la conjecture pour la catégorie $\mathrm{CH}(k)_K$ et que M est un objet de $\mathrm{Mot}_\sim(k)_K$, alors on peut le relever dans $\mathrm{CH}(k)$, le décomposer et pousser cette décomposition dans $\mathrm{Mot}_\sim(k)_K$ par le théorème 3.2.7.

Réciproquement si M est un objet de $\mathrm{CH}(k)_K$ et que l'on a la conjecture sur $\mathrm{Mot}_\sim(k)_K$, on pousse M dans $\mathrm{Mot}_\sim(k)_K$, on l'y décompose et on relève cette décomposition dans $\mathrm{CH}(k)_K$ par conservativité et surjectivité essentielle (car l'idéal définissant $\sim$ est un nil-idéal car inclus dans $\sqrt[\otimes]{0}$). ■

Dès lors il est équivalent d'étudier la conjecture pour $\sim_{rat}$, $\sim_{alg}$ ou encore $\sim_\otimes$. Rappelons la conjecture de Voïevodski.

Conjecture 3.3.2. $\sim_\otimes = \sim_{num}$.

Proposition 3.3.3. *La conjecture de Voïevodski implique celle de Kimura-O'Sullivan.*

Démonstration. On sait que $\sim_\otimes$ est plus fine que $\sim_{\mathrm{hom}}$. Donc si la conjecture de Voïevodski est vraie, alors on a

$$\mathrm{Mot}_\otimes(k) = \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(k) = \mathrm{Num}(k)$$

En particulier la conjecture standard D est vérifiée. Or la conjecture standard D implique la conjecture de Künneth et donc la conjecture des signes. Dès lors par la proposition 3.3.1, on en déduit que la catégorie $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(k)$ vérifie la conjecture de Kimura-O'Sullivan. Comme celle ci est aussi $\mathrm{Mot}_\otimes(k)$, on en déduit le résultat par la proposition 3.3.2. ■

Plus généralement relions la conjecture de Kimura-O'Sullivan à d'autres conjectures standards.

Notation. *On note toujours $C^+(X)$ la conjecture des signes pour X, $N(X)$ l'hypothèse où l'idéal définissant l'équivalence numérique est nilpotent, et $N'(X)$ l'hypothèse où l'idéal définissant l'équivalence numérique est un nil-idéal.*

Proposition 3.3.4. *On a une équivalence entre les conditions suivantes :*
- *Le motif de Chow $\mathfrak{h}(X)$ est de dimension finie.*
- *On a $C^+(X)$ et $N(X^n)$ pour tout $n \geq 1$.*
- *On a $C^+(X)$ et $N'(X^n)$ pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. $(2) \implies (3)$ est tautologique, $(3) \implies (1)$ vient du corollaire 3.3.1.1 et de la technique de relèvement des idempotents. Par conservativité du foncteur de projection sur les idéaux nil-idéaux, on en déduit que la décomposition relevée est bien celle en partie paire et impaire.

Enfin pour $(1) \implies (2)$, on déjà vu la deuxième partie à la proposition 3.2.11 pour le cas $n = 1$. Comme la propriété de dimension finie est stable par produit tensoriel et que $\mathfrak{h}(X \times X) = \mathfrak{h}(X) \otimes \mathfrak{h}(X)$, on en déduit donc le résultat pour tout $n \geq 1$. Pour le second point, supposons que l'on a une décomposition

$$\mathfrak{h}(X) = \mathfrak{h}^+(X) \oplus \mathfrak{h}^-(X)$$

Alors comme le foncteur de cohomologie est un $\otimes$-foncteur et que dans VecGr la décomposition est unique (car dans cette catégorie $\sqrt[\otimes]{0} = 0$), on en déduit que $H(\mathfrak{h}^+(X)) = H^+(X)$ et $H(\mathfrak{h}^-(X)) = H^-(X)$. Mais alors il est clair que les projecteurs définissant $\mathfrak{h}^+(X)$ et $\mathfrak{h}^-(X)$ relèvent les projecteurs de Künneth. D'où le résultat. ■

3.3.2 Résultats spécifiques aux motifs

La section précédente n'était qu'une traduction dans la catégorie des motifs de résultats généraux. On va maintenant essayer de voir des résultats spécifiques à cette catégorie.

Tout d'abord pour les catégories de motifs, l'idéal maximal $\mathcal{N}$ est bien connu, il s'agit de celui qui définit l'équivalence numérique. Dès lors le corollaire 3.2.12 se traduit par le fait que le foncteur

$$\mathrm{CHM}(k) \longrightarrow \mathrm{Num}(k)$$

est conservatif sur les objets de dimension finie, mais comme ce foncteur se factorise par l'équivalence homologique, on en déduit que sur les objets de dimension finie, le foncteur

$$\mathrm{CHM}(k) \longrightarrow \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(k)$$

est conservatif ! Une conséquence importante est l'absence de motifs fantômes.

Définition 3.3.1. *Un motif est dit fantôme s'il est non nul mais que sa cohomologie est nulle.*

Proposition 3.3.5. *Il n'y a pas de motifs fantômes dans* $\mathrm{CH}_{\mathrm{kim}}(k)$.

Démonstration. Via le corollaire 3.2.12, on en déduit que le foncteur de projection est conservatif sur l'équivalence homologique pour la sous catégorie des motifs de dimension finie. On se ramène donc au cas de cette catégorie.

Un motif homologique est nul si et seulement si son identité est homologue à 0. Comme le foncteur H est fidèle, on en déduit que si $H(M) = 0$ alors $M = 0$ dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(k)$. D'où le résultat. ∎

On peut généraliser cette étude à la conservativité du foncteur H. La projection sur les motifs homologiques est certes conservative, mais ce n'est pas forcément le cas du foncteur cohomologique, même modulo l'équivalence homologique, car on sait pas si celui ci est plein. On va donc donner une condition pour avoir ce résultat plus fort.

Proposition 3.3.6. *On suppose que* **1** *est irréductible modulo l'équivalence homologique. Alors le foncteur de cohomologie est conservatif sur toute catégorie de Kimura-O'Sullivan incluse dans celle des motifs homologiques.*

Démonstration. Prenons $f \in \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(M, N)$ tel que $H(f)$, soit un isomorphisme. Comme sur les catégories de Kimura-O'Sullivan le passage au numérique est conservatif par la proposition 3.2.11, on va montrer que f_{num} est aussi un isomorphisme.

On décompose $M = M^+ \oplus M^-$ et $N = N^+ \oplus N^-$ en parties paires et impaires. Or comme l'équivalence homologique est plus grossière que la $\otimes$-équivalence, on en déduit que dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(k)$ on a $\sqrt[\otimes]{0} = 0$. Dès lors f se décompose en $f_+ + f_-$ où $f_+ : M^+ \to N^+$ et $f_- : M^- \to N^-$ par la proposition 3.2.6.

Par hypothèse $H(f)$ est un isomorphisme, donc c'est aussi le cas de $H(f_+)$ et de $H(f_-)$. Dès lors on peut traiter séparément les cas pairs et impairs. Expliquons d'abord le premier. On note r_+ la dimension de $H(M^+)$ et $H(N^+)$. On pose alors

$$U : \bigwedge^{r_+} M^+ \otimes (\bigwedge^{r_+} N^+)^\vee$$

Cet objet est non nul (de dimension de Kimura 1)par le choix que l'on a fait de l'entier r_+. Via la formule d'adjonction, on voit que f induit un morphisme $g : U \to \mathbf{1}$. Par ailleurs comme H est fidèle et que $H(g)$ est un monomorphisme (c'est même un isomorphisme), on en déduit que g est aussi un monomorphisme. Dès lors par la propriété d'irréductibilité on en déduit que g est un isomorphisme (car U est non nul puisque de dimension 1), et c'est donc aussi le cas de g_{num}.

En utilisant le fait que $\mathrm{Mot}_{\mathrm{num}}(k)$ est abélienne semi-simple, montrons que le fait que g_{num} soit un isomorphisme implique la même chose pour f_{num}. Notons K le noyau de f_{num} (existe dans une catégorie abélienne) et décomposons le motif

$$M^+ = K \oplus M'.$$

On note k et r'_+ leur dimension de Kimura respectives. Dès lors on décompose

$$\bigwedge^{r_+} M^+ = \bigwedge^{r'_+} M' \otimes \bigwedge^{k} K.$$

et alors $g_{\mathrm{num}} = \bigwedge^{r_+} f_{\mathrm{num}}$ étant injectif, on en déduit que $k = 0$ sinon il y aurait des éléments dans le noyau de g_{num}. Ainsi $K = 0$ et f_{num} est bien un monomorphisme. On procède de même avec l'image pour en déduire que f_{num} est un épimorphisme. Comme on est dans une catégorie abélienne cela prouve que f_{num} est un isomorphisme, d'où le résultat. Le cas impair se traite de la même façon.

■

En combinant ce résultat avec le fait que la conjecture de Kimura-O'Sullivan implique la conservativité de CH$(k) \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(k)$, et qu'elle implique aussi la conjecture pour l'équivalence homologique,on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 3.3.6.1. *Sous la conjecture de Kimura-O'Sullivan et si le motif* **1** *est irréductible modulo l'équivalence homologique, alors le foncteur de cohomologie H est conservatif sur la catégorie des motifs de Chow.*

Il faut donc trouver une condition suffisante pour que le motif **1** soit irréductible.

Proposition 3.3.7. *Sous la conjecture standard D, le motif homologique* **1** *est irréductible.*

Démonstration. On sait que la catégorie Num(k) est abélienne semi-simple par le théorème de Jannsen. Dès lors comme End$(\mathbf{1})$ y est un corps, c'est que l'objet **1** est irréductible (sinon son algèbre d'endomorphismes ne serait pas intègre). Mais sous la conjecture D, on a Num$(k) = \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(k)$. D'où le résultat. ■

Rappelons que la conjecture de Voïevodski implique la conjecture D ainsi que la conjecture de Kimura-O'Sullivan. On a donc le résultat suivant.

Corollaire 3.3.7.1. *Sous la conjecture D et la conjecture de Kimura-O'Sullivan, le foncteur cohomologique est conservatif sur la catégorie des motifs de Chow. C'est en particulier le cas sous la conjecture de Voïevodski.*

Avec la conjecture de Voïevodski on peut en fait montrer un résultat plus fort d'irréductibilité.

Proposition 3.3.8. *Si la conjecture de Voïevodski est vérifiée, alors* **1** *est irréductible dans la catégorie des motifs de Chow.*

Démonstration. L'hypothèse que nous allons utiliser est que $\sqrt[\otimes]{0} = \mathcal{N}$ ce qui est exactement l'hypothèse de la conjecture de Voïevodski. Rappelons par ailleurs que par le théorème de Jannsen, la catégorie quotient par $\mathcal{N}$ est abélienne semi-simple.

Donnons nous un monomorphisme $u : U \hookrightarrow \mathbf{1}$ et réduisons le modulo $\mathcal{N}$ en un élément $\overline{u}$. Comme la catégorie d'arrivée est abélienne semi-simple et que End$(\mathbf{1})$ y est un corps, on en déduit que **1** y est irréductible. Dès lors on a deux possibilités pour $\overline{u}$:

- Ou bien Im$(\overline{u}) = \mathbf{1}$ et dans ce cas $\overline{u}$ admet un inverse à droite car on est dans une catégorie abélienne semi-simple.
- Ou bien Im$(\overline{u}) = 0$ et donc $\overline{u} = 0$.

Dans le premier cas notons $\overline{v}$ un inverse de $\overline{u}$ et relevons le en v. Comme End$(\mathbf{1})$ est aussi un corps dans la catégorie des motifs de Chow, on en déduit que $\mathcal{N}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = 0$, donc quand on relève la relation $\overline{u} \circ \overline{v}$ =Id à la catégorie des motifs de Chow, on a encore $u \circ v$ =Id. Comme u est en outre un monomorphisme, on en déduit que $v \circ u = 0$, et donc u est bien un isomorphisme.

Dans le deuxième cas on a $\overline{u} = 0$. Donc $u^{\otimes n} = 0$ dans la catégorie des motifs de Chow. Prenons un tel entier n minimal. Via l'égalité

$$u^{\otimes n} = u \circ (u^{\otimes n-1} \otimes \mathrm{Id}_U)$$

on voit que si $n > 1$, alors comme u est un monomorphisme, il faudrait que $u^{\otimes n-1}$ soit nul. Ce qui est absurde. Donc $n = 1$, c'est à dire que $u = 0$. Comme c'est un monomorphisme, on en déduit que $U = 0$.

Finalement on a bien prouvé la propriété d'irréductibilité dans la catégorie des motifs de Chow.

■

3.3.3 Changement de base

Faisons maintenant varier le corps k sur lequel on étudie la conjecture de Kimura-O'Sullivan. Plus précisément donnons une extension de corps $K|k$. Si la conjecture de Kimura-O'Sullivan est vérifié pour CH(k), il est n'est pas clair que cela soit aussi le cas dans CH(K) car il existe à priori des variétés sur K dont le motif n'est pas défini sur k. En revanche on peut espérer obtenir ainsi la conjecture de Kimura-O'Sullivan pour les motifs qui émergent de ce changement de base. Réciproquement si on a la conjecture de Kimura-O'Sullivan pour CH(K) on se demande si cela implique la conjecture pour CH(k).

Lemme 3.3.9. *Soit X une variété projective lisse sur k telle que $\mathfrak{h}(X)$ est de dimension finie sur CH(k). Alors $\mathfrak{h}(X_K)$ est de dimension finie dans CH(K).*

Démonstration. Remarquons d'abord que les notions d'objet pair ou impair sont stables par changement de base. En effet celles ci concernent simplement le fait que les projecteurs s_n ou λ_n sont rationnellement équivalent à 0 pour n assez grand. Or un cycle rationnellement équivalent à 0 l'est encore après changement de base. Par ailleurs la construction des projecteurs s_n et λ_n commute au changement de base, car ces projecteurs sont les graphes des fonctions de permutations, définis sur le corps premier. On a donc

$$S^n\mathfrak{h}(X_K) = (S^n\mathfrak{h}(X))_K,\ \bigwedge^n \mathfrak{h}(X_K) = \left(\bigwedge^n \mathfrak{h}(X)\right)_K.$$

Enfin si on se donne une décomposition en motif pair et impair $\mathfrak{h}(X) = \mathfrak{h}^+(X) \oplus \mathfrak{h}^-(X)$, en appliquant le changement de base cela induit encore une décomposition, et celle ci est encore composée d'un objet pair et d'un objet impair par ce qui précède. D'où le résultat. ■

Pour la question réciproque rappelons un lemme qui sera plusieurs fois utile.

Proposition 3.3.10. *Soit $K|k$ une extension de corps X une k-variété projective lisse. Alors le morphisme naturel $X_K \to X$ induit une inclusion sur les groupes de Chow*

$$\mathrm{CH}^i(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^i(X_K)$$

Par ailleurs on a les cas particuliers suivants :

- *Si l'extension est purement inséparable alors c'est en fait un isomorphisme.*
- *SI l'extension est finie galoisienne de groupe de Galois G alors l'image de ce morphisme est exactement $\mathrm{CH}^i(X_K)^G$.*

Démonstration. Pour la question d'injectivité, nous allons montrer que le noyau est de torsion, ce qui prouvera qu'il est nul car nous regardons les groupes de Chow à coefficients rationnels. Nous allons procéder par plusieurs simplifications.

Tout d'abord on traite le cas où $K|k$ est finie normale. On rappelle que le groupe de Chow peut être défini par la formule suivante

$$\mathrm{CH}^i(X_K) = \mathrm{Coker}\left(\varphi := \bigoplus_{x\in X_K^{(i-1)}} \kappa(x)^\times \longrightarrow \bigoplus_{x\in X_K^{(i)}} \mathbb{Q}\right).$$

Dès lors si un cycle Z est nul après une extension de la base, alors il existe des fonctions $(f_x) \in \bigoplus_{x\in X_K^{(i-1)}} \kappa(x)^\times$ telles que $Z = \varphi(f_x)$. Comme Z est défini sur k, on remarque que si $x, x' \in X_K^{(i-1)}$ sont conjugués par l'action du groupe de Galois, alors les éléments f_x et f'_x vont être conjugués par l'action induite sur les corps résiduels. Dès lors on peut trouver une variété x_0 sur k qui une fois étendue à K se décompose le long de x et de tous ses conjugués. Si sur ces variétés on prend la fonction

$$\tilde{f}_{x_0} = \prod_{x' \text{ conjugué à } x} f_{x'} \in \kappa(x_0)^\times.$$

Alors on construit un élément tel que $\varphi(\tilde{f}_x) = [K : k]_{\mathrm{sep}} Z$ sur k. Dès lors comme le groupe de Chow est à coefficients rationnels, on en déduit l'injectivité.

Si maintenant $K|k$ est une extension algébrique, on peut l'écrire comme la limite de ses sous extensions finies normales. Si maintenant un cycle Z sur X est équivalent à 0 dans X_K, et si l'on prend $K \supset K' \supset k$ un corps normal sur lequel est défini Z ainsi que tous les points et les fonctions qui interviennent dans son équivalence à 0, on voit que Z est déjà nul sur $\mathrm{CH}^i(X_{K'})$, et donc on peut appliquer le cas précédent.

Dès lors on peut maintenant supposer que k et K sont algébriquement clos car dans le diagramme suivant les morphismes verticaux sont injectifs

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}^i(X) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{CH}^i(X_K) \arrow[d, hook] \\
\mathrm{CH}^i(X_{\overline{k}}) \arrow[r] & \mathrm{CH}^i(X_{\overline{K}})
\end{tikzcd}$$

donc si on montre que le morphisme inférieur est injectif, cela sera aussi le cas du dernier.

Dans le cas où k est clos il est usuel que $\mathrm{CH}^i(X_K)$ soit isomorphe à la colimite des $\mathrm{CH}^i(X \times_k U)$ pour U une k-variété de type fini. Fixons U un ouvert quelconque de cette colimite et notons $p : X \times U \to X$ la projection canonique et $s : X \to X \times U$ la section induite par le choix d'un k-point (possible car k est clos). Dès lors le morphisme suivant est injectif

$$p^* : \mathrm{CH}^i(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^i(X \times U).$$

Mais alors on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{CH}^i(X \times U) \arrow[d, hook] \\
\mathrm{CH}^i(X) \arrow[ur, hook, "p^*"] \arrow[r] & \varinjlim \mathrm{CH}^i(X \times U)
\end{tikzcd}$$

Où le morphisme vertical est injectif par la définition de la colimite dans la catégorie des groupes abéliens. Finalement on a bien la propriété d'injectivité voulue.

Dans le cas particulier purement inséparable, traitons d'abord le cas fini de degré r. On se donne un cycle $\gamma \in \mathrm{CH}^i(X_K)$ que l'on écrit $\gamma = p^r\left(\frac{1}{p^r}\gamma\right)$. Or $\frac{1}{p^r}\gamma$ est défini sur sur k, donc γ est bien dans $\mathrm{CH}^i(X)$. Le cas infini se ramène au cas fini en prenant une union croissante d'extension fini purement inséparables.
Pour le cas particulier fini galoisien on renvoie à l'annexe B. ■

Corollaire 3.3.10.1. *Soit M un motif et $K|k$ une extension de corps. Si $M_K = 0$ alors $M = 0$.*

Démonstration. Si p est le projecteur qui défini M dans $\mathrm{CH}^i(X \times X)$, alors la nullité de M_K signifie que ce projecteur est nul dans $\mathrm{CH}^i(X_K \times X_K)$. Par l'injectivité du morphisme canonique on en déduit que p était déjà nul sur k grâce à la proposition 3.3.10, d'où le résultat. ■

Traitons maintenant un cas particulier de la réciproque du lemme 3.3.9.

Lemme 3.3.11. *Soit M est un motif de Chow sur k,si M_K est (im)pair, alors c'est aussi le cas de M.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire précédent aux projecteurs s_n et λ_n. ■

En revanche pour la question de la dimension finie, c'est à priori plus compliqué car une décomposition $M_K = M_K^+ \oplus M_K^-$ n'est pas à priori définie sur k.La preuve du théorème suivant est issue de [35].

Théorème 3.3.12. *Soit $K|k$ une extension de corps et $M = (X, p, m)$ un motif sur k. Alors M est de dimension finie si et seulement si M_K l'est.*

Démonstration. On a déjà vu le sens direct. Réciproquement supposons que M_K est de dimension finie. On va procéder à différentes réductions pour se ramener au cas fini galoisien. Traitons d'abord ce cas. On se donne donc une décomposition $M_K = (M^+)_K \oplus (M^-)_K$ qui provient de deux projecteurs $p = p^+ + p^-$ où les deux derniers sont à priori définis sur K. En revanche p est bien défini sur k.

Dès lors si $G = \mathrm{Gal}(K|k)$, chaque élément $g \in G$ induit un morphisme algébrique sur X_K. Dès lors ce sont des correspondances sur X_K de degré 0. De plus comme p est défini sur k, ces correspondances commutent à p. Dès lors on a un morphisme de groupe $G \to \mathrm{End}(M_K)$ dont on note encore g les images. Ainsi on peut poser l'élément

$$\tilde{p^+} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ p^+ \circ g^{-1}.$$

Choisissons maintenant comme cohomologie de Weil une cohomologie l-adique. Ce choix est important car sur celle ci on sait que les classes qui viennent des correspondances sont invariantes par l'action de Gal$(\overline{k}|k)$. En particulier elles sont invariantes par G. Par ailleurs celle ci est définie en passant à la clôture algébrique, donc on a $H^*_{\mathrm{et}}(M_K, \mathbb{Q}_l) \simeq H^*_{\mathrm{et}}(M, \mathbb{Q}_l)$ en tant que Gal$(\overline{k}|k)$-modules.

Revenons maintenant à nos projecteurs p^+ et $\tilde{p^+}$. Par unicité de la décomposition dans la catégorie des espaces vectoriels, p^+ est nécessairement un relevé du projecteur de Künneth Δ^+. Or cette classe est un morphisme de Gal$(\overline{k}|k)$-modules, donc dans $H^*(M \otimes M)$ elle correspond à un élément Gal$(\overline{k}|k)$-invariant. En particulier cette classe est Galois invariante.

Dès lors les classes des $g \circ p^+ \circ g^{-1}$ valent aussi Δ^+ en cohomologie. Dès lors $\tilde{p^+}$ est un relevé de Δ^+. Ainsi comme le relevé est unique dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(K)$, on en déduit que p^+ et $\tilde{p^+}$ diffèrent par un élément de l'idéal homologique sur M_K.

Or comme M_K est de dimension finie, l'idéal homologique est nilpotent pour cet élément. Dès lors $\tilde{p^+}$ n'est pas nécessairement un idempotent, mais on a au moins un nilpotent n tel que

$$\tilde{p^+} \circ \tilde{p^+} = \tilde{p^+} + n.$$

En outre n commute à $\tilde{p^+}$ et est Gal$(\overline{k}|k)$-invariant car $\tilde{p^+}$ l'est. On a ensuite le calcul élémentaire

$$(\tilde{p^+} + (1 - 2\tilde{p^+}) \circ n)^{\circ 2} = \tilde{p^+} + (1 - 2\tilde{p^+}) \circ n + n \circ n \circ (4n - 3)$$

qui montre que quitte à remplacer $\tilde{p^+}$ par $\tilde{p^+} + (1 - 2\tilde{p^+}) \circ n$, on obtient un nouveau projecteur qui est Gal$(\overline{k}|k)$-invariant, qui diffère de p^+ par un nilpotent, mais on a abaissé l'ordre de nilpotence de l'élément qui fait la différence ($n \circ n \circ (4n - 3)$ est d'ordre de nilpotence strictement plus petit que celui de n). En itérant ce procédé on fini donc par arriver sur un élément q^+ qui est idempotent, Gal$(\overline{k}|k)$-invariant et qui diffère de p^+ par un élément homologiquement nul.

On a donc bien construit $q^+ = p^+ + m$ un idempotent équivariant qui relève Δ^+. Dès lors comme M_K est de dimension finie la projection sur les motifs cohomologiques est conservative, donc Im$(q^+) \simeq \mathrm{Im}(p^+) = (M^+)_K$. De même en posant $q^- = p - p^+$ on a Im$(q^-) \simeq (M^-)_K$. On obtient donc une nouvelle décomposition en objet pair et impair qui est cette fois définie sur k (car les projecteurs sont Gal$(\overline{k}|k)$-invariants). Donc M est bien de dimension finie.

Procédons maintenant aux réductions. Si $K|k$ est seulement finie séparable, on peut plonger K dans K^{nor} de sorte que $K^{\mathrm{nor}}|k$ soit finie galoisienne. Dès lors si M_K est de dimension finie, par le sens évident de la proposition, c'est aussi le cas de $M_{K^{\mathrm{nor}}}$, donc on peut appliquer le cas précédent.

Supposons que l'extension $K|k$ est finie. Rappelons que toute extension finie se scinde en $K|k^{sep}|k$ de sorte que $k^{sep}|k$ soit séparable et $K|k^{sep}$ soit purement inséparable. Si on suppose que M_K est de dimension finie, alors c'est aussi le cas de $M_{k^{sep}}$ par la proposition 3.3.10 qui prouve que les projecteurs définissant les parties positives et négatives viennent de k^{sep}. Dès lors on est ramené au cas fini séparable.

En combinant le cas précédent avec un argument de descente on peut se ramener au cas ou k est algébriquement clos. Passons maintenant au cas où $K|k$ est de type fini. Dans celui ci il existe une variété quasi-projective U définie sur k qui a K comme corps de fonctions. Dès lors on peut remplacer X par $\times U$ et se placer sur la catégorie des U-variétés au lieu des k-variétés. On s'est donc ramené au cas ou le corps K est le corps de base.

Enfin dans le cas général, si on se donne une extension $K|k$ quelconque telle que $M_K \simeq (M^+)_K \oplus (M^-)_K$, alors si on prend K' un corps de définition de ces deux motifs, celui ci est de type fini sur k et cette décomposition prouve que que $M_{K'}$ est de dimension finie. On est donc ramené au cas précédent.

Finalement on a bien prouvé le résultat pour un corps quelconque.

■

En prenant des corps algébriquement clos de transcendance infinie sur le corps premier, un argument de descente prouve alors immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.12.1. *Si la conjecture de Kimura-O'Sullivan vaut sur $\mathbb{C}$ ou un corps $\mathbb{C}_p$, alors elle vaut pour tout corps de caractéristique nulle.*

3.4 Lien avec les autres conjectures

3.4.1 Conjecture de Bloch

On peut donc maintenant donner une preuve de la conjecture de Bloch sur les surfaces complexes avec notre nouvelle interprétation de la dimension finie.

Rappelons que l'on a vu une forme motivique de cette conjecture : si on introduit le motif transcendant $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)$ alors la conjecture de Bloch indique que $H^2_{\mathrm{tr}}(S) = 0$ implique la nullité du motif sous-jacent. C'est donc exactement une question de motif fantôme.

Justement les motifs de dimension finie ne sont jamais fantômes. Dès lors si $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)$ est de dimension finie, la conjecture de Bloch sera vérifiée.

Comme dans la décomposition de Chow-Kunneth raffinée du motif d'un surface, tous les termes autres que $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}$ sont découpés sur des variétés abéliennes, la finitude de $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)$ est équivalente à celle de $\mathfrak{h}^2(S)$. En résumé on a prouvé le résultat suivant.

Proposition 3.4.1. *La conjecture de Kimura-O'Sullivan pour les surfaces implique la conjecture de Bloch.*

Plus généralement on pourrait se demander si le fait que deux surfaces ont des cohomologies transcendantes isomorphes via une correspondance implique que leurs motifs transcendants sont isomorphes. C'est une question de conservativité du foncteur H.

Par ailleurs on a vu que le foncteur des groupes de Chow était conservatif sur $\mathbb{C}$. Avec les résulats de la section précédente, on a donc la version améliorée de la conjecture de Bloch.

Proposition 3.4.2 (Bloch)**.** *Supposons vérifié la conjecture de Kimura-O'Sullivan et que le motif homologique **1** est indécomposable. Alors les faits suivants sont équivalents.*

- $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S) \simeq \mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S')$.
- *Il existe une correspondance f qui induit un isomorphisme $T(S) \simeq T(S')$.*
- *Il existe une correspondance qui f qui induit un isomorphime $H^2_{\mathrm{tr}}(S) \simeq H^2_{\mathrm{tr}}(S')$.*

Remarque. *Sous la conjecture de Hodge, le dernier point peut être paraphrasé en l'existence d'un morphisme de structure de Hodge polarisables.*

3.4.2 Lien avec la conjecture de Bloch-Beilinson-Murre

On va enfin montrer que la conjecture de filtration de Bloch-Beilinson-Murre implique la conjecture de Kimura-O'Sullivan. C'est une autre conjecture qui implique l'absence de motifs fantômes. Dans cette partie on pourrait en fait supposer seulement la conjecture BBM pour des variétés ainsi que leur puissances, mais nous allons supposer directement la conjecture pour toute la catégorie des motifs rationnels.

Notation. *Dans cette section on fixe un motif M et note d la dimension de la variété sous jacente.*

Théorème 3.4.3. *Sous la conjecture BBM, l'idéal homologique est nilpotent à la puissance* $2d + 1$.

Démonstration. Soit f une correspondance sur M. Alors si on prend son écriture matricielle sur la décomposition de Chow-Künneth, on a vu que celle ci était de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{rat} = \mathrm{hom} & * & * & & * & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & & 0 & & \mathrm{rat} = \mathrm{hom} \end{pmatrix}$$

Dès lors si f est homologiquement triviale, cette matrice est triangulaire supérieure strictement. Le point important est que cette base de triangulation ne dépend pas de f.

Donc si on se donne $f_1, \cdots, f_{2d+1}$ qui sont homologiquement triviaux, lorsque l'on calcul matriciellement la composition $f_1 \circ \cdots \circ f_{2d+1}$ la décomposition par blocs montre directement que cette composition est nulle. ■

Corollaire 3.4.3.1. *Sous la conjecture BBM, il n'y a pas de motifs fantômes dans CH*(k).

Démonstration. On a déjà vu qu'il n'y avait pas de motifs fantômes dans $\mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(k)$. Par ailleurs si l'idéal homologique est nilpotent alors la projection $\mathrm{CH}(k) \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{hom}}(k)$ est conservative, d'où le résultat ■

Corollaire 3.4.3.2. *La conjecture BBM implique la conjecture de Kimura-O'Sullivan.*

Démonstration. En effet cette conjecture implique la conjecture de Künneth, et donc la conjecture de Kimura-O'Sullivan dans la catégorie des motifs homologiques. Pour remonter cette conjecture dans CH(k), on utilise alors la réciproque de la proposition 3.3.2. ■

4 Calculs simples de groupes de Chow et de motifs

Pour tester plus précisément la notion de dimension finie des groupes de Chow, Nous allons maintenant voir quelques constructions de variétés projectives lisses usuelles, leur signification en terme de groupe de Chow et de motifs. Nous étudierons ensuite certains motifs particuliers.

4.1 Constructions élémentaires

Les constructions des Blow-up et des fibrés projectifs sont importantes car elles permettent d'obtenir de nouvelles variétés à partir de celles existantes. Cependant nous allons voir qu'au niveau des motifs elles n'apportent pas de nouveaux objets.

Cadre. *Pour les trois prochaines constructions on peut supposer que l'on regarde les groupes de Chow à coefficients entiers.*

4.1.1 Fibrés projectifs

On se donne X une variété projective lisse sur un corps k et $\mathcal{E}$ un fibré projectif de dimension r sur X, en le projectivisant on obtient :

$$\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow X.$$

Par ailleurs $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ dispose d'un faisceau localement libre canonique $\mathcal{O}_\pi(1)$. Alors celui ci correspond à un élément de $c_1(\mathcal{O}_\pi(1)) \in \mathrm{CH}^1(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ et la formule d'intersection induit alors un morphisme canonique

$$h : \mathrm{CH}_l(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \longrightarrow \mathrm{CH}_{l-1}(\mathbb{P}(\mathcal{E})).$$

Théorème 4.1.1. *Les groupes de Chow de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ s'expriment en fonction de ceux de X. Plus précisément par la formule suivante :*

$$\sum_{k=0}^{r} h^k \pi^* : \bigoplus_{k=0}^{r} \mathrm{CH}_{l-r-1+k}(X) \longrightarrow \mathrm{CH}_l(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$$

induit un isomorphisme. Plus synthétiquement on a donc un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{CH}^l(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \simeq \bigoplus_{k=0}^{r} \mathrm{CH}^{l-k}(X)$$

Démonstration. Voir ([21],9.25). ■

En terme du groupe de Chow total, si on introduit les torsions de Tate, l'égalité précédente se réécrit

$$\mathrm{CH}^*(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \simeq \bigoplus_{k=0}^{r} \mathrm{CH}^{*-k}(X)$$

Nous avons insisté sur la fonctorialité de cette décomposition car via l'identité de Manin on va en déduire une égalité motivique.

Proposition 4.1.2. *Le motif de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ prend la forme suivante :*

$$\mathfrak{h}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \simeq \bigoplus_{i=0}^{r} \mathfrak{h}(X)(-i)$$

Démonstration. Dans la preuve du théorème 4.1.1 on voit que l'isomorphisme est donné par une correspondance λ, et c'est aussi le cas de son inverse μ. Donnons nous alors une variété projective lisse quelconque T. Par changement de base des faisceaux localement libres, $T \times \mathbb{P}(\mathcal{E})$ est un fibré projectif de rang $r-1$ au dessus de $T \times X$. Mais alors par le théorème 4.1.1 on a un isomorphisme

$$\mathrm{CH}(T \times \mathbb{P}(\mathcal{E})) \simeq \bigoplus_{k=0}^{r} \mathrm{CH}(T \times X)(-k)$$

qui est donné par $\mathrm{Id}_T \times \lambda$ et d'inverse $\mathrm{Id}_T \times \mu$. Dès lors la correspondance λ induit un morphisme

$$\mathfrak{h}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{r} \mathfrak{h}(X)(-i)$$

qui est un isomorphisme au niveau des groupes de Chow, et ceci pour tous les T-points. Par le principe d'identité de Manin on en déduit que c'est un isomorphisme. ■

Ainsi en regardant des fibrés projectifs au dessus d'une variété on ne crée pas de nouveaux motifs. Un exemple facile est alors le suivant.

Exemple 4.1.1. *Le motif de $\mathbb{P}^n_k$ a la forme suivante*

$$\mathfrak{h}(\mathbb{P}^n_k) = \bigoplus_{i=0}^{r} \boldsymbol{1}(-i).$$

Par ailleurs on voit que le foncteur de motifs n'est pas conservatif (et donc non pleinement fidèle) : deux fibrés projectifs non isomorphes ont des motifs isomorphes.

4.1.2 Blow-up

Donnons nous maintenant une variété projective lisse X et Y une sous variété projective lisse de codimension r. Une construction bien connue consiste à éclater X le long de Y. On obtient donc un morphisme

$$\tau : \mathrm{Bl}_Y(X) \longrightarrow X$$

Par ailleurs on obtient un diviseur D dit exceptionnel dans $\mathrm{Bl}_Y(X)$ qui correspond à la préimage de Y. Notons j l'inclusion de D dans $\mathrm{Bl}_Y(X)$. On note τ_D la restriction de τ à ce diviseur, c'est alors un fibré projectif. Enfin notons $h = c_1(\mathcal{O}_{\tau_D}(1)) = -D_{|D}$ qui est un diviseur sur D.

Théorème 4.1.3. *Les groupes de Chow de $\mathrm{Bl}_Y(X)$ s'expriment en fonction de ceux de X grâce à l'isomorphisme suivant :*

$$\varphi = \begin{cases} \bigoplus_{k=0}^{r-2} \mathrm{CH}_{l-r+1+k}(Y) \oplus \mathrm{CH}_l(X) \longrightarrow \mathrm{CH}_l(\mathrm{Bl}_Y(X)) \\ (Z_0, \cdots, Z_{r-2}, Z) \longrightarrow \sum_{k=0}^{r-2} j_* h^k \tau_D^* Z_k + \tau^* Z \end{cases}.$$

Plus synthétiquement on a donc un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{CH}^l(\mathrm{Bl}_Y(X)) \simeq \mathrm{CH}^l(X) \oplus \bigoplus_{k=1}^{r-1} \mathrm{CH}^{l-k}(Y)$$

Démonstration. Voir ([21], 9.27). ■

Encore une fois on peut relever cet isomorphisme à une relation motivique.

Proposition 4.1.4. *Le motif de $\mathrm{Bl}_Y(X)$ prend la forme suivante :*

$$\mathfrak{h}(\mathrm{Bl}_Y(X)) = \mathfrak{h}(X) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathfrak{h}(Y)(-i)$$

Démonstration. Dans la preuve du théorème 4.1.3 on voit que l'isomorphisme est donné par une correspondance λ, et c'est aussi le cas de son inverse μ. Donnons nous alors une variété projective lisse quelconque T. Par changement de base, $T \times \mathrm{Bl}_Y(X)$ est le blow-up de $T \times X$ le long de $T \times Y$. Mais alors par le théorème 4.1.3 on a un isomorphisme

$$\mathrm{CH}(T \times \mathrm{Bl}_Y(X)) \simeq \mathrm{CH}(T \times X) \oplus \bigoplus_{k=1}^{r-1} \mathrm{CH}(T \times Y)(-k)$$

qui est donné par $\mathrm{Id}_T \times \lambda$ et d'inverse $\mathrm{Id}_T \times \mu$. Dès lors la correspondance λ induit un morphisme

$$\mathfrak{h}(\mathrm{Bl}_Y(X)) \longrightarrow \mathfrak{h}(X) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathfrak{h}(Y)(-i)$$

qui est un isomorphisme au niveau des groupes de Chow, et ceci pour tous les T points. Par le principe d'identité de Manin on en déduit que c'est un isomorphisme. ■

Enfin comme une variété et son Blow-up sont toujours birationnellement équivalentes, on déduit de cet exemple que le motif n'est pas un invariant birationnel en général. Cependant on peut retrouver un fait bien connu de théorie birationnelle.

Corollaire 4.1.4.1. *Deux variétés projectives lisses sur $\mathbb{C}$ birationnellement équivalentes ont les mêmes nombres de Hodge $h^{0,p}$ pour $0 \leq p \leq n$.*

Démonstration. Rappelons que toute équivalence birationnelle peut s'obtenir par une suite de Blow-up et Blow-down, via le théorème de factorisation faible. Il suffit donc de prouver le résultat pour un seul Blow-up. Mais alors la formule dans la catégorie des motifs implique la même chose dans la catégorie des structures de Hodge en appliquant le foncteur de réalisation. Dès lors on observe que les termes ajoutés au motif de la base viennent de variétés de dimension strictement plus petites et sont tordus par un terme qui ne permet pas dans le diamant de Hodge de modifier les termes extrémaux. Ceci étant les nombres $h^{0,p}$ et $h^{p,0}$, on en déduit le résultat voulu. ■

4.1.3 Espace cellulaire

Contrairement au cas de la topologie algébrique où toute variété analytique compacte admet une décomposition cellulaire (via la théorie de Morse), en géométrie algébrique il est très rare d'avoir une telle décomposition.

Définition 4.1.1. *Soit S un schéma projectif lisse sur un corps k et X un schéma plat, quasi-projectif sur S de dimension relative n. On dit que X admet une décomposition cellulaire sur S s'il existe une filtration $X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_r = \emptyset$ telle que :*

- *Les X_i sont des sous S-schémas fermés de X.*
- *Il existe un entier $d_i \in \mathbb{Z}$ tel que $X_i - X_{i+1}$ soit S-isomorphe à $\mathbb{A}_S^{n-d_i}$.*

Autrement dit X est une S-variété quasi-projective et plate et on dispose d'une morphisme bijectif

$$\bigsqcup_i \mathbb{A}_S^{d_i} \longrightarrow X.$$

Remarque. *Dans cette définition il est important de ne pas demander à ce que les X_i soit irréductibles ou de dimension strictement décroissante, pour permettre d'avoir plusieurs cellules de même dimension.*

Par ailleurs dans la définition on voit que les X_i sont eux même des espaces cellulaires.

Lemme 4.1.5. *Si X et Y admettent une décomposition cellulaire sur la même base S, c'est aussi le cas de $X \times_S Y$.*

Démonstration. La preuve est immédiate avec la deuxième interprétation. Donnons nous des recouvrements

$$\bigsqcup_i \mathbb{A}_S^{x_i} \longrightarrow X$$

$$\bigsqcup_i \mathbb{A}_S^{y_i} \longrightarrow X$$

Alors par les propriétés de changement de base, $X \times_S Y$ est encore plat et quasi-projective sur S, de plus on a un recouvrement cellulaire de la forme suivante :

$$\bigsqcup_{i,j} \mathbb{A}_S^{x_i+y_j} \longrightarrow X \times_S Y.$$

Ce qui permet de conclure.

■

Exemple 4.1.2. *Les variétés de drapeaux admettent une décomposition cellulaire sur S, en particulier c'est aussi le cas pour les espaces de Grassmaniennes et les espaces projectifs, ainsi que pour tous les produits finis de ces espaces.*

Le théorème suivant va nous donner une description simple des groupes de Chow pour les espaces munis d'une décomposition cellulaire. Avant cela introduisons un objet important dans la preuve, mais qui dépasse totalement le cadre de notre présentation.

Définition 4.1.2 (Bloch)**.** *Dans la catégorie des variétés quasi-projectives on peut construire des groupes dit de Chow supérieurs notés $\mathrm{CH}^i(X,n)$ tels que $\mathrm{CH}^i(X,0) = \mathrm{CH}^i(X)$ au sens usuel, et pour Y une sous variété fermée de X de codimension d on a la suite exacte longue suivante dite de localisation.*

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{CH}^i(X,1) \longrightarrow \mathrm{CH}^i(X-Y,1) \longrightarrow \mathrm{CH}^{i-d}(Y) \xrightarrow{\iota_*} \mathrm{CH}^i(X) \xrightarrow{j^*} \mathrm{CH}^i(X-Y) \longrightarrow 0$$

Où ι et j sont les inclusions canoniques. De plus ces groupes vérifient l'invariance par homotopie :

$$\mathrm{CH}^i(X \times \mathbb{A}^n) \simeq \mathrm{CH}^i(X).$$

Démonstration. Voir [9]. ■

Théorème 4.1.6. *Si X admet une décomposition cellulaire, avec les notations de la définition on a un isomorphisme*

$$\mathrm{CH}_*(X) \simeq \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{CH}_{*-d_i}(S).$$

Par ailleurs celui ci vient d'une correspondance explicite, tout comme son inverse.

Démonstration. Soit une décomposition de X de la forme

$$X = X_n \supset X_{n-1} \supset \cdots \supset X_-1 = \emptyset.$$

Notons $U_k = X_k - X_{k-1}$, j_k son inclusion canonique dans Y_k, $\pi_k : X_k \to S$ le morphisme structurel et $\iota_k : X_k \to X$ l'inclusion canonique.

Montrons par récurrence sur n que l'on a un isomorphisme de groupes de Chow donné par

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} (\iota_k)_*(\pi_k)^*$$

En $r = 0$ on a directement que $X \simeq \mathbb{A}_S^r$, donc par principe d'homotopie sur les groupes de Chow, on en déduit le résultat. Dans le cas général on utilise le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathrm{CH}_{k-d_i}(S) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{CH}_{k-d_i}(S) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_n"] & \mathrm{CH}_{k-d_n}(S) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_n^*"] & 0 \\
& \mathrm{CH}_k(X_{n-1}) \arrow[r, "(\iota_{n-1})_*"] & \mathrm{CH}_k(X_n) \arrow[r, "j_n^*"] & \mathrm{CH}_k(U_n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les morphismes sur la ligne supérieure sont donnés par l'inclusion et la projection canonique. Par hypothèse de récurrence on peut supposer que la première flèche verticale est un isomorphisme. Par ailleurs la troisième flèche verticale est un isomorphisme par le principe d'homotopie. Enfin montrons que $(\iota_{n-1})_*$ est injectif.

Pour cela on peut faire le même raisonnement que précédemment pour obtenir un diagramme faisant intervenir les groupes de Chow supérieurs d'ordre 1. Cette fois la surjectivité de j^* ne découle pas simplement de la suite exacte de localisation, mais d'une chasse dans le diagramme en sachant que π_n^* est un isomorphisme par le principe d'homotopie. Dès lors le morphisme $\mathrm{CH}^i(X_n)(1) \to \mathrm{CH}^i(U_n)(1)$ est surjectif, donc le morphisme suivant dans la suite exacte est nul, et donc $(\iota_{n-1})_*$ est injectif. Dès lors on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathrm{CH}_{k-d_i}(S) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{CH}_{k-d_i}(S) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_n"] & \mathrm{CH}_{k-d_n}(S) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_n^*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{CH}_k(X_{n-1}) \arrow[r, "(\iota_{n-1})_*"] & \mathrm{CH}_k(X_n) \arrow[r, "j_n^*"] & \mathrm{CH}_k(U_n) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et on peut conclure que φ_n est un isomorphisme par le lemme des 5.

■

On peut même montrer que cette découpe de l'espace X induit un isomorphisme de motifs.

Corollaire 4.1.6.1. *Avec les notations précédentes, si X est projectif lisse, on a un isomorphisme de motifs*

$$\mathfrak{h}(X) \simeq \bigoplus_i \mathfrak{h}(S)(-d_i).$$

Démonstration. En effet les notions de platitudes, d'immersions fermés et ouvertes sont stables par changement de base. En outre pour $T \to S$, on a $\mathbb{A}_S^n \times T \simeq \mathbb{A}_T^n$. Dès lors si

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots$$

est une décomposition cellulaire pour X relativement à S, alors

$$X \times T = X_0 \times T \supset X_1 \times T \supset \cdots$$

est une décomposition cellulaire de $X \times T$ relativement à T. Dès lors on applique le théorème 4.1.6 pour obtenir une correspondance λ (et son inverse μ) qui donnent un isomorphisme

$$\mathrm{CH}^*(X) \simeq \bigoplus_i \mathrm{CH}^{*-d_i}(S).$$

En appliquant un changement de base à T, comme on a encore une décomposition cellulaire, le théorème 4.1.6 implique que λ_T est encore un isomorphisme. Dès lors par principe d'identité de Manin on en déduit que λ induit un isomorphisme entre motifs.

■

Dès lors on peut revenir à l'obstruction que nous évoquions au début de cette partie. Pour les variétés sur un corps k, on veut faire des décompositions cellulaires au dessus de $S = \mathrm{Spec}(k)$. En topologie algébrique cette opération est toujours possible, mais ici la décomposition du motif donne une obstruction forte sur la cohomologie.

Exemple 4.1.3. *Si X admet une décomposition cellulaire sur $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, toutes ses cohomologies d'ordre impair son nulles. De plus dans sa structure de Hodge seul le terme de degré (r, r) est non nul.*

En particulier parmi les courbes, il n'y a que $\mathbb{P}_k^1$ qui admette une telle décomposition.

Exemple 4.1.4. *Plus généralement il est clair que X est birationnellement équivalent à $\mathbb{A}_S^n$. Comme le genre est un invariant birationnel et compatible au produit, on en déduit que le genre de X est le même que celui de S.*

Sur $\mathrm{Spec}(k)$ cela implique donc que X soit de genre 0.

Encore une fois on voit que si on connait le motif de S, les constructions cellulaires n'ajoutent pas de motifs fondamentalement nouveaux.

Plus généralement avec ces constructions on peut calculer des motifs d'espaces homogènes, voir par exemple [12].

4.2 Courbes et variétés abéliennes

4.2.1 Cas des courbes

Grâce aux projecteurs de Künneth, on peut décomposer totalement le motif d'une courbe. Plaçons nous pour cette section dans le cadre qui suit.

Cadre. *On se donne C une courbe projective lisse de genre g.*

Il est intéressant de remarquer que les constructions des projecteurs π_0 et π_2 peuvent se faire sur l'anneau $\mathbb{Z}$. En revanche pour le projecteur π_1, il faut en général se placer sur les groupes de Chow rationnels. Cependant sur les courbes on peut trouver le projecteur π_1 par la formule

$$\pi_1 = \Delta_C - \pi_0 - \pi_2.$$

Dès lors la décomposition motivique et le calcul des groupes de Chow peut dans ce cas se faire à coefficients entiers. Dès lors on a la décomposition suivante

$$\mathfrak{h}(C) = \mathbf{1} \oplus \mathfrak{h}(J(C)) \oplus \mathbf{1}(-1)$$

Dans $\mathrm{CH}_{\mathbb{Z}}(k)$. De plus on sait calculer les groupes de Chow associés.

M	$\mathfrak{h}^0(C)$	$\mathfrak{h}^1(C)$	$\mathfrak{h}^2(C)$
$\mathrm{CH}^0(M)$	$\mathrm{CH}^0(C) = \mathbb{Z}$	0	0
$\mathrm{CH}^1(M)$	0	$\mathrm{CH}^1_{\mathrm{alg}}(C) = J(C)(k)$	$\mathrm{Num}(C) = \mathbb{Z}$

Enfin remarquons un résultat qui est spécifique aux courbes, mais qui force à utiliser les groupes de Chow rationnels.

Proposition 4.2.1. *Pour une courbe projective lisse, rappelons que la variété symétrique S^nC est encore projective lisse (voir l'annexe B). Dès lors on a un isomorphisme entre les motifs suivants, lorsque l'on prend des coefficients rationnels.*

$$S^n\mathfrak{h}(C) \simeq \mathfrak{h}(S^nC)$$

Plus généralement si on note $\varphi_n : S^nC \to C$ (qui est génériquement fini) la projection canonique, s_n le projecteur symétrique d'ordre n et $\alpha_n = s_n \circ \pi_1^{\otimes n}$, alors en posant

$$\beta_n = \frac{1}{n!}(\varphi_n)_* \circ \alpha_n \circ (\varphi_n)^*$$

on a un isomorphisme $S^n\mathfrak{h}^1(C) \simeq (S^nC, \beta_n, 0)$.

On voit donc que les motifs des courbes se comprennent totalement via la catégorie des motifs de variétés abéliennes.Plus généralement il peut être utile de connaitre les motifs que l'on peut obtenir en découpant sur les motifs de courbes. Cela sera l'objet du prochain théorème.

4.2.2 Variétés abéliennes

Nous allons maintenant voir que l'on peut toujours décomposer les motifs des variétés abéliennes sur des motifs de courbes.On a a une équivalence de catégorie qui permet de voir les variétés abéliennes dans la catégorie des motifs.

Théorème 4.2.2. *Soit C et C' deux courbes projectives lisses, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CHM}_{\mathbb{Z}}(k)}(\mathfrak{h}(J(C)), \mathfrak{h}(J(C'))) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{AV}}(J(C), J(C')).$$

Plus précisément on a une équivalence de catégories entre la catégories des variétés abéliennes modulo isogénies (c'est à dire que l'on a tensorisé l'espace des morphismes par $\mathbb{Q}$) et la catégorie engendrée par les facteurs directs des motifs des courbes (réductibles) dans $\mathrm{CHM}(k)$.

Démonstration. Voir ([32],2.7.2). ■

Remarque. *Le terme "modulo les isogénies" est à comprendre au sens suivant. Étant donné $f : A \to B$ une isogénie, il existe $g : B \to A$ une autre isogénie telle que $f \circ g = m \cdot \mathrm{Id}_B$ et $g \circ f = m \cdot \mathrm{Id}_A$. Dès lors lorsque l'on prolonge les scalaires à $\mathbb{Q}$, on rend les isogénies inversibles. Donc dans notre catégorie les isogénies sont des isomorphismes.*

Réciproquement si $f : A \to B$ est un isomorphisme dans la nouvelle catégorie, alors il existe un morphisme $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{AV}}(B, A)$ et des entiers n, m tels que

$$(nf) \circ g = m \cdot \mathrm{Id}_B,\ g \circ (nf) = m \cdot \mathrm{Id}_A,\ nf \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{AV}}(A, B))$$

Il est alors clair que nf est une isogénie car sur une variété abélienne la torsion forme un groupe fini.

Pour notre exposé, il nous suffit en fait de prouver le résultat suivant qui est inclus dans le théorème principal.

Proposition 4.2.3. *Soit A une variété abélienne sur un corps algébriquement clos. Alors $\mathfrak{h}(A)$ est facteur direct du motif d'une courbe projective lisse.*

Démonstration. Par la stratégie de descente de la proposition 2.1.3, on peut se ramener au cas algébriquement clos. Alors il existe une courbe projective lisse C dans A par le théorème de Bertini. On note ι l'inclusion canonique. Montrons alors que l'on a une surjection $J(C) \to A$.

Pour une courbe on a $J(C) = \mathrm{Alb}(C)$. Dès lors la propriété universelle de la variété d'Albanese fournit un morphisme universel

$$J(C) \to A$$

Mais par ailleurs $A = \mathrm{Pic}^0(A)$, donc la propriété universelle de la Jacobienne donne un morphisme

$$A \to J(C)$$

En composant ces morphismes on obtient donc une application $\alpha : A \to A$. On va montrer que α est surjective, ce qui impliquera que $\varphi : J(C) \to A$ l'est aussi.

Pour cela comme α est un morphisme entre variétés abéliennes de même dimension, il suffit de montrer que $\ker(\alpha)$ est de dimension 0, autrement dit que sa composante connexe du neutre est restreinte à l'identité. Prenons alors une cohomologie l-adique. Le théorème de Lefschetz donne un isomorphisme via une correspondance

$$L_A^{d-1} : H^1_{\text{et}}(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_l) \simeq H^{2d-1}_{\text{et}}(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_l)$$

Par ailleurs il est usuel que les points de torsion de la variété de Picard ou de la variété d'Albanese s'identifient via la cohomologie l-adique. En particulier pour A on a

$$A[l^n] \simeq H^1_{\text{et}}(A_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$$
$$A[l^n] \simeq H^{2d-1}_{\text{et}}(A_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$$

Ainsi en introduisant le module de Tate, l'isomorphisme de Lefschetz induit un isomorphisme

$$L_A^{d-1} : T_l(A) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l \simeq T_l(A) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l.$$

Enfin cet isomorphisme est induit par α car les deux viennent de la même correspondance : L est l'intersection avec une section hyperplane ample et α est construit via C qui est une une intersection d'hyperplans amples. Dès lors comme le foncteur T_l est exact à gauche (c'est une limite), on en déduit que $\ker(T_l(\alpha)) = T_l(\ker^0(\alpha))$. Par ailleurs toute variété abélienne V non nulle de dimension v a un module de Tate non nul pour l premier à la caractéristique, car celui-ci vaut $\mathbb{Z}_l^{2v}$. En outre il est libre comme $\mathbb{Z}_l$-module, donc tensoriser avec $\mathbb{Q}_l$ ne change pas le fait d'être injectif.

Finalement on a montré que l'injectivité du morphisme $T_l(A) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l \to T_l(A) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ impliquait bien la nullité de la variété $\ker^0(\alpha)$. On a donc bien une isogénie, et donc un morphisme surjectif.

Si on introduit maintenant la sous variété abélienne ker(φ), le théorème de réductibilité de Poincaré prouve que l'on a $A' \subset J(C)$ une sous variété abélienne telle que

$$J(C) = \ker(\varphi) + A'$$

et $A' \cap \ker(\varphi)$ soit fini. Dès lors A' est isogène à A et $J(C)$ est isogène à ker(φ) $\times A$.

Ainsi dans la catégorie à isogénies près, on a un isomorphisme $J(C) \simeq A \oplus \ker(\varphi)$. Mais alors dans la catégorie $\mathrm{CHM}(k)_{\mathbb{Q}}$ cela induit une décomposition motivique

$$\mathfrak{h}(J(C) = \mathfrak{h}(A) \oplus \mathfrak{h}(\ker(\varphi)).$$

D'où le résultat.

■

Démonstration. Par des résultats généraux de théorie des motifs on aurait pu conclure à la propriété de facteur direct en utilisant simplement l'existence d'un morphisme dominant $J(C) \to A$. En utilisant le théorème de Poincaré on a donc un raffinement qui permet de mieux comprendre l'autre facteur direct. ■

Finissons par un résultat beaucoup plus fort.

Théorème 4.2.4 (Deninger-Murre-Künemann)**.** *Soit K une $\mathbb{Q}$-algèbre et A une variété abélienne de dimension d. Alors on a une décomposition de Künneth pour le motif de $\mathfrak{h}(A)$ dans $\mathrm{CH}(k)_K$ de la forme*

$$\mathfrak{h}(A) = \bigoplus_{i=0}^{2d} \mathfrak{h}^i(A).$$

De plus on a les résultats suivants :

- *La correspondance correspondant au graphe de la fonction de multiplication par m agit comme la multiplication par m^i sur le groupe de Chow de $\mathfrak{h}^i(A)$.*
- *Pour tout entier i on a $\bigwedge^i \mathfrak{h}^1(A) \simeq \mathfrak{h}^i(A)$.*

Démonstration. Voir [10] et [13]. ■

Ce résultat est beaucoup plus général et nous éviterons de l'utiliser à outrance.

Finalement nous avons montré que les motifs se découpant sur les courbes sont ceux se découpant sur les variétés abéliennes, et réciproquement. Bien qu'a priori très restreinte, cette famille est celle sur laquelle on comprend le mieux les théorèmes.

4.2.3 Motifs non-abéliens ?

Maintenant que l'on a compris la catégorie des motifs abéliens, il est nécessaire de se demander si tous les motifs peuvent s'obtenir de la sorte. La réponse à cette question dépend du corps de base k considéré et nous allons y répondre dans deux cas particuliers.

Corps fini On se place sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$. Nous allons montrer que sous des conjectures importantes, tout motif est de type abélien.

Notation. *On note $\mathrm{CH}^{\mathrm{ab}}(k)$ la $\otimes$-catégorie rigide pseudo abélienne engendrée par les motifs des variétés abéliennes et par les motifs d'Artin $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(k)$ pour $K|k$ une extension finie séparable. Nous verrons que cette catégorie est incluse dans $\mathrm{CH}_{\mathrm{kim}}(k)$.*

Remarquons d'abord le résultat suivant qui est lié à l'existence du morphisme de Frobenius.

Proposition 4.2.5. *Si les conjectures de Kimura-O'Sullivan et la conjecture de Tate sont vérifiées, alors les équivalences rationnelles et numériques coïncident sur les corps finis.*

Démonstration. Voir ([22].3). ■

On a ensuite le résultat important suivant.

Théorème 4.2.6. *Sous les conjectures de Tate et de Kimura-O'Sullivan on a* $\mathrm{CH}^{\mathrm{ab}}(k) = \mathrm{CH}(k)$.

Démonstration. Expliquons les grandes idées de la preuve de ce résultat. Une preuve complète se trouve dans ([15], 2.7).

Grâce à la proposition précédente et au théorème de Jannsen on sait que CH(k) est une catégorie abélienne semi-simple. Donc il suffit de montrer que les motifs simples sont dans $\mathrm{CH}^{\mathrm{ab}}(k)$. Pour cela on introduit l'ensemble des q-nombres de Weil de poids m, $W_m(q)$. Il s'agit des éléments $\pi \in \overline{\mathbb{Q}}$ dont tous les conjugués sont de modules $q^{m/2}$ et tels qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $q^n\pi$ soit un entier algébrique. On a sur cet ensemble une action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$. Notons enfin

$$W(q) = \bigcup_{m\geq 0} W_m(q).$$

Sur un motif simple on a ensuite un endomorphisme qui est donné par le morphisme de Frobenius usuel. Or par les conjectures de Weil celui ci est solution d'un polynôme dont toutes les racines sont des q-nombres de Weil (la deuxième condition sur les nombres de Weil vient du fait que l'on peut tordre le motif, ce qui multiplie le nombre de Weil par q). Notons alors $\Sigma(\mathrm{CH}(k))$ les classes d'isomorphismes d'objets simples. On a donc une application

$$\Sigma(\mathrm{CH}(k)) \longrightarrow \Gamma \setminus W(q).$$

On montre d'abord que celle ci est injective. En effet si deux motifs simples X et X' ont même q-nombre de Weil alors cela induit un élément non trivial dans $\mathrm{Hom}(H(X), H(X'))^{\Gamma}$. Sous la conjecture de Tate, on a une surjection de $\mathrm{Hom}(X, X')$ sur cette ensemble, donc sa non nullité donne un morphisme non nul $X \to X'$. Comme les deux objets sont simples dans une catégorie abélienne, on en déduit que $X \simeq X'$.

Soit π un élément de $\Gamma/W(q)$, on a un théorème de Honda qui assure la surjectivité quitte à passer à une extension finie. De plus ce théorème montre que la surjectivité peut être obtenue en prenant un motif dans $\mathrm{CH}^{\mathrm{ab}}(k)$. On a alors par restriction de Weil un motif d'une variété abélienne A_*. Dès lors π est racine de $P(\mathfrak{h}^1(A_*)^{\otimes m}, t)$. D'où la surjectivité.

La surjectivité par des motifs dans $\mathrm{CH}^{\mathrm{ab}}(k)$ ainsi que l'injectivité montrent donc bien que tout motif simple se découpe dans $\mathrm{CH}^{\mathrm{ab}}(k)$.

∎

Corps des nombres complexes La situation est ici différente car nous allons montrer grâce à des arguments de théorie de Hodge qu'il y a des motifs qui ne sont pas de type abélien. Pour cela nous montrons d'abord qu'il existe des structures de Hodge polarisables qui ne sont pas dans la catégorie engendrée par les structures de Hodge des variétés abéliennes.

Cadre. *On considère V une structure de Hodge pure et MT(V) sont groupe de Mumford-Tate.*

Définition 4.2.1. *Une structure de Hodge est dite de type CM si son groupe de Mumford-Tate est abélien.*

Rappelons le résultat usuel suivant.

Proposition 4.2.7. *Soit T une structure de Hodge obtenue via V par somme directe, produit tensoriel et dual de V. C'est en particulier une représentation de MT(V). Pour $T' \subset T$ un sous espace vectoriel, on a l'équivalence suivante.*

- *T' est une sous structure de Hodge.*
- *T' est un sous MT(V)-module.*

En particulier comme MT(V) est un sous groupe de GL(V), en différentiant les endomorphismes intérieurs, on obtient une action sur End(V) et une sous structure de Hodge $\mathfrak{m}$ qui correspond à l'algèbre de Lie de MT(V). Celles-ci sont de poids 0.

Proposition 4.2.8. *Si V est engendrée par des structures de Hodge de poids 1 (ou par équivalence est engendrée par des structures de Hodge de variétés abéliennes), alors la structure de Hodge sur $\mathfrak{m}$ vérifie*

$$\mathfrak{m}^{a,b} = 0 \textit{ pour } (a,b) \notin \{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}.$$

Démonstration. On note $\mathcal{C}$ la catégorie des structures de Hodge de poids 0 et concentrées en type $(1,-1), (0,0), (-1,1)$. Montrons que cette catégorie contient les structures $\mathfrak{m}$ induites par les variétés abéliennes, les motifs de Tate, est stable par somme directe, par facteur direct et par produit tensoriel.

- Si $V = \mathbb{Q}(n)$ alors son groupe de Mumford-Tate est soit $\mathbb{G}_m$ soit 0. Dans ce cas $\mathfrak{m}$ est soit 0 soit $\mathbb{Q}(0)$. Dans tous les cas il est du type voulu.
- Si $H = H^1(A, \mathbb{Q})$ pour A une variété alors End(H) est de type $(-1,1), (0,0), (1,-1)$, comme $\mathfrak{m}$ en est une sous structure de Hodge, c'est aussi son cas.
- Soit V_1 et V_2 deux éléments de $\mathcal{C}$ et $V = V_1 \oplus V_2$. Alors on a un plongement MT$(V) \hookrightarrow \mathrm{MT}(V_1) \times \mathrm{MT}(V_2)$. Mais alors alors $\mathfrak{m}_V \hookrightarrow \mathfrak{m}_{V_1} \oplus \mathfrak{m}_{V_2}$. Comme les deux sont du type voulu, c'est aussi le cas de $\mathfrak{m}_V$.
- On reprend les mêmes notations qu'au point précédent. On remarque que l'inclusion MT$(V) \hookrightarrow \mathrm{MT}(V_1) \times \mathrm{MT}(V_2)$ est telle que la restriction à son image de chacune des projections soit surjective. Dès lors on a des surjections de $\mathfrak{m}_V$ sur les $\mathfrak{m}_{V_i}$. Si le premier est du type voulu, c'est donc aussi le cas de chacun de ses facteurs. ∎

Nous allons maintenant construire en suivant ([33], 4.2) un type de structure de Hodge où cette condition impose des restrictions sur MT(V).

Proposition 4.2.9. *Soit V une structure de Hodge de poids $w \geq 2$ et de type $(n, 0, \cdots 0, n)$ (le poids supérieur à deux impose qu'il y ait au moins un 0 intermédiaire). Si V est dans la catégorie des structures de Hodge engendrée par les structures des variétés abéliennes, alors son groupe de Mumford-Tate est de type CM.*

Démonstration. En effet pour ce type de structure de Hodge, la structure sur End(V) est concentrée en bidegré $(w, -w), (0,0), (-w, w)$. Comme $w \geq 2$, si V est engendrée par les structures abéliennes alors le résultat précédent garantit que $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de MT(V) est concentrée en bidegré $(0,0)$.

Or rappelons qu'une structure de Hodge est la donnée d'une représentation $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{m}_{\mathbb{R}})$, et le fait d'être concentré en bidegré $(0,0)$ impose à cette représentation d'être triviale. Or par construction $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} \mathbb{G}_m$ est $\mathbb{Q}$-Zariski dense dans MT(V). Donc on en déduit que l'action de MT(V) sur son algèbre de Lie est aussi triviale. Or celle ci se fait en différentiant les automorphismes intérieurs, donc finalement ceux ci sont constants et donc le groupe de Mumford-Tate est bien abélien. ∎

Maintenant que nous avons exhibé un résultat négatif pour les structures de Hodge, il faut donc trouver des variétés telles que leur motif ait une cohomologie du type $(n, 0, \cdots, 0, n)$, mais dont le groupe de Mumford-Tate ne soit pas commutatif. Cette question est elle même compliqué. Ribet a donné un argument basé sur des formes modulaires pour produire un motif dont la cohomologie est de la forme $(n, 0, n)$ et tel que sous la conjecture de Hodge le groupe de Mumford-Tate associé ne soit pas abélien.

La question reste donc ouverte mais il semble probable que tous les motifs ne soient pas abéliens sous la conjecture de Hodge. Remarquons d'ailleurs que l'exemple proposé par Ribet est le motif transcendant associé à une surface elliptique. Nous renvoyons à la discussion introductive de ([33]).

4.3 Étude des surfaces

4.3.1 Décomposition des groupes de Chow et de la cohomologie

Cadre. *Dans cette section on étudie une surface S et l'on regarde les groupes de Chow à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Par ailleurs on considère la décomposition de Chow-Künneth étudiée dans la partie 2.1. Par ailleurs on fixe une cohomologie de Weil quelconque.*

Grâce à la décomposition du motif d'une surface, on peut en déduire des décompositions sur les groupes de Chow et sur la cohomologie. Pour le second c'est en fait une tautologie au vu de la définition de la décomposition de Chow-Künneth.

Proposition 4.3.1. *On a $H^i(\mathfrak{h}^j(S)) = \delta_{ij} H^i(S)$.*

Pour les groupes de Chow la situation est plus intéressante. Rappelons que par des résultats généraux on a déjà calculé les groupes de Chow associés aux motifs $\mathfrak{h}^i(S)$ pour $i \neq 2$. Dès lors on a la table suivante à compléter.

M	$\mathfrak{h}^0(S)$	$\mathfrak{h}^1(S)$	$\mathfrak{h}^2(S)$	$\mathfrak{h}^3(S)$	$\mathfrak{h}^4(S)$
$\mathrm{CH}^0(M)$	$\mathrm{CH}^0(S)$	0	?	0	0
$\mathrm{CH}^1(M)$	0	$\mathrm{Pic}^0(S)_{\mathbb{Q}}$	?	0	0
$\mathrm{CH}^2(M)$	0	0	?	$\mathrm{Alb}(S)$	$\mathrm{Num}(S)$

Ainsi le plus naturel pour compléter ce tableau serait de rajouter le groupe de Néron-Severi et le noyau de l'application d'Abel-Jacobi. De cette manière sur chaque ligne on retrouverait des graduations provenant des applications classes de cycle et de l'application d'Abel-Jacobi.

Cela découle en fait aisément de notre description des actions des projecteurs π_0, π_1, π_3 et π_4.

Proposition 4.3.2. *Pour le motif $\mathfrak{h}^2(X)$ on a le calcul suivant des groupes de Chow.*
- $\mathrm{CH}^0(\mathfrak{h}^2(S)) = 0$.
- $\mathrm{CH}^1(\mathfrak{h}^2(S)) = \mathrm{NS}(S)$.
- $\mathrm{CH}^2(\mathfrak{h}^2(S)) = T(S)$.

Démonstration. Rappelons que l'on a $\pi_2 = \Delta - \pi_0 - \pi_1 - \pi_3 - \pi_4$ et que Δ agit inconditionnellement comme l'identité.
- sur le groupe de Chow de codimension 0, π_0 agit comme l'identité et π_2 lui est orthogonal, donc $(\pi_2)_*(\Gamma) = (\pi_2)_* \circ (\pi_0) * (\Gamma) = (\pi_2 \circ \pi_0)_*(\Gamma) = 0$. D'où le résultat.
- Sur le groupe de Chow de codimension 1, les projecteurs π_3 et π_4 ont une action nulle donc on a la décomposition
$$\mathrm{CH}^2(S) = \mathrm{Im}((\pi_1)_*) \oplus \mathrm{Im}((\pi_2)_*)$$
Or on sait que $\mathrm{Im}((\pi_1)_*)$ est le noyau de la projection canonique $\mathrm{CH}^2(S) \to \mathrm{NS}(S)$. Donc la restriction de cette projection à $\mathrm{Im}((\pi_2)_*)$ donne l'isomorphisme voulu.
- Sur le dernier groupe de Chow, π_4 associe le degré le long de e et π_3 a pour noyau $T(S)$. Dès lors pour $x \in T(S)$ on a
$$x = (\Delta)_*(x) = (\pi_2)_*(x) + (\pi_3 + \pi_4)_*(x) = (\pi_2)_*(x)$$
et donc on voit que $T(S) \subset \mathrm{Im}((\pi_2)_*)$. Réciproquement si x est dans l'image de $(\pi_2)_*$, par l'orthogonalité des projecteurs on doit avoir $(\pi_3)_*(x) = (\pi_4)_*(x) = 0$. On en déduit que $\deg(x) = 0$, et comme sur les éléments de $\mathrm{CH}^2_{\mathrm{hom}}(S)$ l'action de π_3 revient à appliquer le morphisme d'Albanese, on en déduit que $x \in T(S)$. D'où le résultat.

On a donc prouvé toutes les égalités souhaités. ∎

4.3.2 Partie algébrique et transcendante

Dans le cas des surfaces on peut en fait raffiner une fois de plus la décomposition. Plus précisément on va décomposer le motif $\mathfrak{h}^2(S)$. Cette volonté vient du fait que ce motif possède deux groupes de Chow que l'on veut séparer. Par ailleurs on dispose aussi d'une telle décomposition sur la cohomologie.

Définition 4.3.1. *Dans $H^2(S)$, on note par $H^2_{\mathrm{alg}}(S)$ l'image par l'application classe de cycle de $\mathrm{CH}^1(S)$.*

Par les axiomes de la cohomologie de Weil, on dispose d'un cup-produit sur $H^2(S)$ qui est non dégénéré, celui ci va nous permettre de choisir un supplémentaire canonique. Dès lors on pose $H^2_{\mathrm{tr}}(S) = H^2_{\mathrm{alg}}(S)^{\perp}$.

On veut procéder à la même décomposition sur le motif associé. On utilise la proposition 2.1.3 pour passer du cas algébriquement clos au cas général.

Cadre. *On suppose dans cette section que le corps k est algébriquement clos.*

Proposition 4.3.3. *Il existe deux projecteurs π^2_{alg} et π^2_{tr} qui sont orthogonaux, qui commutent à π_2 et tels que $\pi_2 = \pi^2_{\mathrm{alg}} + \pi^2_{\mathrm{tr}}$. En outre ils sont orthogonaux aux autres projecteurs π_i.*

Enfin si on note $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S)$ et $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)$ les motifs associés, on a

$$\mathrm{CH}(\mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S)) = \mathrm{CH}^1(\mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S)) = \mathrm{NS}(S)$$
$$\mathrm{CH}(\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)) = \mathrm{CH}^2(\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)) = T(S)$$

et

$$H(\mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S)) = H^2(\mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S)) = H^2_{\mathrm{alg}}(S)$$

$$H(\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)) = H^2(\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)) = H^2_{\mathrm{tr}}(S).$$

Plus généralement, si on note ρ la dimension du groupe de Néron-Severi, on a $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S) \simeq \mathbf{1}(-1)^{\rho}$.

Remarque. *Nous avions signalé précédemment que les projecteurs π_1 et π_{2d-1} étaient légèrement différents de ceux annoncés lorsque l'espace considéré est une surface. Cependant dans notre cas cela n'invalide pas la preuve suivante.*

Démonstration. On se contente de traiter le cas du projecteur π^2_{alg}, le cas transcendant s'en déduira facilement en posant $\pi^2_{\mathrm{tr}} = \pi_2 - \pi^2_{\mathrm{alg}}$.

Prenons $D_i \in \mathrm{CH}^1(S)$ des diviseurs qui sont des relevés d'une base orthogonale du groupe de Néron-Severi. Cette base n'existe normalement que sur les corps clos, c'est donc ici que l'on utilise un argument de descente dans le cas non clos.

Par ailleurs le théorème de l'indice de Hodge assure que le produit d'intersection est non nul sur les D_i. Enfin, quitte à remplacer D_i par $D_i - (\pi_1)_*(D_i)$ (ce qui ne change pas la classe dans le groupe de Néron-Severi car $\mathrm{Im}((\pi_1)_*) = \mathrm{CH}^1_{\mathrm{alg}}(S)$), on peut supposer que $(\pi_1)_*(D_i) = 0$. Autrement dit la donnée de π_1 fournit une inclusion canonique de $\mathrm{NS}(S)$ dans $\mathrm{CH}^1(S)$, et on choisit les éléments D_i comme l'image d'une base de $\mathrm{NS}(S)$ par cette inclusion. Dès lors on pose

$$\pi^2_{\mathrm{alg}} = \sum_{i=1}^{\rho} \frac{1}{\deg(D_i^2)} D_i \times D_i \in \mathrm{Corr}^0(S, S).$$

Vérifions d'abord que c'est un projecteur. Pour cela il faut essentiellement calculer $D_i \times D_i \circ D_j \times D_j$. Cela donne

$$(\mathrm{pr}_{13})_*(S \times D_j \times D_j \cap D_i \times D_i \times S) = (\mathrm{pr}_{13})_*(D_i \times (D_i \cap D_j) \times D_j)$$

Dès lors par définition du poussé en avant cela donne le cycle $\deg(D_i \cap D_j) \cdot D_i \times D_j$. Comme on a choisi des D_i orthogonaux, et que l'on normalise par $\deg(D_i^2)$, on en déduit le résultat voulu. Montrons l'égalité

$$\pi^2_{\mathrm{alg}} = \pi_2 \circ \pi^2_{\mathrm{alg}} = \pi^2_{\mathrm{alg}} \circ \pi_2.$$

Comme π_0, π_3, π_4 on une action nulle sur $\mathrm{CH}^1(S)$ et que l'on a choisit les éléments D_i de sorte que $(\pi_1)_*(D_i) = 0$, on en déduit que

$$(\pi_2)_*(D_i) = (\Delta_S)_*(D_i) = D_i$$

Mais alors

$$\pi_2 \circ D_i \times D_i = (\mathrm{Id} \times \pi_2)_*(D_i \times D_i) = D_i \times (\pi_2)_*(D_i) = D_i \times D_i$$

et

$$D_i \times D_i \circ \pi_2 = (\pi_2^{\top} \times \mathrm{Id})_*(D_i \times D_i) = (\pi_2)_*(D_i) \times D_i = D_i.$$

en sommant ces égalités on obtient bien

$$\pi^2_{\mathrm{alg}} = \pi_2 \circ \pi^2_{\mathrm{alg}} = \pi^2_{\mathrm{alg}} \circ \pi_2.$$

On en déduit que l'on peut décomposer le motif $\mathfrak{h}^2(S)$ de la façon suivante

$$\mathfrak{h}^2(S) = \mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S) \oplus \mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S).$$

Par ailleurs on en déduit l'orthogonalité de π^2_{alg} aux autres projecteurs de Künneth car

$$\pi^2_{\mathrm{alg}} \circ \pi_i = \pi^2_{\mathrm{alg}} \circ \pi_2 \circ \pi_i = 0$$

en utilisant le fait que π_2 et π_i sont orthogonaux entre eux.

Enfin étudions l'action de ce projecteur sur les groupes de Chow. La nullité du groupe de Chow de codimension 0 découle directement de l'orthogonalité avec π_0. Si α est un 2-cycle, on calcule

$$(\pi^2_{\mathrm{alg}})_*(\alpha) = (\mathrm{pr}_2)_*(\alpha \times S \cap \pi^2_{\mathrm{alg}}) = \sum_i \frac{1}{\deg(D_i^2)}(\mathrm{pr}_2)_*((\alpha \cap D_i) \times D_i)$$

Le terme $\alpha \cap D_i$ est nul pour des raisons de codimension trop grande. Dès lors $\mathrm{CH}^2(\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)) = 0$. Enfin si $\alpha \in \mathrm{CH}^1(S)$ on peut le décomposer en

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\rho} n_i D_i + \alpha_n$$

où α_n est numériquement trivial. Mais alors dans la formule de l'action, le terme α_n n'intervient pas et $(D_i \times D_i)_*(\alpha) = n_i \deg(D_i^2) D_i$. Dès lors π^2_{alg} agit comme la projection sur l'espace vectoriel engendré par les D_i. Ainsi $\mathrm{CH}^1(\mathfrak{h}^2_{alg}(S)) \simeq \mathrm{NS}(S)$, et même mieux, π_2 et π^2_{alg} ont la même action sur $\mathrm{CH}^1(S)$, donc l'action de la partie transcendante est nulle. Le calcul en cohomologie est similaire, ce qui ne laisse plus que l'isomorphisme $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}} \simeq \mathbf{1}(-1)^\rho$ à justifier.

Comme les éléments $\alpha_i = \frac{1}{\deg(D_i^2)} D_i \times D_i$ sont orthogonaux, il suffit de prouver que chaque motif $M_i = (S, \alpha_i, 0)$ est isomorphe à $\mathbf{1}(-1)$. Pour cela on pose $f_i = D_i \times \{\mathrm{pt}\}$ et $g_i = \frac{1}{\deg(D_i^2)}\{\mathrm{pt}\} \times D_i$, on vérifie qu'ils induisent

$$f_i \in \mathrm{Hom}(M_i, \mathbf{1}(-1)),\ g_i \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1}(-1), M_i)$$

et qu'ils sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. D'où le résultat.

■

Ainsi on a une décomposition (non canonique) du motif d'une surface. Montrons maintenant que la partie transcendante est un invariant birationnel.

Théorème 4.3.4. *Soit S et S' deux surfaces birationnellement équivalentes. On a un isomorphisme*

$$\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S) \simeq \mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S').$$

Démonstration. Traitons d'abord le cas où S' est l'éclatement de S en un unique point. Dans ce cas la formule du motif d'un éclatement assure que

$$\mathfrak{h}(S') \simeq \mathfrak{h}(S) \oplus \mathbf{1}(-1).$$

Regardons où s'ajoute ce terme dans la décomposition de Chow-Künneth. Par le calcul des groupes de Chow on voit que

$$\mathrm{CH}^1(S') \simeq \mathrm{CH}^1(S) \oplus \mathbb{Q}$$

et au niveau du sous groupe homologique

$$\mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(S') \simeq \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(S).$$

En particulier la variété de Picard est inchangée et de même pour celle d'Albanese. De même le groupe de Chow de codimension 2 est inchangé. Dès lors l'application d'Abel-Jacobi est inchangée. En revanche le groupe de Néron-Severi voit son rang augmenter de 1. En résumé la seule modification se fait sur le motif $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{alg}}(S)$, la partie transcendante est inchangée.

Le cas général s'en déduit car tout transformation birationnelle entre surfaces peut s'obtenir par une succession finie de Blow-up et Blow-down de points.

■

Ainsi lorsque l'on s'intéresse au motif d'une surface, on peut supposer que l'on dispose d'un modèle minimal, ce qui ne change pas les questions portant sur le motif $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)$.

Dès lors avec cette nouvelle décomposition on a scindé le motif $h^2(S)$ en deux parties chacune responsable d'un des deux groupes de Chow de $\mathfrak{h}^2(S)$: $\mathrm{NS}(S)$ et $T(S)$. On constate que dans cette décomposition seul le terme transcendant n'est pas à priori découpé sur des motifs provenant des variétés abéliennes.

Exemple 4.3.1. *Dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$ et que l'on étudie la cohomologie de Betti, alors la partie cohomologique de cette décomposition est bien connue : par le théorème $(1,1)$ de Lefschetz $H^2_{\mathrm{alg}}(S) = \mathrm{Hdg}^2(S,\mathbb{Q})$ et donc en prenant l'orthogonal on trouve $H^2_{\mathrm{tr}}(S) \supset (H^{2,0}(S) \oplus H^{0,2}(S)) \cap H^2(S,\mathbb{Q})$.*

Dans ce cas l'hypothèse $p_g = 0$ se traduit exactement par la nullité de la partie transcendante de la cohomologie de S : en effet si $p_g = 0$ la décomposition de Hodge prouve que $H^2(S,\mathbb{C}) = H^{1,1}(X)$ donc la partie rationnelle est inclus dans $H^{1,1}(S)$ et dès lors $\mathrm{Hdg}^2(S,\mathbb{Q}) = H^2(S,\mathbb{Q})$ donc l'orthogonal est bien réduit à 0. Réciproquement si $H^2_{\mathrm{tr}}(S) = 0$, ce calcul prouve que $H^2(S,\mathbb{Q}) \subset H^{1,1}(S)$ et donc en complexifiant on a bien $H^{2,0}(S) = 0$, donc $p_g = 0$.

Dès lors le théorème de Mumford peut se réécrire sous la forme suivante : la nullité du groupe de Chow de $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)$ implique la nullité de sa cohomologie. La conjecture de Bloch est alors sa réciproque.

Si on choisit maintenant une cohomologie de Weil pour définir le motif $h^2_{\mathrm{tr}}(S)$, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 4.3.5. *Soit $k \subset \Omega$ un domaine universel. On a une équivalence entre les assertions suivantes.*
- $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S) = 0$.
- $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S_\Omega) = 0$.
- $T(S_\Omega) = 0$

Démonstration. Il s'agit simplement de la traduction du théorème 3.0.5 dans le cas du motif $M = \mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)$ dont le seul groupe de Chow non trivial est $T(S)$. ∎

Exemple 4.3.2. *Avec ce résultat la preuve du théorème de Mumford dans sa forme 1.2.3 est rigoureuse, on a simplement utilisé la conservativité du foncteur de Chow sur les motifs.*

Ainsi la conjecture de Bloch peut prendre la forme générale suivante.

Conjecture 4.3.1. *Le motif $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)$ est nul si et seulement si sa cohomologie est nulle.*

Ainsi cette conjecture porte fondamentalement sur la conservativité du foncteur de cohomologie.

4.4 Exemple de motifs de dimension finie

Il faut maintenant exhiber des motifs de dimension finie. Dans cette section nous verrons les premiers résultats élémentaires de la théorie de Kimura-O'Sullivan. Nous gardons pour la prochaine partie les exemples plus développés.

4.4.1 Résultats généraux

Rappelons que l'objet **1** est évidement de dimension finie. Donc en terme de motif il s'agit de $\mathfrak{h}(\mathrm{Spec}(k))$. Plus généralement on a l'exemple suivant.

Exemple 4.4.1. *Les motifs de la forme $M = \mathfrak{h}(\mathrm{Spec}(K))$ pour $K|k$ une extension finie séparable sont dit d'Artin. Si Ω est un corps algébriquement clos qui contient K on a l'égalité*

$$M_\Omega \simeq \mathbf{1}^n$$

dans $\mathrm{CH}(\Omega)$ avec $n = [K : k]$. Comme la notion de dimension finie est stable par descente, on en déduit que M est de dimension finie sur k.

En utilisant les constructions usuelles que nous avons décrit précédemment, nous pouvons générer des variétés dont le motif est de dimension finie.

Proposition 4.4.1. *Les motifs des variétés suivantes sont de dimension finie.*
- *Un fibré projectif sur une variété dont le motif est de dimension finie.*
- *Le motif d'un blow-up d'une variété dont le motif est de dimension finie le long d'une sous variété dont le motif est aussi de dimension finie.*
- *Un espace cellulaire sur une variété dont le motif est de dimension finie.*
- *Un blow-down d'une variété dont le motif est de dimension finie. Plus généralement, si on a un morphisme dominant $f : X \to Y$ tel que le motif de X soit de dimension finie, alors c'est aussi le cas du motif de Y.*

Démonstration. Cela découle du calcul explicite de ces motifs pour les trois premiers exemples. Pour le dernier il suffit de remarquer que l'application de Blow-down est un morphisme surjectif, donc le motif de la variété d'arrivée est facteur direct d'un motif de dimension finie. D'où l'assertion. ■

Le problème de ces exemples est qu'il demande de déjà connaitre une base dont le motif est de dimension finie, et qu'il construit des exemples qui ne sont pas minimaux. Fondamentalement nous n'avons pas construit de nouveaux motifs, nous avons juste utilisé des sommes et torsion.

Passons maintenant à de vrais exemples. Avec le théorème les deux résultats suivants sont immédiats.

Théorème 4.4.2. *Les motifs des variétés abéliennes sont de dimension finie.*

Démonstration. Rappelons que d'après le théorème 4.4.1 leur motif s'écrit comme

$$\mathfrak{h}(X) = \bigoplus_{i=0}^{2d} \mathfrak{h}^i(X)$$

où $\mathfrak{h}^i(X) = \bigwedge^i \mathfrak{h}^1(X)$ pour tout entier i. Dès lors $\mathfrak{h}^i(X)$ est un sous objet d'un produit tensoriel de $\mathfrak{h}^1(X)$ donc il sera de dimension finie dès que ce dernier sera de dimension finie. Or par l'égalité $\mathfrak{h}^i(X) = \bigwedge^i \mathfrak{h}^1(X)$, en appliquant cela à $i = 2d + 1$, on voit bien que $\mathfrak{h}^1(X)$ est de dimension finie. D'où le résultat. ■

Corollaire 4.4.2.1. *Les motifs de courbes sont de dimension finie.*

Démonstration. Pour une courbe il suffit de calculer sont $\mathfrak{h}^1(C)$ qui est le motif de sa jacobienne, d'où le résultat. ■

Ce raisonnement est très peu satisfaisant car il repose sur le difficile théorème , proposons une démonstration plus accessible.

Théorème 4.4.3. *Les motifs des courbes sont de dimension finie.*

Démonstration. Encore une fois grâce à la décomposition

$$\mathfrak{h}(C) = \mathfrak{h}^0(C) \oplus \mathfrak{h}^1(C) \oplus \mathfrak{h}^2(C)$$

on voit qu'il suffit de prouver le résultat pour le motif $\mathfrak{h}^1(C)$. Nous allons montrer que celui ci est impair de dimension $2g$ pour g le genre de C.

En appliquant le foncteur H, on constate que

$$H(S^{2g}\mathfrak{h}^1(C)) = \bigwedge^{2g} H^1(C) \neq 0.$$

Dès lors le motif $\mathfrak{h}^1(C)$ doit être de dimension plus grande que $2g$ s'il est de dimension finie. Il faut montrer qu'il y a égalité. Pour cela voir ([32],4.6.1). La preuve repose sur un calcul explicite en utilisant la proposition 4.2.1 pour traiter le cas d'un projecteur sur S^nC.

■

Corollaire 4.4.3.1. *Les motifs des variétés abéliennes sont de dimension finie.*

Démonstration. En effet on a vu que ceux si étaient des facteurs directs de motifs de Jacobiennes de courbes. Comme la notion de dimension finie est stable par facteur direct, on peut conclure grâce au théorème précédent. ■

On en déduit inconditionnellement le résultat suivant.

Proposition 4.4.4. *La notion de dimension finie du motif est un invariant birationnel pour les variétés de dimension inférieure à* 3*.*

Démonstration. On sait que les transformations birationnelles s'obtiennent par blow-up et blow-down et que la deuxième opération préserve la finitude du motif. Pour le blow-up il ne peut se faire que le long de points ou de courbes étant donné que l'on considère uniquement des variétés de dimension plus petite que 3. Comme on a vu que les motifs des courbes et des points sont de dimension finie, on en déduit le résultat par le deuxième point de la proposition 4.4.1. ■

Le cas des variétés abéliennes est le seul que l'on puisse traiter de façon universelle à l'heure actuelle. Dès lors pour montrer que des variétés ont un motif de dimension finie, nous sommes contraint de montrer que leur motif se découpe sur des variétés abéliennes. Rappelons par ailleurs que selon le corps de base k, il devrait y avoir des motifs qui ne sont pas abéliens. Dès lors notre stratégie ne pourra pas englober toutes les variétés.

4.4.2 Cas des surfaces

On a vu que le motif d'une surface se décomposait en

$$\mathfrak{h}(S) \simeq \mathbf{1} \oplus \mathfrak{h}^1(\mathrm{Pic}^0(S)) \oplus \mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S) \oplus \mathbf{1}(-1)^{\rho} \oplus \mathfrak{h}^{2d-1}(\mathrm{Alb(S)})(d-2) \oplus \mathbf{1}(-2).$$

Où d est la dimension de la variété d'Albanese. Dans cette décomposition seul le terme $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)$ ne vient pas à priori d'une variété abélienne, la question de la dimension finie de $\mathfrak{h}(S)$ est donc équivalente à la finitude de $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)$.

En particulier si le motif $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)$ est nul on aura bien une surface de dimension finie au sens de Kimura-O'Sullivan. Or les surfaces où $\mathfrak{h}^2_{tr}(S) = 0$ doivent exactement être celles où $H^2_{tr}(S) = 0$ selon la conjecture de Bloch. Dès lors les cas connus de cette conjecture peuvent nous fournir des exemples concrets, mais encore une fois cela découle de la trivialité du motif associé.

Exemple 4.4.2 (Bloch). *Les surfaces de genre $p_g = 0$ de type non général ainsi que les surfaces de Godeaux ont un motif de dimension finie.*

Dans la prochaine partie nous étudierons plus ne détail certaines de ces surfaces.

4.4.3 Application aux variétés de Fermat

Ces variétés sont relativement bien compris car elles disposent d'une symétrie importante.

Notation. *On note X^d_m l'hypersurface de dimension d et de degré m définie dans $\mathbb{P}^{d+1}_{\mathbb{C}}$ par l'équation*

$$x_0^m + \cdots x_{d+1}^m = 0$$

Théorème 4.4.5. *Pour deux entiers positifs r et s, la variété X^{r+s}_m s'obtient de $X^r_m \times X^s_m$ par le procédé suivant.*

1. *Blow-up d'une sous variété isomorphe à $X^{r-1}_m \times X^{s-1}_m$*
2. *Passage au quotient par l'action du groupe cyclique $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.*
3. *Blow-down deux sous variétés isomorphes à $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}} \times X^{s-1}_m$ et $X^{r-1}_m \times \mathbb{P}^s_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Voir ([7], Théorème 1). ■

Corollaire 4.4.5.1. *Le motif d'une variété de Fermat est de dimension finie.*

Démonstration. Le résultat est évident pour $r \leq 1$ car on obtient soit un point soit une courbe, et donc c'est une variété de dimension finie. Pour $r \geq 2$ on procède par récurrence. On applique le théorème précédent à la décomposition $r = r - 1 + 1$ et ensuite :

1. Le produit $X^{r-1}_m \times X^1_m$ est de dimension finie par hypothèse de récurrence et par le cas des courbes.
2. On blow-up une variété de dimension finie le long de $X^{r-2}_m \times X^0_m$ qui est aussi de dimension finie. Donc l'espace final est aussi de dimension finie.
3. Quotienter par l'action d'un groupe donne un morphisme dominant donc l'espace d'arrivé est encore de dimension finie.
4. Le dernier blow-down conserve la propriété de dimension finie.

Ainsi on a bien une variété de dimension finie à la dernière étape, et celle ci est justement X^r_m par le théorème précédent. D'où le résultat. ■

Bien qu'élémentaire cet exemple est utile car il nous donne des motifs de dimension finie pour des hypersurfaces de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de n'importe degré. Certains de ces cas peuvent s'obtenir d'autres manières, comme notamment celui de X^2_4 qui est une surface de Kummer.

4.5 Retour sur la notion de représentabilité

Nous avions introduit la notion de dimension finie dans le but d'obtenir une propriété universellement vérifiée pour toutes les variétés. Il est donc naturel de se demander à quels conditions la dimension finie au sens de Kimura implique la représentabilité. Réciproquement on peut utiliser la représentabilité qui est une propriété très forte, pour vérifier la conjecture de Kimura-O'Sullivan.

4.5.1 Exemple de variétés représentables

Cadre. *On se donne une variété de dimension* 3 *irréductible* X *telle que* $\mathrm{CH}^3(X)$ *soit rationnellement représentable.*

On sait que l'on peut partiellement obtenir une décomposition de Chow pour le motif $\mathfrak{h}(X)$, mais il nous manque les parties de degré $2, 3, 4$. Si on les avait et que la conjecture de Murre était vérifié, on aurait en terme d'action sur les groupes de Chow la décomposition suivante.

M	$\mathfrak{h}^0(X)$	$\mathfrak{h}^1(X)$	$\mathfrak{h}^2(X)$	$\mathfrak{h}^3(X)$	$\mathfrak{h}^4(X)$	$\mathfrak{h}^5(X)$	$\mathfrak{h}^6(X)$
$\mathrm{CH}^0(M)$	$\mathrm{CH}^0(X)$	0	0	0	0	0	0
$\mathrm{CH}^1(M)$	0	$\mathrm{Pic}^0(X)_{\mathbb{Q}}$	$*$	0	0	0	0
$\mathrm{CH}^2(M)$	0	0	$*$	$*$	$*$	0	0
$\mathrm{CH}^3(M)$	0	0	0	$*$	$*$	$\mathrm{Alb}(X)(k)_{\mathbb{Q}}$	$\mathrm{Num}(X)$

Dans cette décomposition on espère par la conjecture de Bloch-Beilinson que $\mathrm{CH}^1(\mathfrak{h}^2(X)) = \mathrm{NS}(X)$ et $\mathrm{CH}^2(\mathfrak{h}^4(X)) = Z_{\mathrm{hom}}(X)$. La dualité de Poincaré en homologie devrait donc induire un isomorphisme $\mathrm{CH}^2(\mathfrak{h}^4(X)) = \mathrm{NS}(X)^*$.

Par ailleurs les groupes manquants pour décomposer $\mathrm{CH}^3(X)$ devraient être les gradués d'une filtration de ce groupe. Il est alors naturel d'attendre $F^2\,\mathrm{CH}^3(X) = T(X)$, mais comme celui ci est nul dans le cas représentable, on en déduit qu'il n'y a pas de gradués, et donc les deux groupes de Chow devraient être nuls.

Enfin le terme manquant pour filtrer $\mathrm{CH}^2(X)$ doit être $\mathrm{CH}^2_{\mathrm{hom}}(X)$ par la conjecture de Bloch-Beilinson, mais dans le cas représentable celui ci est égal à $\mathrm{CH}^2_{\mathrm{alg}}(X)$ qui est dominé par une variété abélienne. On peut donc espérer compléter la table suivante par les valeurs suivantes.

M	$\mathfrak{h}^0(X)$	$\mathfrak{h}^1(X)$	$\mathfrak{h}^2(X)$	$\mathfrak{h}^3(X)$	$\mathfrak{h}^4(X)$	$\mathfrak{h}^5(X)$	$\mathfrak{h}^6(X)$
$\mathrm{CH}^0(M)$	$\mathrm{CH}^0(X)$	0	0	0	0	0	0
$\mathrm{CH}^1(M)$	0	$\mathrm{Pic}^0(X)_{\mathbb{Q}}$	$\mathrm{NS}(X)$	0	0	0	0
$\mathrm{CH}^2(M)$	0	0	0	$\mathrm{CH}^2_{\mathrm{alg}}(X)$	$\mathrm{NS}(X)^*$	0	0
$\mathrm{CH}^3(M)$	0	0	0	0	0	$\mathrm{Alb}(X)(k)$	$\mathrm{Num}(X)$

Dès lors il est naturel de chercher les motifs suivants :

- $\mathfrak{h}^2(X) = \mathbf{1}(-1)^{\rho(X)}$.
- $\mathfrak{h}^4(X) = \mathfrak{h}^2(X)^\vee$.
- $\mathfrak{h}^3(X)$ découpé sur des variétés abéliennes reliés aux jacobiennes intermédiaires.

En particulier le motif de X serait de dimension finie car découpé sur des variétés abéliennes. Nous allons rendre précis ces affirmations.

Pour les projecteurs $\pi_0, \pi_1, \pi_5, \pi_6$ on utilise les constructions générales que l'on a déjà vu.

Définition 4.5.1. *Soit* D_i *des diviseurs tels que leur image dans le groupe de Néron-Severi forme une base de celui-ci. Comme* π_1 *agit comme la projection sur* $\mathrm{Pic}^0(X)$*, on peut remplacer* D_i *par* $D_i - (\pi_1)_*(D_i)$ *et donc supposer que* $(\pi_1)_*(D_i) = 0$*. Soit ensuite* $\{E_i\}$ *la base duale de* $\{D_i\}$ *pour la forme d'intersection. Ces éléments sont naturellement des objets dans* $\mathrm{CH}^2(X)$ *(car par la propriété de représentabilité on peut identifier* $\mathrm{NS}(X)$ *avec* $H^2(X)$*, et le dual de celui ci avec* $H^4(X)$*). On définit alors le projecteur*

$$\pi_2 = \sum_i E_i \times D_i.$$

On pose ensuite $\pi_4 = \pi_2^\top$, c'est à dire

$$\pi_4 = \sum_i D_i \times E_i$$

Enfin on pose $\pi_3 = \Delta_X - \sum_{i \in \{0,1,2,4,5,6\}} \pi_i$.

Maintenant que l'on a défini de nouveaux projecteurs, il faut vérifier qu'ils sont orthogonaux à ceux que l'on connait déjà et qu'ils relèvent les projecteurs de Künneth.

Proposition 4.5.1. *π_2 est un projecteur orthogonal à $\pi_0, \pi_1, \pi_4, \pi_5, \pi_6$.*

Par dualité on en déduit un résultat analogue pour π_4 et en complétant aussi pour π_3.

Démonstration. Montrons d'abord que π_2 est un projecteur. Pour cela on doit calculer

$$E_i \times D_i \circ E_j \times D_j$$

ce qui revient à calculer $(pr_{13})_*(E_i \times D_i \times X \cap X \times E_j \times D_j)$. Cette intersection vaut clairement $E_i \times < E_j, D_i > \times D_j$. Donc en projetant on obtient $\delta_{ij} E_i \times D_j$. En sommant on obtient bien que π_2 est un projecteur.

Rappelons la formule de Lieberman pour des endomorphismes de X :

$$(\alpha \times \beta)_*(f) = \beta \circ f \circ \alpha^\top.$$

Pour montrer l'orthogonalité de π_2 aux projecteurs $\pi_0, \pi_1, \pi_5, \pi_6$ qui sont symétriques, il suffit de connaitre l'action de ceux-ci sur les éléments D_i et E_i. Or celles-ci sont toutes nulles sauf potentiellement celle de π_1 sur D_i. Mais on a justement normalisé ces éléments pour que l'action soit bien nulle. On a donc bien les relations d'orthogonalité pour ces projecteurs. Enfin il faut justifier l'orthogonalité de π_2 avec π_4. Cela se ramène au calcul de $E_i \times D_i \circ D_j \times E_j$, mais $E_i \cap E_j$ est nul pour raison de codimension. De même $D_i \times E_i \circ E_j \times D_j$ est nul car on fait le poussé en avant d'une variété de dimension 3 sur une variété de dimension 2. Finalement les deux projecteurs sont bien orthogonaux.

■

Maintenant que l'on a un système complet d'idempotents orthogonaux, il reste à vérifier que leurs classes de cohomologies donnent bien les projecteurs de Künneth. Encore une fois il suffit de traiter les cas de π_2, π_3, π_4 car les autres sont usuels.

Proposition 4.5.2. *Le projecteur π_i agit comme l'identité sur $H^i(X)$ et comme 0 sur les autres groupes de cohomologie pour $i \in \{2, 3, 4\}$.*

En particulier les classes de cohomologies de ces projecteurs sont bien celles des projecteurs de Künneth.

Démonstration. Comme π_2 est orthogonal à $\pi_0, \pi_1, \pi_5, \pi_6$ et que ceux ci relèvent les projecteurs de Künneth, on en déduit que π_2 à une action nulle sur les groupes de cohomologies correspondant. L'action vaut l'identité sur le groupe $H^2(X)$ grâce au fait que celui ci est isomorphe au groupe de Néron-Severi car X est représentable. Par le même raisonnement on montre que π_4 agit comme l'identité sur $H^4(X)$, et comme π_2 lui est orthogonal, on en déduit que l'action de ce dernier est nulle. Reste à calculer l'action de π_2 sur $H^3(X)$. Dans celle ci il faut calculer le cup-produit d'une classe $h \in H^3(X)$ avec la classe $[E_i] \in H^4(X)$. Cela donne un résultat nul pour une raison de dimension. D'où le résultat.

Le même raisonnement s'applique pour π_4, et pour π_3 on le déduit du fait que la somme des projecteurs vaut l'identité et que l'on connait toutes les autres actions.

La deuxième assertion découle du fait qu'en cohomologie, si deux classes ont la même action, alors elles sont égales. Donc $\Delta_i = [\pi_i]$

■

On peut maintenant revenir à la table des actions sur les groupes de Chow. On connait déjà les groupes de Chow des motifs $\mathfrak{h}^i(X)$ pour $i \in \{0, 1, 5, 6\}$. Par ailleurs grâce à la proposition 2.2.6, on connait les décomposition sur $\mathrm{CH}^0(X)$ et $\mathrm{CH}^1(X)$. Nous allons maintenant calculer les groupes de Chow restants.

Proposition 4.5.3. *Pour le motif $M = \mathfrak{h}^2(X)$, on a les groupes de Chow suivants.*
- $\mathrm{CH}^2(M) = \mathrm{CH}^3(M) = 0$.

Pour le motif $M = \mathfrak{h}^4(X)$, on a les groupes de Chow suivants.
- $\mathrm{CH}^2(M) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)^*$.
- $\mathrm{CH}^3(M) = 0$.

Enfin pour le motif $M = \mathfrak{h}^3(X)$, on a les groupes de Chow suivants.
- $\mathrm{CH}^2(M) = \mathrm{CH}^2_{\mathrm{alg}}(X)$.
- $\mathrm{CH}^3(M) = 0$.

Démonstration. Commençons par le motif $\mathfrak{h}^2(X)$. Celui ci est défini par le projecteur π_2 qui est somme des $E_i \times D_i$. Pour $\alpha \in \mathrm{CH}^j(X)$ on calcule $(E_i \times D_i)_*(\alpha)$. Pour cela on en vient à calculer

$$E_i \times D_i \cap \alpha \times X = (E_i \cap \alpha) \times D_i$$

Or $E_i \in \mathrm{CH}^2(X)$, donc le résultat est forcément nul pour raison de dimension si $j \geq 2$. Dès lors l'action de π_2 est nulle sur $\mathrm{CH}^2(X)$ et $\mathrm{CH}^3(X)$, donc les groupes de Chow du motif associé sont nuls.

Passons maintenant aux groupes de Chow de $\mathfrak{h}^4$. Comme π_4 se décompose sur les $D_i \times E_i$, un argument de dimension montre encore que l'action sur $\mathrm{CH}^3(X)$ est nulle. Sur le groupe $\mathrm{CH}^2(X)$ l'action est

$$(\pi_4)_*(\alpha) = \sum_i (\alpha \cap D_i) E_i$$

donc c'est bien un projecteur sur $(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X))^*$.

Sachant que la somme des projecteurs vaut l'identité et que l'on connait les actions de tous les autres projecteurs π_j, on peut en déduire les actions du projecteur π_3 :
- Sur $\mathrm{CH}^2(X)$ l'image de $(\pi_3)_*$ doit être le noyau de $(\pi_4)_*$, donc exactement les classes qui sont homologiquement triviales. Or comme $\mathrm{CH}^3(X)$ est représentable, on sait que l'équivalence numérique et algébrique coïncident sur ce groupe de Chow, d'où le calcul de $\mathrm{CH}^2(\mathfrak{h}^3(X))$.

- Comme $\mathrm{CH}^3(X)$ est représentable, on en déduit que le morphisme d'Albanese est injectif, donc l'action de $\pi_5 + \pi_6$ sur $\mathrm{CH}^3(X)$ est l'identité, donc l'action de π_3 est nulle, donc le groupe de Chow correspondant est trivial.

On a donc bien calculé tous les groupes de Chow annoncés.

∎

Nous voulons maintenant en déduire des formes explicites des motifs $\mathfrak{h}^i(X)$. Le premier résultat est facile.

Lemme 4.5.4. *On a un isomorphisme $\mathfrak{h}^2(X) \simeq \mathbf{1}(-1)^{\rho(X)}$. En dualisant on obtient directement $\mathfrak{h}^4(X) \simeq \mathbf{1}(-2)^{\rho(X)}$.*

Démonstration. Il suffit de prendre les morphismes évidents donnés par les classes des D_i et des E_i. ∎

Pour le motif $\mathfrak{h}^3(X)$ on a aussi une description explicite.

Théorème 4.5.5. *Il existe une variété abélienne J telle que $\mathfrak{h}^3(X) \simeq \mathfrak{h}^1(J)(-1)$. Par ailleurs sur $\mathbb{C}$, cette variété abélienne J correspond à isogénie près à une jacobienne intermédiaire.*

Démonstration. Nous nous contentons de résumer les grandes lignes de l'article [28].

Tout d'abord comme $\mathrm{CH}^2_{\mathrm{alg}}(X)$ est représentable, on a une surjection par la jacobienne d'une courbe $J(C)$ de noyau un groupe algébrique G, donc en prenant un supplémentaire J (possible à isogénie près grâce au théorème de réductibilité de Poincaré), on obtient un isomorphisme $\mathrm{CH}^2_{\mathrm{alg}}(X) \simeq \mathrm{CH}^1_{\mathrm{alg}}(J)$. Par ailleurs ce morphisme vient d'une correspondance f. On pose donc $M = \mathfrak{h}^1(J)(-1)$

On montre ensuite que l'action de cette correspondance induit in isomorphisme en cohomologie. Comme on sait que pour les variétés abéliennes les endomorphismes du groupe H^1 correspondent aux endomorphismes des variétés abéliennes, on trouve g un inverse de f à isogénie près (c'est à dire dans la catégorie des motifs $\mathbb{Q}$-linéaires).

Dès lors $h = gf$ est un automorphisme du morphisme M, donc $fh^{-1}g$ est un idempotent du motif $\mathfrak{h}^3(X)$. Dès lors on a $\mathfrak{h}^3(X) = M \oplus N$. Mais par l'étude que l'on a fait des groupes de Chow de M et de $\mathfrak{h}^3(X)$, on sait que N a tous ses groupes de Chow nuls. Enfin on vérifie que toutes les hypothèses et constructions passent à l'extension $k \subset \Omega$ par un domaine universel Ω. Donc le motif N_Ω n'a pas de groupes de Chow, donc celui ci est nul grâce aux résultats rappelés en annexe C. Ce qui prouve le résultat souhaité.

■

Corollaire 4.5.5.1. *Sous les hypothèses du cadre, le motif $\mathfrak{h}(X)$ est de dimension finie.*

Démonstration. En effet le théorème précédent permet de découper un tel motif sur des objets abéliens. ■

Il reste à exhiber des variétés qui vérifient les hypothèses du cadre.

Exemple 4.5.1. *Si X est une variété de Fano de dimension 3 sur $\mathbb{C}$, alors elle vérifie les hypothèses du cadre.*

4.5.2 Quand la dimension finie restreint la représentabilité

Dans la section précédente nous avons vu des cas où la notion de représentabilité permettait de prouver la propriété de dimension finie. Cependant on conjecture que tout motif est de dimension finie, tandis que l'on a vu que la propriété de représentabilité était rare ; cette stratégie de preuve ne peut donc pas se généraliser. Dès lors on peut se poser la question inverse : sous des hypothèses de dimension finie, que peut on dire sur la représentabilité. L'exemple suivant est issu de l'article original de Kimura [25] sur les motifs de dimension fine.

Cadre. *Pour les applications qui suivent on se donne une variété projective lisse X sur $\mathbb{C}$ de dimension n, et la cohomologie de Weil correspond à la cohomologie de Betti.*

On renvoie à l'annexe C pour une définition de la notion de surjectivité que nous utiliserons dans la preuve du théorème suivant.

Proposition 4.5.6. *Supposons que la variété X vérifie les hypothèses suivantes :*

- *$\mathfrak{h}(X)$ est de dimension finie.*
- *X vérifie la conjecture de Hodge.*
- *Pour tout i il existe une variété abélienne J_i et une correspondance $\Gamma_i : X \to J_i$ qui induise un isomorphisme de structures de Hodge $(\Gamma_i)_* : H^{2n-2i-1}(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^1(J_i, \mathbb{Q})$.*
- *$h^{i,j}(X) = 0$ pour $|i - j| > 1$.*
- *Les variétés $X \times J_i$ vérifient la conjecture de Hodge.*

Alors tous les groupes de Chow de X sont représentables.

Remarque. *Dans ([25], 7.10) Kimura démontre ce théorème sans la dernière hypothèse. Comme nous n'avons pas bien compris la preuve nous en faisons une légèrement différente avec cette hypothèse supplémentaire.*

Démonstration. Comme on suppose que $J_i \times X$ vérifie la conjecture de Hodge, la proposition 1.3.8 assure que la partie algébrique de l'application d'Abel-Jacobi est surjective. De plus au vu de l'hypothèse que l'on fait sur la forme de la structure de Hodge, la proposition 1.3.7 assure que la partie transcendante de l'application d'Abel-Jacobi est surjective. Dès lors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{CH}^{n-i}_{\mathrm{alg}}(X) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\mathrm{AJ}_{\mathrm{alg}}"'] & \mathrm{CH}^{n-i}_{\mathrm{hom}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{AJ}"] & \mathrm{Griff}^{n-i}(X) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\mathrm{AJ}_{\mathrm{tr}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & J^{2n-2i-1}_{\mathrm{alg}} \arrow[r] & J^{2n-2i-1} \arrow[r] & J^{2n-2i-1}_{\mathrm{tr}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

assure que l'application d'Abel-Jacobi est surjective. Mais alors on a le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}^{n-i}_{\mathrm{hom}}(X) \arrow[r, "(\Gamma_i)_*"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{AJ}"'] & \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(J_i) \arrow[d, "\simeq"] \\
H^{2n-2i-1}(X, \mathbb{Q}) \arrow[r, "\simeq"'] & H^1(J_i, \mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

Où le morphisme inférieur est un isomorphisme par hypothèse et celui de droite l'est aussi car c'est la première application d'Abel-Jacobi. On en déduit que l'action de Γ sur ce groupe de Chow est bien surjective.

Dès lors comme on sait que le motif $\mathfrak{h}^1(J_i)$ est un facteur direct de $\mathfrak{h}(X)$ et que son groupe de Chow est $\mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(J_i)$, on en déduit que Γ_i composé avec $\alpha : \mathfrak{h}(J_i) \to \mathfrak{h}^1(J_i)$ induit un morphisme surjectif de motifs. Dès lors celui ci a une section φ et on pose $\varphi_i = \varphi \circ \alpha$. On a donc une correspondance de J_i dans X telle que $\Gamma_i \circ \varphi_i$ est un idempotent sur J_i et la cohomologie du motif associé est précisément $\mathfrak{h}^1(J_i)$. Par ailleurs en cohomologie φ_i induit l'isomorphisme $H^1(J_i, \mathbb{Q}) \simeq H^{2n-2i-1}(X, \mathbb{Q})$.

Posons alors $p_i = \varphi_i \circ \Gamma_i \in \mathrm{Corr}(X, X)$. Comme $\Gamma_i \circ \varphi_i$ est idempotent, on vérifie sans peine que p_i est idempotent. Par ailleurs celui ci est construit de sorte que son unique groupe de cohomologie soit $H^{2n-2i-1}(X, \mathbb{Q}) \simeq H^1(J_i, \mathbb{Q})$. Au vu de la forme de la décomposition de Hodge sur X on en déduit que $\mathrm{Hdg}^{2i}(X, \mathbb{Q}) = H^{2i}(X, \mathbb{Q})$, et comme on suppose la conjecture de Hodge vérifié sur cet espace, on peut se donner des cycles d_j de sorte que $[d_j]$ forme une base de $H_{\mathrm{pair}}(X, \mathbb{Q})$. De même on se donne des cycles $\hat{d_j}$ qui forment la base duale pour le produit d'intersection. On définit les deux cycles suivants :

$$\pi_+ = \sum_j d_j \times \hat{d_j},\ \pi_- = \sum_i p_i \circ p_i.$$

Un calcul élémentaire montre que les p_i sont orthogonaux entre eux de même que les $d_j \times \hat{d_j}$, donc les deux éléments précédents sont des idempotents. De plus ils sont orthogonaux entre eux. On pose enfin $\pi = \pi_+ + \pi_-$. Par construction π agit comme l'identité en cohomologie donc $\Delta_X - \pi$ est dans l'idéal homologique. Comme $\mathfrak{h}(X)$ est de dimension finie on en déduit que l'idéal homologique est nilpotent, donc $\Delta_X - \pi$ est nilpotent, et donc π est inversible. Ainsi pour l'action de π sur les groupes de Chow on a

$$\mathrm{Im}((\pi)_*) = \mathrm{CH}(X)$$

Or l'action de π_+ induit l'espace vectoriel engendré par les cycles d_j et celle de π_- a pour image

$$\bigoplus_i \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(J_i)$$

Comme le premier groupe de Chow s'identifie à la jacobienne, on a donc

$$\mathrm{CH}(X) = \bigoplus_j \mathbb{Q} \cdot\ d_j \oplus \bigoplus_i J_i,$$

ce qui prouve bien que les groupes de Chow de X sont représentables.

■

Par l'équivalence de catégories entre structures de Hodge de poids 1 et tores complexes, on a forcément une isogénie entre J_i et la jacobienne intermédiaire $J^{2n-2i-1}$.

Remarque. *Sous l'hypothèse* (4) *du théorème, on en déduit que la jacobienne intermédiaire est algébrique grâce au lemme 1.3.3. Dès lors l'hypothèse* (3) *devrait découler de la conjecture de Hodge en posant* $J_i = J^{2n-2i-1}$ *la jacobienne intermédiaire.*

Ainsi si on a les conjectures de Kimura-O'Sullivan ainsi que la conjecture de Hodge généralisée, la seule hypothèse qu'il faut vérifier est en fait la dernière. En particulier ce résultat donnerait une réciproque au théorème 1.2.4 dans le cas des variétés de dimension inférieure à 3*.*

Exemple 4.5.2. *L'hypothèse* (4) *du théorème est vérifiée pour des variétés de Fano de dimension* 3*, cependant au vu de la section précédente il a fallu d'abord vérifier la condition de représentabilité avant d'avoir la finitude du motif.*

5 Étude détaillée des surfaces

On va maintenant procéder à une étude de certains types de surfaces pour essayer de démontrer la conjecture de Kimura-O'Sullivan dans des cas particuliers. Nous allons notamment nous appuyer sur la classification des surfaces, donc on fera dans cette section l'hypothèse suivante.

Cadre. *On s'intéresse dans cette partie uniquement aux surfaces S définies sur $\mathbb{C}$.*

5.1 Éléments de classification

La classification des courbes projectives lisses est bien connue. Dans celle-ci il y a essentiellement deux éléments de classification : le genre géométrique g qui est discret et l'espace de module associé qui est une variété algébrique. On cherche maintenant une classification des surfaces complexes qui fasse aussi apparaitre certains invariants discrets utiles.

5.1.1 Invariants de classification

Dans le cas des courbes projectives lisses, l'équivalence birationnelle coïncide avec la relation d'isomorphisme, mais ce n'est pas le cas en dimension plus grande. Dès lors il faut se demander quelle relation est utile pour la classification des surfaces. La relation d'isomorphisme serait sans doute plus satisfaisante mais en même temps beaucoup plus complexe à identifier. D'un autre coté l'équivalence birationnelle est plus souple mais elle permet des identifications qui restent naturels, comme le fait de contracter certaines courbes par des blow-down. En outre la conjecture que nous étudions est un invariant birationnel, donc cette classification est suffisante pour notre problème.

Nous allons maintenant présenter des quantités qui sont des invariants birationnels utiles pour la classification.

Définition 5.1.1. *Rappelons que le genre géométrique p_g est défini comme étant $h^0(S, K_S) = h^{2,0}$. De même on définit l'irrégularité de S comme étant*

$$q(S) = h^1(S, \mathcal{O}_S) = h^{0,1}$$

Rappelons qu'en théorie birationnelle des surfaces, toute équivalence de cette sorte s'obtient par une succession de blow-up et de blow-down de points. On a alors immédiatement le résultat suivant.

Proposition 5.1.1. *Le genre géométrique et l'irrégularité sont des invariants birationnels.*

Démonstration. Grâce à la formule de la cohomologie d'un blow-up qui est un isomorphisme de structures de Hodge après réalisation par le foncteur de Betti, on voit que seul le nombre de Hodge $h^{1,1}$ peut varier dans une transformation birationnelle. Comme on a interprété p_g et q par d'autres nombres de Hodge, on a donc bien le résultat voulu. ■

Un invariant plus intéressant est la dimension de Kodaira. Intuitivement, plus celle ci est grande et plus la variété considérée est générale. Dans le cas des courbes on a par exemple la trichotomie suivante.

- $\kappa(C) = -\infty$ si et seulement si $C = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.
- $\kappa(C) = 0$ si et seulement si C est une courbe elliptique.
- $\kappa(C) = 1$ si et seulement si $g(C) \geq 2$.

Cette trichotomie explique de nombreuses distinctions sur le genre plus grand que 2, notamment pour les dimensions des espaces de module ou des groupes d'automorphismes.

Définition 5.1.2. *Posons l'espace vectoriel*

$$R = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(S, K_S^{\otimes n}).$$

Le produit tensoriel fait de lui une $\mathbb{C}$-algèbre.

- *Si $R = \mathbb{C}$ on dit pose $\kappa(S) = -\infty$.*
- *Sinon on pose $\kappa(S) = \mathrm{degtr}_{\mathbb{C}}(R) - 1$.*

Cette quantité est appelée la dimension de Kodaira. On a $\kappa(S) \leq 2$

Proposition 5.1.2. *La dimension de Kodaira est un invariant birationnel.*

Démonstration. Cela découle de l'invariance birationnelle des nombres $h^0(S, K_S^{\otimes n})$.

■

Remarque. *L'interprétation motivique permet de voir en revanche que le nombre de Picard n'est pas un invariant bi-rationnel. Toutes les quantités algébriques ne sont pas conservées, comme le montre le calcul de la cohomologie d'un Blow-up.*

5.1.2 Classification des surfaces complexes

La classification des surfaces va se faire en décomposant selon la dimension de Kodaira. Commençons par introduire les définitions des variétés qui formeront les modèles de notre classification. Certaines d'entre elles seront étudiées avec plus d'attention dans la prochaine section.

Définition 5.1.3. *Une surface $K3$ est une surface projective lisse telle que $q(S) = 0$ et dont le fibré canonique est trivial.*

Une surface d'Enriques est le quotient d'une surface K3 par l'action libre d'un groupe d'ordre 2*.*

Définition 5.1.4. *Une surface bielliptique est le quotient du produit de deux courbes elliptiques par l'action libre d'un groupe fini.*

On peut maintenant passer au théorème de classification des surfaces dont la dimension de Kodaira est petite.

Théorème 5.1.3. *Si $\kappa(S) = -\infty$ alors S est birationnellement équivalent à une surface $C \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ où C est une courbe projective lisse.*

Théorème 5.1.4. *Un surface de dimension de Kodaira* 0 *minimale est soit :*
- *Une surface K3, dans ce cas $p_g = 1$ et $q = 0$.*
- *Une surface d'Enriques, dans ce cas $p_g = q = 0$.*
- *Une variété abélienne, dans ce cas $p_g = 1$ et $q = 2$.*
- *Une surface bielliptique, dans ce cas $p_g = 0$ et $q = 1$.*

Comme pour les courbes, les cas de petite dimension de Kodaira sont les plus faciles. Le cas $\kappa(S) = 1$ reste accessible du fait que de telles surfaces possèdent une fibration elliptique dans un sens que nous verrons dans la section 5.2.2. En revanche le cas $\kappa(S) = 2$ représente les surfaces de type général et il ne se classifie pas avec seulement quelques modèles simples.

5.2 Fibrations

Les fibrations sont un outil puissant pour étudier des variétés, intuitivement elles permettent de recouvrir une variété par une famille de sous variétés, paramétrée par une base.

5.2.1 F-Fibrés

La première définition que l'on se donne suit celle des fibrés vectoriels. Nous allons voir que celle-ci est en fait trop restreinte.

Définition 5.2.1. *Soit B et F des variétés projectives sur un corps k . Une variété X est appelée un fibré de base B (et de fibre F), ou un F-fibré si on a un morphisme*

$$\pi : X \longrightarrow B$$

tel qu'il existe un recouvrement par des ouverts (U_α) vérifiant :
- *$\pi^{-1}(U_\alpha)$ est isomorphe à $U_\alpha \times F$ et le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\alpha \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ U_\alpha & \end{tikzcd}$$

- *sur les intersections doubles* $U_\alpha \cap U_\beta$ *on a*

$$\varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta)^{-1} = \begin{cases} U_\alpha \cap U_\beta \times F & \longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times F \\ (u,f) & \longrightarrow (u, g_{\alpha\beta}(u)(f)) \end{cases}$$

Pour $g_{\alpha\beta}$ *un morphisme de* B *dans* $\mathrm{Aut}(F)$ *(ce qui fait sens car ce dernier espace à une structure algébrique).*

Cette introduction des cocycles permet de mettre en bijection les fibrés avec $H^1(B, \mathrm{Aut}(F))$. Il faut cependant prendre garde au fait que ce dernier n'est qu'un ensemble et pas un groupe. Rappelons la définition de la cohomologie dans le cadre non abélien.

Définition 5.2.2. *Soit* X *un espace topologique,* $\mathfrak{U}$ *un recouvrement d'ouverts et* $\mathcal{G}$ *un faisceau en groupes sur* X. *On considère le groupe*

$$\prod_{U,U' \in \mathfrak{U}} \mathcal{G}(U \cap U')$$

On distingue le sous groupe Z *des éléments* $g_{U \cap U'}$ *tels que sur les intersections triples on ait*

$$(g_{U\cap U'})_{|U\cap U'\cap U"} \cdot (g_{U'\cap U"})_{|U\cap U'\cap U"} = (g_{U\cap U"})_{|U\cap U'\cap U"}.$$

On identifie deux éléments g *et* g' *de* Z *si et seulement s'il existe une famille*

$$(h_U) \in \prod_{U \in \mathfrak{U}} \mathcal{G}(U)$$

telle que sur chaque intersection on ait

$$g'_{U\cap U'} = (h_U)_{|U\cap U'} \cdot g_{U\cap U'} \cdot \left(h_{U'}^{-1}\right)_{|U\cap U'}.$$

On pose alors $H^1(X, \mathfrak{U}, \mathcal{G})$ *le quotient ensembliste de* Z *par cette relation d'équivalente.*

Enfin on pose $H^1(X, \mathcal{G}) = \mathrm{colim}\ H^1(X, \mathfrak{U}, \mathcal{G})$. *Cet objet n'est à priori qu'un ensemble mais il dispose d'une classe distinguée noté* 1 *qui correspond au cocyle constant en l'élément neutre.*

Par ailleurs si on a une suite exacte de faisceaux en groupes

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}" \longrightarrow 0$$

elle induit une suite d'ensembles

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}'(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X) \longrightarrow \mathcal{G}"(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}') \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}")$$

Qui est exacte dans le sens où l'image d'un morphisme est égal à la pré image de l'élément distingué 1 *par le morphisme suivant.*

Enfin si $\mathcal{G}'$ *est un faisceau en groupes abéliens, on peut compléter cette suite par l'ensemble* $H^2(X, \mathcal{G}')$.

Remarque. *Cette construction de la cohomologie dans le cadre non abélien ne fait sens que pour le premier groupe de cohomologie : on ne peut pas définir de la sorte un groupe* $H^2(G)$.

On peut maintenant formaliser l'intuition précédente.

Proposition 5.2.1. *Soit* B *et* F *deux variétés algébriques projectives. Soit* $\mathcal{A}(F)$ *le faisceau en groupe sur* B *des fonctions à valeurs dans* $\mathrm{Aut}(F)$. *Alors on a une bijection canonique entre les fibrés sur* B *de fibre* F *et le groupe* $H^1(B, \mathcal{A}(E))$.

Démonstration. C'est tautologique. ■

On voit tout de suite la limite de cette construction naïve : en géométrie algébrique une variété générale à peu d'automorphismes donc il y a peu de fibrés pour une fibre fixée.

Exemple 5.2.1. *Si F est une courbe projective lisse de genre $g \geq 2$ très générale, on a $\mathrm{Aut}(F) = \{\mathrm{Id}\}$, donc le seul fibré projectif de fibre F sur une base B est le fibré trivial $B \times F$.*

Plus généralement $\mathrm{Aut}(F)$ est un groupe fini pour les courbes de genre plus grand que 2. Donc le faisceau $\mathcal{A}(F)$ est localement constant. Dès lors sur $k = \mathbb{C}$ la monodromie lui associe un morphisme

$$\pi_1(B) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(F))$$

qui fait de $\mathrm{Aut}(F)$ un $\pi_1(B)$-ensemble. Dès lors on a un isomorphisme

$$H^1(B, \mathcal{A}(F)) \simeq H^1(\pi_1(B), \mathrm{Aut}(F))$$

où le terme de droite est défini en tant que cohomologie du groupe $\pi_1(B)$. La classification des fibrés en F est donc ramené à une question sur les représentations de $\pi_1(B)$ dans $\mathrm{Aut}(F)$.

Bien que les F-fibrés soient rares, on peut lister deux bonnes propriétés qui restreignent leur cohomologie.

Lemme 5.2.2. *Soit X un F-fibré de base B. Alors X est birationnellement équivalent à $B \times F$.*

Démonstration. Il suffit de prendre un ouvert trivialisant du fibré. ■

En particulier pour les surfaces (dans le cas où B et F sont projectifs lisses), si la base et la fibre sont de dimension finie alors la surface totale est aussi de dimension finie au sens de Kimura-O'Sullivan. On peut en fait espérer une formule explicite pour son motif.

Proposition 5.2.3. *Soit X un F-fibré dont la base B et la bire sont projectifs et lisses. On suppose $\mathrm{car}(k) = 0$. Alors dans la catégorie des motifs numériques on a l'égalité*

$$\mathfrak{h}(X) = \mathfrak{h}(B) \otimes \mathfrak{h}(F).$$

Par ailleurs si le corps de base est $k = \mathbb{C}$ et que l'on prend la cohomologie de Betti, cette égalité est aussi vrai en cohomologie.

Démonstration. On considère la catégorie des variétés quasi-projectives. Par des résultats généraux on a un morphismes d'anneaux

$$K_0(\mathrm{Var}(k)) \longrightarrow K_0(\mathrm{Num}(k)).$$

Or l'égalité annoncé est évidente dans le groupe de départ par un découpage sur un ouvert trivialisant de B et un argument de récurrence. On a donc $[X] = [B] \times [F]$ dans le groupe de Grothendieck. Or la catégorie Num(k) est semi-simple donc une égalité dans le groupe K_0 implique une égalité dans la catégorie d'origine.

La preuve de la deuxième partie est similaire étant donné que la cohomologie de Betti est à valeur dans la catégorie des structures de Hodge, qui est semi-simple. Donc on peut appliquer le même argument. ■

Remarque. *Au niveau du choix de la cohomologie, la preuve précédente se généraliserait à d'autres cohomologies de Weil si celles-ci se factorisent par des réalisations enrichies dans une catégorie semi-simple. Pour la cohomologie l-adique c'est une partie de la conjecture de Tate.*

Pour la catégorie des motifs, on peut remonter cette égalité aux motifs de Chow à condition que la projection

$$\mathrm{CH}(k) \longrightarrow \mathrm{Num}(k)$$

soit un foncteur conservatif (il est plein car quotient). C'est par exemple le cas si la conjecture de Kimura-O'Sullivan est vérifiée.

Dans notre étude des surfaces il y a en terme de dimension un seul cas non trivial qui puise arriver : celui où la base et la fibre sont des courbes. A titre d'exemple montrons une propriété sur les fibrés en courbes rationnelles. Rappelons que le groupe d'automorphismes de $\mathbb{P}^n$ est PGL$(n+1, \mathbb{C})$.

Lemme 5.2.4. *Sur une courbe C, tout fibré dont la fibre est $\mathbb{P}^n$ est le projectivisé d'un fibré vectoriel. De plus deux fibrés vectoriels V et V' induisent le même fibré projectif si et seulement si il existe un fibré en droite L tel que $L \otimes V = V'$.*

Démonstration. On a la suite exacte courte de groupes

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{PGL}(n+1,\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

Si on passe au faisceau des fonctions holomorphes à valeurs dans ces groupes complexes, on obtient les espaces classifiants les fibrés en droites, les fibrés vectoriels de rang $n+1$ et les fibrés en $\mathbb{P}^n$. On a donc la suite exacte en cohomologie

$$\mathrm{Pic}(C) \longrightarrow H^1(\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})) \longrightarrow H^1(\mathrm{PGL}(n+1,\mathbb{C})) \longrightarrow H^2(C,\mathcal{O}^\times)$$

Or comme C est une courbe, la suite exacte courte de l'exponentielle impose que $H^2(C,\mathcal{O}^\times) = 0$. D'où la surjectivité de l'opération de projectivisation des fibrés vectoriels. Par ailleurs le terme de gauche de la suite exacte implique bien que deux éléments ont même image si et seulement s'ils diffèrent par un élément de $\mathrm{Pic}(C)$.

■

Remarque. *En analysant la preuve, on voit que le deuxième point de la proposition est valable sur n'importe quelle base.*

Pour les courbes elliptiques, le groupe d'automorphisme est produit semi-direct de la courbe elliptique elle même (via l'action par translation), avec un groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $n \in \{2,4,6\}$ selon la valeur du j-invariant. La classification des fibrés elliptiques est plus riche mais bien comprise. On renvoie à ([34],V.5), dont nous nous contentons de rappeler quelques résultats importants.

Définition 5.2.3. *Un fibré dont la fibre est une courbe elliptique E est dit principal si le cocycle dans $\mathcal{A}(E)$ a son image dans le sous groupe correspondant aux translations.*

On suppose désormais que la base est une courbe.

Proposition 5.2.5. *Un fibré elliptique principal est topologiquement homéomorphe à un produit cartésien. En particulier les invariants $b_1(X)$ et $b_2(X)$ sont entièrement déterminés par ceux de B.*

Proposition 5.2.6. *Si la base est $\mathbb{P}^1$, tout fibré elliptique sur B est biholomorphe à $E \times \mathbb{P}^1$.*

Théorème 5.2.7. *Si la base B est une courbe elliptique, alors X est isomorphe au quotient de $E \times B$ par l'action d'un groupe fini. De plus cette action est explicite et il n'y a qu'un nombre fini de groupes possibles.*

Par ailleurs le faisceau canonique est de torsion, en particulier la dimension de Kodaira de X est nulle.

On en déduit immédiatement les calculs des nombres de Hodge et de la dimension de Kodaira.

Corollaire 5.2.7.1. *Dans les conditions du théorème précédent, la surface obtenue est de dimension de Kodaira* 0*. Par ailleurs ses nombres de Hodge sont donnés par*

$$h^{1,0} = 1,\ h^{2,0} = 0,\ h^{1,1} = 2$$

Ce résultat nous permet donc de comprendre les surfaces bielliptiques qui apparaissent dans la classification du théorème 5.1.4. Cela justifie à posteriori l'importance de ce type de fibré.

5.2.2 Généralités sur les fibrations

Dans la construction précédente il y a principalement deux limitations qui réduisent la possibilité de mettre une structure de F-fibré sur des variétés générales. D'abord on demandait que toutes les fibres soient isomorphes à une même variété F, ce qui n'était pas raisonnable. De plus on n'autorisait pas certaines fibres à être singulières. Nous allons donc tenter de dépasser ces deux problèmes, en ne demandant que le fait que les fibres soit dans un même espace de module, et en autorisant le passage par certaines fibres singulières ou réductibles.

Définition 5.2.4. *Un morphisme $f : X \to B$ entre variétés projectives est appelé une fibration s'il est dominant et que sa fibre générique est connexe.*

Cadre. *Dans cette section on supposera que X et B sont des variétés projectives lisses connexes, et on se donne $f : X \to B$ une fibration. En particulier le morphisme f est propre car il est entre variétés projectives.*

Au prix d'une factorisation usuelle, on peut faire deux hypothèses supplémentaires sur le morphisme f.

Théorème 5.2.8 (Stein)**.** *Soit B un schéma localement noethérien et $f : X \to B$ un morphisme propre. Alors il existe une factorisation*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & B' \arrow[dl, "\pi"] \\ B & \end{tikzcd}$$

telle que
- *f' est propre, surjectif et ses fibres sont connexes.*
- *π est fini.*
- *$f'_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{B'}$.*
- *B' est la normalisation de B relativement à X.*

Démonstration. Voir ([Stacks],37.53.4) ■

Dans le cas qui nous intéresse la base B est une courbe projective lisse, donc B' l'est aussi. Dès lors pour l'étude de la conjecture de Kimura-O'Sullivan, on peut se restreindre à l'étude du morphisme f'. On peut donc rajouter une hypothèse supplémentaire dans la définition des fibrations.

Cadre. *On suppose désormais que les fibrations sont en outre à fibres connexes, ce qui équivaut au fait qu'elles vérifient $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_B$.*

L'avantage des fibrations est d'autoriser des fibres singulières, mais avant cela il faudrait vérifier que la plupart des fibres sont lisses. Sur X on peut définir le fermé X' d'équation $\{d_x f = 0\}$ et les fibres singulières sont celles qui intersectent cet ensemble. Dès lors les fibres singulières sont au dessus de l'image de X'. Celle ci étant un fermé algébrique, il faudrait vérifier que celui ci est de dimension plus petite que celle de S. Le résultat suivant vérifie ce dernier point.

Proposition 5.2.9. *f est génériquement lisse.*

Démonstration. Voir ([6], III.10.7). ■

Comme la lissité implique la platitude, on en déduit que f est plat sur le lieu où il est lisse dans X. Dans certains cas on peut améliorer ce résultat.

Proposition 5.2.10. *Si la base de f est une courbe alors f est plat. En particulier le polynôme de Hilbert est constant le long des fibres.*

Démonstration. C'est un cas particulier de ([6], III.9.7). ■

Cette hypothèse va s'appliquer en particulier lorsque X est une surface et que la fibration n'est pas triviale (c'est à dire lorsque la base n'est pas elle même une surface ou un singleton). Remarquons enfin le théorème d'Iitaka qui permet de justifier l'importance des fibrations.

Théorème 5.2.11 (Iitaka)**.** *Soit X une variété projective lisse de dimension de Kodaira $\kappa(X) > 0$. Alors il existe une base B projective lisse de dimension (comme variété complexe) $\kappa(X)$ et un morphisme $X \to B$ qui soit une fibration dont la fibre générique est lisse de dimension de Kodaira 0.*

Démonstration. Voir ([24], 2.1.33). ■

Remarque. *Ce résultat n'est intéressant que pour $\kappa(X) < \dim(X)$ car pour les variétés de type général il suffit de prendre $B = X$ avec le morphisme identité.*

Dans le cas $0 < \kappa(X) < \dim(X)$, ce théorème permet donc de ramener en partie l'étude de la variété X à celle d'une base et de fibres qui sont de dimension plus petite que que dim(X).

On voit donc que les variétés à $\kappa(X) = 1$ sont particulièrement intéressantes car leur base est une courbe ce qui permet d'appliquer les résultats de platitude. En particulier pour les surfaces de ce type la base est une courbe et les fibres aussi. De plus les fibres sont des courbes de dimension de Kodaira 0, donc des courbes elliptiques. On a donc prouvé le corollaire suivant qui vient compléter la section 5.1.2 .

Corollaire 5.2.11.1. *Toute surface S de dimension de Kodaira 1 admet une fibration elliptique.*

Signalons enfin que via le théorème d'Ehresmann, toutes les fibres lisses sont homéomorphes (car une variété complexe connexe privée d'un nombre fini de points est connexe), donc si les fibres sont des courbes, comme elles sont connexes, leur classification topologique dépend uniquement de leur genre. En revanche la structure complexe peut, et vas, varier. Le théorème suivant montre l'importance de laisser varier la structure des fibres.

Théorème 5.2.12 (Grauert-Fischer)**.** *Une famille plate lisse de variétés complexes compactes dont toutes les fibres sont isomorphes est localement triviale pour la topologie usuelle, ou pour la topologie étale.*

Démonstration. Ce théorème semble faire partie des résultats bien connus en géométrie complexe, mais nous n'avons pas réussi à en retrouver l'origine. ■

Remarque. *Il existe une version algébrique de ce théorème pour les corps qui sont des domaines universels.*

Enfin on peut se poser la question inverse, partant d'une variété X peut on restreindre la forme des fibres et celle de la base. Cette question est très riche et nous nous contenterons d'en traiter un aspect élémentaire.

Lemme 5.2.13. *Soit $f : X \longrightarrow B$ une fibration, alors $q(X) \geq q(B)$. Plus généralement on a un morphisme de structures de Hodge*

$$f^* : H^i(B, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^i(X, \mathbb{Q})$$

Démonstration. Nous nous contentons de traiter le cas projectif lisse car il est le seul dont nous aurons besoin. Pour le cas générale nous renvoyons à ([37], Lemme 1.2).

Dans notre cas particulier le lemme découle du fait général en théorie des motif que tout morphisme dominant $f : X \to B$ fait de $\mathfrak{h}(B)$ un facteur direct de $\mathfrak{h}(X)$ via f^*. Il suffit de passer à la réalisation de Hodge pour conclure ■

Exemple 5.2.2. *Une surface K3 ou une surface d'Enriques qui admet une fibration elliptique à pour base $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.*

Cadre. *A partir de maintenant $f : S \to C$ sera une fibration sur une surface avec comme base une courbe ; ces deux espaces sont supposés projectifs et lisses. Par les résultats généraux on peut donc supposer f plat et génériquement lisse.*

Exemple : Les fibrations en droites projectives Menons une étude succincte des fibrations en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Nous allons nous servir de cet exemple pour montrer la nécessite de faire apparaitre des fibres réductibles ou non réduites.

En genre 0, il n'y a qu'une seule classe d'isomorphisme pour les courbes, donc on peut en fait supposer que les fibres lisses sont isomorphes (comme variétés complexes) à $\mathbb{P}^1$.

Cadre. *Pour cette section on suppose par ailleurs que toutes les fibres lisses sont isomorphes à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.*

Nous allons maintenant montrer qu'il n'y a pas de fibre singulière qui soit réduite et irréductible.

Proposition 5.2.14. *Si C est une fibre au dessus de $c \in C$ qui est intègre alors celle ci est lisse et isomorphe à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Comme f est plate, le genre arithmétique est constant pour toutes les fibres. Or celui ci vaut 0 pour les fibres lisses car elles sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$.

Soit maintenant une fibre singulière C qui vérifie les hypothèses de l'énoncé et $\tilde{C}$ sa désingularisation. Une formule usuelle relie le genre de C et celui de $\tilde{C}$:

$$p_a(C) = p_a(\tilde{C}) + \sum_P \mathrm{len}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_{\tilde{C}})$$

Où les P sont des points de normalisation. Comme chaque terme de cette égalité est positif et que $p_a(C) = 0$, on en déduit la somme sur les points singuliers est nulle, donc il n'y a pas de point singulier. Donc C était en fait déjà lisse. ■

En revanche il doit exister des fibres réductibles ou non réduites car sinon toutes les fibres seraient lisse par la proposition suivante, et le théorème de Grauert-Fischer permettrait de se ramener au cas des fibrations.

Exemple 5.2.3. *On peut considérer la famille des hyperboles $\{xy = a\}$ et faire tendre le paramètre a vers 0. On obtient alors un croisement normal de deux copies de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Plus rigoureusement on obtient ce morphisme en projectivisant le morphisme*

$$\operatorname{Spec}\left(\frac{\mathbb{C}[x,y,z]}{(xy-z)}\right) \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[t]) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$$

donné par le morphisme d'anneau $\mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[x,y,z]/(xy-z)$ qui envoie t sur z.

Exemple 5.2.4. *Considérons $P = [0,0,0,1] \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ et la projection canonique $f : \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} - \{P\} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Soit X la courbe cubique twisté et X_a sont image par l'automorphisme de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ qui dilate d'un facteur $a \in \mathbb{C}^*$ la dernière coordonnée. Par des propriétés générales de platitude cette famille est plate sur $\mathbb{C}^*$ et on peut la compléter en une famille plate au dessus de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.*

Des calculs directes montrent que la fibre au dessus de 0 est $f(X)$ comme ensemble, donc une courbe nodale. Cependant schématiquement il y a un point immergé en le nœud, donc la courbe n'est pas réduite.

5.2.3 Fibrations elliptiques

L'étude des fibrations rationnelles était assez limité du fait que les fibres lisses étaient toutes isomorphes. Nous allons maintenant étudier plus en détail les fibrations elliptiques. Celles si sont plus intéressantes car elle permettent d'avoir des fibres difféomorphes non isomorphes.

Définition 5.2.5. *Un fibration est dite elliptique si toutes ses fibres lisses sont des courbes elliptiques. Autrement dit la fibre au dessus du point générique est une courbe elliptique sur le corps des fonctions.*

Comme nous l'avons vu avec le théorème d'Iitaka, toutes les surfaces de dimension de Kodaira 1 admettent une fibration elliptique. Il existe cependant des exemples de fibrations elliptiques qui sont de dimension de Kodaira plus petite.

Exemple 5.2.5. *Les F-fibrés où F est une courbe elliptique sont des fibrations elliptiques. C'est par exemple le cas des surfaces bielliptiques.*

Exemple 5.2.6. *Certaines surfaces K3 peuvent admettre une fibration elliptique. Par les arguments que nous avons évoqué précédemment cela ne peut se faire que pour $C = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.*

C'est de plus toujours le cas dès que $\rho(S) \geq 5$, tout en restant possible pour certaines surfaces de nombre de Picard plus petit.

Le dernier exemple est plus important car il sera un cas d'application de notre étude de la conjecture de Kimura-O'Sullivan.

Proposition 5.2.15. *Tout surface d'Enriques admet une fibration elliptique.*

Démonstration. Voir ([30], 2.3.4). ■

Comme les courbes elliptiques sont des groupes, il est naturel d'espérer produire une section de f en considérant l'application qui a un point associe le 0 de sa fibre. Cependant il faut se rappeler à ce moment que la loi de groupe sur les courbes elliptiques n'est pas canonique : les courbes de genre 1 ne sont pas des groupes abéliens mais plutôt des torseurs sur des groupes abéliens. En réalité le groupe naturel a considérer est la jacobienne d'une courbe de genre 1.

Il est donc naturel de vouloir remplacer une fibration elliptique par la fibration dont chaque fibre est la jacobienne de la fibration précédente. Dans ce cas on aura bien une section de la fibration. Nous allons décrire cette construction et voir comment celle ci se traduit en terme de motif.

Lemme 5.2.16. *Il existe une fibration elliptique J sur C qui admet une section et telle que sa fibre générique soit la jacobienne de la fibre générique de S. Celle ci est appelée la fibration jacobienne associée à $S \to C$.*

Démonstration. Notons η le point générique de C. et S_η la fibre générique de $S \to C$. Celle ci est une courbe elliptique sur $\mathbb{C}(\eta) = K$ qui n'est pas un corps algébriquement clos. Pour autant nous pouvons tout de même considérer une compactification régulière J_η de $\mathrm{Pic}(S_\eta)$. On a donc

$$J_\eta \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times C$$

On pose alors J la clôture schématique de l'image de ce morphisme. On a donc clairement un morphisme plat $J \to C$ de fibre générique J_η. Sur $\mathbb{C}$ la résolution des singularités étant possible, on peut désingulariser et blow-down pour se ramener au cas où $J \to C$ est bien une fibration elliptique. Grâce au 0 de la jacobienne on obtient bien une section (la preuve complète passe par des modèles de Néron). ■

Notation. *Dans toute la suite de cette section J se réfèrera à la fibration jacobienne associée à S.*

Nous allons maintenant utiliser ce procédé pour générer des cas de fibrations elliptiques qui vérifient la conjecture de Kimura-O'Sullivan. Commençons par déterminer le motif de J.

Théorème 5.2.17 (Kawabe)**.** *On a un isomorphisme de motifs*

$$\mathfrak{h}(J) \simeq \mathfrak{h}(S).$$

Démonstration. Voir [38]. ■

Dès lors pour montrer que le motif de S est de dimension finie, il suffit que ce soit le cas pour celui de J. Nous allons maintenant utiliser une propriété légèrement contre intuitive. Le motif d'une variété n'est pas un invariant total donc certaines quantités ne sont pas préservées dans le passage de S à J. C'est en particulier le cas de la dimension de Kodaira. Comme les variétés de faible dimension de Kodaira sont généralement plus faciles à étudier, nous pouvons espérer qu'en remplaçant X par J on fasse baisser cette dimension et dès lors il sera plus facile de vérifier la conjecture de Kimura-O'Sullivan.

Rappelons qu'en genre 0 la conjecture de Kimura-O'Sullivan est équivalente à la conjecture de Bloch. La preuve qui suit résume les idées de l'article [38]. L'avantage de cette preuve est qu'elle se généralise directement à des fibrations elliptiques en caractéristique finie (remarquons qu'en caractéristique 2 ou 3 il peut arriver que la fibre générique ne soit pas lisse, il faut alors rajouter cet élément dans la définition d'une fibration elliptique).

Théorème 5.2.18. *Si $\kappa(S) \leq 1$ et $p_g(S) = 0$ alors S satisfait la conjecture de Bloch.*

Démonstration. Rappelons d'abord une formule utile sur la fibration jacobienne. Soit S une surface elliptique et $J \to C$ sa surface jacobienne. On pose

$$\lambda = 2p_g(C) - 2 + \chi(\mathcal{O}_S).$$

En particulier dans le cas $p_g(S) = 0$ cette quantité se simplifie en

$$\lambda = 2q(C) - 1 - q(S).$$

Par ailleurs rappelons que $q(C) \leq q(S)$. On a ensuite une trichotomie

- $\lambda < 0$ si et seulement si $\kappa(J) = -\infty$.
- $\lambda = 0$ si et seulement si $\kappa(J) = 0$.
- $\lambda > 0$ si et seulement si $\kappa(J) = 1$.

La preuve qui suit repose ensuite sur le théorème de classification des surfaces.

- Si $\kappa(S) = -\infty$ alors S est birationnellement équivalent à un produit de courbes, donc le résultat est immédiat.
- Si $\kappa(S) = 0$, comme S est de genre 0 alors S est soit bielliptique soit d'Enriques. Dans le premier cas elle est dominée par un produit de courbes elliptiques, donc son motif est bien de dimension finie. Dans le second cas S admet une fibration elliptique et $q(S) = 0$ donc $q(C) = 0$. Dès lors on a $\lambda < 0$ et donc J est de dimension de Kodaira $-\infty$. Comme le genre géométrique est un invariant entre J et S on en déduit que le motif de J est de dimension finie grâce au cas précédent. Comme J et S ont le même motif on peut alors conclure.
- Si $\kappa(S) = 1$ alors S admet une fibration. De plus dans ce cas K_X est numériquement trivial donc la formule de Noether-Lefschetz donne $10 - 8q(S) = b_2 \geq 0$. Dès lors on a $q(S) \leq 1$. Dès lors un calcul explicite assure que $\lambda \leq 0$, donc $\kappa(J) \leq 0$. Les deux premiers points permettent alors de conclure.

■

Remarque. *L'invariant λ peut en fait être défini pour n'importe quelle fibration, mais il comportera un terme supplémentaire lié aux fibres multiples. Celles ci n'existant pas pour la fibration jacobienne, nous l'avons exclu de notre étude.*

Plus généralement l'égalité de Noether Lefschetz nous donne

$$10 - 8q(J) + 12p_g(J) = b^2(J) \geq h^{1,1}(J) \geq 2$$

car on a une classe de Hodge pour les fibres et une pour la section de J. Cette inégalité ainsi que $q(J) \geq g(J)$ restreignent les valeurs possibles du triplet $(p_g(S), q(S), g(C))$.

Constatons par ailleurs que pour un genre quelconque, la conjecture de Kimura-O'Sullivan est connue lorsque que $\kappa(S) \leq 0$ grâce à la classification explicite des surfaces, sauf potentiellement dans le cas des surfaces K3. Dès lors la méthode de la preuve précédente se généralise : tout triplet $(p_g(S), q(S), g(C))$ tel que $\lambda \leq 0$ donne un cas où le motif est de dimension finie (à l'exception du cas $(1, 0, 0)$ où J aurait le type d'une surface K3).

Exemple 5.2.7. *Les valeurs suivantes du triplet $(p_g(S), q(S), g(C))$ donne lieu à un motif de dimension finie :*
- $(1, 1, 0)$.
- $(1, 2, 0)$.
- $(1, 2, 1)$.
- $(2, 1, 0)$.
- $(2, 2, 0)$.
- $(2, 3, 0)$.
- $(2, 3, 1)$.

  Cette liste se poursuit et il n'y a pas de borne sur les valeurs de $p_g(S)$ et $q(S)$.

Cet exemple n'a finalement que peu d'intérêt car il n'est pas dit que l'on puisse trouver des fibrations elliptiques avec ces invariants...

5.3 Surfaces K3

Les surfaces K3 offrent une structure très étudiée de laquelle on peut espérer tirer des informations précises sur les motifs.

5.3.1 Quelques remarques générales

Faisons d'abord deux remarques générales sur la forme du motif d'une surface K3. Celui ci doit être de la forme

$$\mathbf{1} \oplus \mathfrak{h}^1(\mathrm{Pic}^0(S)) \oplus \mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S) \oplus \mathbf{1}(-1)^\rho \oplus \mathfrak{h}^1(\mathrm{Pic}^0(S))^\vee \oplus \mathbf{1}(-2).$$

Dans cette décomposition notons d'abord que l'on sait borner ρ : celui ci est plus petit que 20 pour les variétés complexes et que 22 dans le cas général. Par ailleurs la première cohomologie est simplement nulle. En effet c'est clair dans le cas complexe vu que c'est un tore formé sur $H^1(S, \mathcal{O}_S)$ qui est nulle pour une surface K3. Plus généralement sur les surfaces K3 on a un isomorphisme $\mathrm{Pic}(S) \simeq \mathrm{NS}(S)$, or le second est le quotient du premier par le groupe $\mathrm{Pic}^0(S)$, donc ce dernier est bien nul.

Finalement il ne reste que la décomposition

$$\mathbf{1} \oplus \mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S) \oplus \mathbf{1}(-1)^\rho \oplus \mathbf{1}(-2).$$

Le deuxième point est spécifique aux variétés complexes en caractéristique nulle.

Cadre. *S est une surface K3 sur un corps $k \subset \mathbb{C}$, de sorte que l'on peut prendre comme cohomologie de Weil H la cohomologie de Betti rationnelle.*

Proposition 5.3.1. *La structure de Hodge $H^2_{\mathrm{tr}}(S)$ est dans la sous catégorie Tannakienne engendrée par les structures de Hodge des variétés abéliennes.*

Démonstration. En effet la construction de Kuga-Satake donne un morphisme injectif de structure de Hodge

$$H^2_{\mathrm{tr}}(S) \hookrightarrow H^1(\mathrm{KS}(S)) \otimes H^1(\mathrm{KS}(S))$$

Comme la catégorie des structures de Hodge rationnelles polarisables est semi-simple, on en déduit que cette inclusion fait de $H^2_{\mathrm{tr}}(S)$ un facteur direct de $H^1(\mathrm{KS}(S))\otimes)H^1(\mathrm{KS}(S))$, d'où le résultat annoncé. On renvoit à ([36], 4) pour les détails de cette construction. ■

Il est donc naturel de ce demander si cette inclusion est motivique, cela permettrait en particulier de l'avoir pour n'importe quelle cohomologie de Weil. Sous des conjectures importantes du type Hodge ou Voïevodski, cela va en effet être le cas, mais on ne connait pas de réponse indépendante de ces conjectures.

Proposition 5.3.2. *Sous la conjecture de Hodge et de Voïevodski, le motif $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S)$ est découpé sur des motifs abéliens.*

Démonstration. En effet sous la conjecture de Hodge on a une correspondance algébrique qui induit le morphisme

$$H^2_{\mathrm{tr}}(S) \hookrightarrow H^1(\mathrm{KS}(S)) \otimes H^1(\mathrm{KS}(S)).$$

Sous la conjecture de Voïevodski on a en particulier la conjecture D, et donc la catégorie des motifs homologique est abélienne semi-simple. En particulier on vérifie que le morphisme de motifs homologique induit par la construction de Kuga-Satake est encore un monomorphisme car l'image par le foncteur H de son noyau est nulle et qu'il n'y a pas de motif fantôme.

Par semi-simplicité on en déduit donc une décomposition motivique

$$M \oplus \mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S) = \mathfrak{h}^1(\mathrm{KS}(S))^{\otimes 2}$$

dans la catégorie des motifs homologique. Mais sous la conjecture de Voïevodski on peut appliquer le principe de relèvement des idempotents, donc on peut relever le motif M dans la catégorie $\mathrm{CHM}(k)$. Enfin on a la conservativité du foncteur de projection du rationnel vers l'homologique, et donc on a bien

$$M \oplus \mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(S) = \mathfrak{h}^1(\mathrm{KS}(S))^{\otimes 2}$$

dans la catégorie des motifs rationnels. ■

Ainsi sous des conjectures que l'on espère vraie, le motif d'une surface K3 devrait être de type abélien. Il est donc naturel d'espérer prouver ce corollaire indépendamment des conjectures précédentes.

Remarque. *Dans ([17],7.1), André montre que le morphisme de Kuga-Satake est dans la catégorie des cycles motivés, dès lors il suffit de supposer la conjecture de Lefschetz plutôt que toute la conjecture de Hodge.*

5.3.2 Cas non triviaux

Les remarques précédentes font penser que les motifs des surfaces K3 sont de type abélien, et donc devraient vérifier la conjecture de Kimura-O'Sullivan. Cependant comme on ne sait pas prouver inconditionnellement ce résultat, il nous faut trouver des résultats détournés pour prouver que certaines surfaces K3 sont de dimension finie.

Exemple 5.3.1. *La surface K3 qui correspond à la quartique de Fermat dans $\mathbb{P}^3$ est de dimension finie car c'est une surface de Fermat.*

Un autre cas trivial (qui englobe en fait l'exemple précédent) est celui des surfaces de Kummer.

Proposition 5.3.3. *Le motif d'une surface de Kummer est de dimension finie.*

Démonstration. En effet dire que S est une surface de Kummer signifie qu'il existe une variété abélienne A telle que l'on ait

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

où $\tilde{A}$ correspond à l'éclatement le long des 16 points de 2-torsion et le morphisme $\tilde{A} \to S$ est le quotient par l'action libre d'une involution.

Comme le motif de A est de dimension finie et que l'on a éclaté des points, le motif de $\tilde{A}$ est aussi de dimension finie, le motif de S est alors facteur direct d'un motif de dimension finie, donc est aussi de dimension finie. D'où le résultat. ■

Le cas précédent n'est absolument pas général car il ne représente que des surfaces K3 de nombre de Picard $\rho \geq 17$, et même pour ces valeurs elles ne représentent pas toutes les surfaces possibles.

Nous allons maintenant traiter un cas plus subtil en suivant l'article [29]. Ce cas correspond à un nombre de Picard assez grand.

Définition 5.3.1. *Soit X une surface K3 et ι une involution de X.*

ι est dite de Nikulin si elle induit l'identité en tant qu'endomorphisme de $H^0(X, K_X)$ (qui est de dimension 1 pour une surface K3).

Sur $\mathbb{C}$ où l'on utilise la cohomologie singulière, c'est équivalent au fait que ι induise l'identité comme endomorphisme de $H^2_{\mathrm{tr}}(X)$ ou encore comme endomorphisme de $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr,\ hom}}(X)$.

Ces involutions n'existent pas toujours, on a un résultat qui contraint les surfaces X possédant une involution de Nikulin.

Cadre. *On se donne X une surface K3 projective sur $\mathbb{C}$ et H désigne la cohomologie de Betti. Par ailleurs on se donne une involution ι de X qui sera supposée de Nikulin.*

Proposition 5.3.4. *Dans les conditions du cadre, $\rho(X) \geq 9$ et ι a exactement 8 points fixes.*

Démonstration. Voir ([36],15.1.5 et 15.1.8). ■

Cette restriction ne signifie pas que toute surface K3 dont le nombre de Picard est plus grand que 9 a une involution de Nikulin. Partant d'une telle involution on peut faire la construction suivante :

- Blow-up X le long des 8 points fixes de ι pour obtenir une surface $\tilde{X}$ munie d'une involution $\tilde{\iota}$ qui est sans points fixes.
- Faire le quotient $Y = \tilde{X}/\tilde{\iota}$. Comme l'action de $\tilde{\iota}$ est sans points fixes, la surface Y est projective lisse.

En résumé on a

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r] \arrow[d] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

Par des arguments que nous avons déjà répété plusieurs fois, on en déduit que $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(Y)$ est facteur direct de $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(X)$. Partant de X une surface K3, il est naturel de se demander si Y en est aussi une, ou si c'est un autre type de variété.

Comme Y n'est pas forcément minimale, il n'est pas nécessaire que ce soit une surface K3, il faut donc plutôt se demander si son modèle minimal est une surface K3, ce passage ne changeant rien au motif $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(Y)$.

Lemme 5.3.5. *Le modèle minimal de Y est une surface K3.*

Démonstration. Calculons les nombres de Hodge de Y. Rappelons que ceux de X sont totalement déterminés par le fait d'être une surface K3. En passant au blow-up, on a donc pour $\tilde{X}$.

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 28 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Dès lors on trouve les nombres de Hodge de Y en prenant les parties fixés dans chaque sous groupe $H^{p,q}$ par l'action de $\tilde{\iota}$. Mais par hypothèse ι agit trivialement sur $H^0(X, K_X)$, donc les nombres de Hodge de Y (et donc de son modèle minimal) sont

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & * & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Enfin Y est de dimension de Kodaira ≤ 0 (c'est un invariant birationnel donc $\kappa(\tilde{X}) = \kappa(X)$ et l'action par un quotient ne peut que la faire baisser car on prend des sous espaces vectoriels), donc parmi les modèles minimaux de dimension ≤ 0, il n'y a que les $K3$ qui ont un diamant de cette forme, en effet :

- Les surfaces réglées vérifient $p_g = 1$ seulement si $h^{1,0} = 1$.
- Les surfaces d'Enriques vérifient $p_g = 0$.
- Les surfaces abéliennes ou bielliptiques vérifient $h^{1,0} \neq 0$.

On a donc prouvé le résultat.

■

Cadre. *On fixe maintenant la surface Y issue de la construction précédente, quitte à la confondre avec son modèle minimal, on supposera de plus de c'est une surface K3.*

Pour montrer que le motif de X est de dimension finie, on peut espérer tomber sur une surface Y qui soit de dimension finie, par exemple une surface de Kummer grâce à la proposition 5.3.3, ne pas perdre trop d'information entre X et Y.

Définition 5.3.2. *Si Y est une surface de Kummer, on dit que X admet une structure de Shioda-Inose.*

Notation. *Dans le cas où X admet une structure de Shioda-Inose, on note A la surface abélienne associée à Y.*

Commençons par remarquer que ce type de structure est assez rare parmi les surfaces K3.

Proposition 5.3.6. *Si X admet une structure de Shioda-Inose, alors on a un isomorphisme de réseau polarisé $T_X \simeq T_A$.*

Démonstration. Voir ([8], 6.3). ■

Corollaire 5.3.6.1. *Si X admet une structure de Shioda-Inose, alors $\rho(X) \geq 17$.*

Démonstration. En effet sur une surface abélienne le réseau T_A a pour signature $(2, 4 - \rho(A))$, et sur une surface K3, la signature est $(2, 20 - \rho(X))$. Grâce à l'isomorphisme précédent, on a donc $\rho(X) = 16 + \rho(A)$. Or pour une variété algébrique on a $\rho(A) \geq 1$, d'où l'inégalité voulue.

■

Rappelons ensuite que l'on a $H^2(A, \mathbb{Z}) \simeq U^3$ où U est le plan hyperbolique. Évidemment on a une injection primitive $T_A \hookrightarrow H^2(A, Z)$. Dès lors pour X avec une structure de Shioda-Inose, on a $T_X \hookrightarrow U^3$. Dès arguments de théorie des réseaux permettent alors de prouver le théorème suivant.

Théorème 5.3.7. *Pour X une surface K3 on a selon le nombre de Picard :*

- *Si $\rho(X) \geq 19$, alors X a une structure de Shioda-Inose (rappelons que $\rho(X) \leq 20$).*
- *Si $\rho(X) = 18$ alors X admet une structure de Shioda-Inose si et seulement s'il existe une réseau quadratique T' tel que $T_X \simeq U \oplus T'$.*
- *Si $\rho(X) = 17$ alors X admet une structure de Shioda-Inose si et seulement s'il existe une réseau quadratique T' tel que $T_X \simeq U^2 \oplus T'$.*

Démonstration. Voir ([8].4). ■

En particulier on observe que la partie transcendante de la cohomologie d'une surface K3 qui admet une structure de Shioda-Inose est découpée sur des structures de Hodge de variété abélienne. Nous allons remonter ce résultat dans la catégorie des motifs.

Pour ne pas nous alourdir avec des hypothèses supplémentaires, nous ne traiterons que le cas $\rho(X) \geq 19$.

Théorème 5.3.8 (Pedrini)**.** *Si $\rho(X) \geq 19$, alors le motif $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(X)$ est découpé sur des variétés abéliennes, et donc de dimension finie.*

Démonstration. En effet on sait que $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(X)$ admet $\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(Y)$ comme facteur direct :

$$\mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(X) = \mathfrak{h}^2_{\mathrm{tr}}(Y) \oplus N.$$

Il suffit de montrer que le motif N est nul. Or Voisin prouve dans [31] que l'involution ι a une action nulle sur le groupe $\mathrm{CH}^2(X)$. On en déduit que $N = 0$ par ([29], Corollaire 1), ce qui conclu notre preuve.

■

Remarque. *Dans [8], on trouve des conditions sur le réseau T_X pour que X soit une surface de Kummer, on constate que celles-ci sont plus restrictives que celles pour avoir une structure de Shioda-Inose, on a donc bien obtenu de nouveaux cas.*

A Représentations du groupe symmétrique

Dans cette annexe on rappelle quelques résultats sur le groupe symétrique. Ceux ci sont issus de l'algèbre élémentaire et de la théorie des représentations. Leur preuve n'utilisent absolument pas de géométrie algébrique, donc nous ne les évoquerons pas. Des référence standards sont les livres [11] et [18] de Fulton.

1.1 Généralités

Définition 1.1.1. *Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est le groupe des bijections de l'ensemble fini $\{1, \cdots, n\}$.*

On dispose de plusieurs présentations par générateurs-relations de ce groupe, l'une d'entre elle nous sera utile.

Proposition 1.1.1. *On note $t_i = (i, i+1)$ les permutations élémentaires pour $1 \leq i \leq n-1$. On a alors la présentation de $\mathfrak{S}_n$:*

$$\mathfrak{S}_n =< t_1, \cdots, t_{n-1} \mid t_i^2 = 1,\ (t_i t_j)^2 = 1 \text{ pour } |i-j| > 1,\ (t_i t_j)^3 = 1 \text{ sinon} >$$

Par ailleurs faisons un rappel sur la théorie des représentations. Si on se donne un corps F, une représentation de $\mathfrak{S}_n$ dans un F espace vectoriel est équivalente à la donnée d'un morphisme d'algèbre $F[\mathfrak{S}_n] \to \mathrm{End}_F(M)$ où M est un espace vectoriel.

Cadre. *On suppose dans la suite de cette partie que le corps F est de caractéristique nulle.*

On a alors une classification simple des représentations de $\mathfrak{S}_n$ à coefficients dans F.

Proposition 1.1.2. *Les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ sont en bijection naturelle avec les partitions λ de n.*

En particulier par le lemme de Schur on en déduit une décomposition canonique

$$F[\mathfrak{S}_n] = \bigoplus_\lambda \mathrm{End}(V_\lambda)$$

Où chaque V_λ est la représentation irréductible associée à λ. Dès lors en prenant la classe valant l'identité sur $\mathrm{End}(V_\lambda)$ et 0 ailleurs, on e déduit des éléments canoniques e_λ qui vérifient trivialement la proposition suivante.

Proposition 1.1.3. *Les éléments e_λ forment un système complet d'idempotents orthogonaux dans $F[\mathfrak{S}_n]$.*

Pour notre étude, deux d'entre eux sont particulièrement importants.

Exemple 1.1.1. *On a deux éléments canoniques*

$$e_{(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma,\ e_{(1,\cdots,1)} = e_{1_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma$$

Voyons ensuite une relation sur ces deux éléments qui nous sera utile.

Proposition 1.1.4. *Via l'inclusion $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_{n+1}$, il existe un élément r de $F[\mathfrak{S}_{n+1}]$ tel que*

$$e_{(n+1)} = r \cdot e_{(n)},\ e_{(1_{n+1})} = -r \cdot e_{(1_n)}$$

Démonstration. On note $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1}$ des représentants de l'ensemble quotient $\mathfrak{S}_n / \mathfrak{S}_{n+1}$. On pose ensuite

$$r = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i$$

et un simple calcul montre que cet élément convient pour la première égalité.

Pour la seconde il faut prendre en compte la signature des σ_i. Or on peut prendre comme représentants les $\sigma_i = (i, n+1)$ qui sont tous de signature négative. Donc $-r$ convient pour la seconde égalité. ∎

Enfin rappelons quelques formules utiles. Pour cela il faut introduire des coefficients.

1.2 Combinatoire des partitions d'entiers

Dans l'algèbre $F[\mathfrak{S}_n]$ on a identifié des élements c_λ qui forment une décomposition de l'identité. Dès lors il est naturel de vouloir exprimer la loi de produit sur cette base plutot que sur celle des e_σ.

Définition 1.2.1. *Soit n_1 et n_2 deux entiers tels que $n_1 + n_2 = n$. On a des éléments c_μ et c_ν associés à des partitions μ et ν qui sont dans $F[\mathfrak{S}_{n_1}]$ et $F[\mathfrak{S}_{n_2}]$. Via l'inclusion canonique $\mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \subset \mathfrak{S}_n$, on peut donc voir ces éléments dans $F[\mathfrak{S}_n]$.*

Dès lors dans l'écriture

$$c_\mu \cdot c_\nu = \sum_\lambda N_{\mu\nu}^\lambda c_\lambda$$

les coefficients $N_{\mu\nu}^\lambda$ sont dit de Littlewood-Richardson.

Ces coefficients sont utiles car leur combinatoire est bien connue et on dispose de certaines règles pour les calculer. Remarquons en une qui nous sera très utile par la suite.

Lemme 1.2.1. *$N_{\mu\nu}^\lambda = 0$ sauf si $\mu, \nu \subset \lambda$.*

On peut utiliser ces coefficients pour calculer de nombreuses relations de compatibilités. Rappelons qu'une représentation n'est rien d'autre qu'un morphisme d'algèbre $F[\mathfrak{S}_n] \to A$.

Comme les c_λ forment une décomposition de l'unité dans $F[\mathfrak{S}_n]$, c'est aussi le cas de leur image dans A. Par ailleurs il est bien connu qu'une somme d'idempotents orthogonaux induit une décomposition de A en produit d'anneaux.

Définition 1.2.2. *On pose $S_\lambda(A)$ l'anneau induit par c_λ dans la décomposition de A.*

Notation. *Pour $\lambda = (n)$ on notera plutôt $S^n A$, et pour $\lambda = (1_n)$ on note $\bigwedge^n A$.*

Dès lors on dispose de formules pour calculer des opérations usuelles sur ces anneaux.

Théorème 1.2.2. *Pour λ une partition de n, on a les égalités suivantes*

- $S_\mu(A) \otimes S_\nu(A) = \bigoplus_{\lambda, |\lambda| = |\mu| + |\nu|} S_\lambda(A)^{N_{\mu\nu}^\lambda}$.
- $S_\lambda(A \times B) = \bigoplus_{\mu,\nu,|\lambda| = |\mu| + |\nu|} (S_\mu(A) \otimes S_\nu(B))^{N_{\mu\nu}^\lambda}$.
- $S_\lambda(A \otimes B) = \bigoplus_{\mu,\nu,|\lambda| = |\mu| = |\nu|} (S_\mu(A) \otimes S_\nu(B))^{[V_\mu \otimes V_\nu : V_\lambda]}$.
- *Si $\lambda \subset \mu$ alors $S_\lambda(A) = 0$ implique que $S_\nu(A) = 0$.*

Où $[V_\mu \otimes V_\nu : V_\lambda]$ est la multiplicité de V_λ dans la représentation $V_\mu \otimes V_\nu$.

Remarque. *Le premier point est presque directement la définition des coefficients $N_{\mu\nu}^\lambda$ et le dernier généralise la proposition 1.1.4.*

En particulier on peut calculer les coefficients $N_{\mu\nu}^\lambda$ pour $\lambda = (n)$ ou $\lambda = (1_n)$ et en déduire des formules simplifiées.

Proposition 1.2.3. *Pour nos deux partitions spéciales on a les valeurs spéciales suivantes*

- *Pour $\lambda = (n)$, $\mu = (k)$, $\nu = (n-k)$ on a $N_{\mu,\nu}^\lambda = 1$.*
- *Pour $\lambda = (1_n)$, $\mu = (1_k)$, $\nu = (1_{n-k})$ on a $N_{\mu,\nu}^\lambda = 1$.*

En combinant ce calcul avec le résultat du lemme 1.2.1 on a donc un calcul complet des symboles $N_{\mu,\nu}^\lambda$ lorsque $\lambda = (n)$ ou $\lambda = (1_n)$ car il est clair que les seuls partitions que l'on peut inclure dedans sont celles que l'on a étudié dans la proposition.

Remarque. *Attention cependant, il existe d'autres λ pour lesquels le coefficient $N_{\mu\nu}^\lambda$ est non nul lorsque $\mu = (k)$ et $\nu = (n-k)$.*

Enfin utilisons un lemme technique.

Lemme 1.2.4 (Kimura)**.** *Soit λ une partition de q un entier supérieur ou égal à n, alors*

- *Si $S^{n+1}A = 0$ et $\lambda_1 > n$, alors $S_\lambda(A) = 0$.*
- *Si $\bigwedge^{n+1} A = 0$ et $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors $S_\lambda(A) = 0$.*

B Action d'un groupe sur un schéma

Nous rappelons ici quelques résultats sur la théorie géométrique des invariants. La source principale est le livre de Mumford ([16]). Ces résultats seront utilisé de divers manières dans ces notes.

2.1 Définitions élémentaires

L'objectif est de donner un sens à la notion d'action de groupe sur un schéma, puis de définir une notion de quotient.

Définition 2.1.1.
- *Soit k un un corps. Un groupe algébrique est un objet en groupe dans la catégorie des schémas de type fini sur k. On notera m le morphisme de multiplication, ϵ le morphisme de l'élément neutre et ι le morphisme d'inversion.*
- *Étant donné un groupe algébrique G sur k et X un k-schéma de type fini, une action de G sur X est un morphisme*
$$G \times X \xrightarrow{a} X$$
dans la catégorie des k-schémas qui fait commuter les deux diagrammes suivants.
$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "m\times \mathrm{Id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_X \times a"'] & G \times X \arrow[d, "a"] \\ G \times X \arrow[r, "a"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\epsilon\times \mathrm{Id}_X"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_X"'] & G \times X \arrow[d, "a"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Ces définitions sont satisfaisantes car en prenant les R points pour R une k-algèbre de type fini, on obtient un groupe et une action de groupe dans le sens usuel.

Cadre. *On se donne pour toute cette annexe un corps k et un groupe algébrique G agissant sur un schéma X dans la catégorie des k-schémas. Tous les morphismes que nous considèrerons seront dans cette catégorie.*

La notion de quotient est en revanche plus compliquée car il y a plusieurs définitions possibles.

Définition 2.1.2. *Un morphisme $X \to Y$ est dit G-invariant s'il fait commuter le diagramme suivant.*
$$G \times X \underset{\mathrm{pr}_2}{\overset{a}{\rightrightarrows}} X \longrightarrow Y$$
On dispose alors des notions suivantes de quotient :
- *Un morphisme G-invariant est un quotient catégorique s'il est initial pour cette propriété.*
- *Un morphisme φ est un bon quotient s'il est G-invariant, affine, surjectif et si $\mathcal{O}_Y \simeq \varphi_* \mathcal{O}_X^G$.*
- *φ est un quotient géométrique si c'est un bon quotient et si pour tout point géométrique $y \in Y(\Omega)$, sa fibre est exactement une orbite de l'action de $G(\Omega)$ sur $X(\Omega)$.*

Dans ces situations on note $X/_cG, X/_bG$ ou $X/_gG$ le quotient associé. S'il n'y a pas de risque de confusion sur le quotient considéré, on notera simplement X/G.

La propriété de quotient géométrique est la plus souhaitable. Cependant comme les fibres au dessus des points fermés de Y doivent être fermées et qu'elles sont alors des orbites, on en déduit que les orbites dans X des points fermés de X doivent être fermées pour qu'un tel quotient existe.

Cette condition n'est pas inconditionnellement vérifiée comme le montre l'exemple suivant. En particulier il existe des actions où il n'est pas possible d'avoir un quotient géométrique.

Exemple 2.1.1. *Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ agit sur $\mathbb{A}_k^1$ par multiplication. Cette action possède deux fibres : $\{0\}$ et $\mathbb{A}_k^1 - \{0\}$. La deuxième orbite est ouverte. Donc il n'est pas possible de former un quotient géométrique pour cette action.*

Dès lors il n'est pas toujours possible de former des quotients géométriques et il faut se restreindre à la recherche de bon quotients. Cependant il existe un cas particulier qui sera celui le plus important pour notre étude.

Proposition 2.1.1. *Si G est fini, alors tout bon quotient est un quotient géométrique.*

Démonstration. En effet dans ce cas les orbites sont évidemment fermées car elles sont composées d'un nombre fini de points fermés. ■

Passons à la dernière définition importante pour les représentations de G.

Définition 2.1.3. *G est linéairement réductif si tout G module de dimension finie V est semi-simple.*

Exemple 2.1.2. *Un groupe fini de cardinal premier à la caractéristique de k est linéairement réductif. En effet on peut dans ce cas construire des projecteur en sommant toutes les actions des éléments de g et en normalisant par $|G|$, donc on a des supplémentaires.*

Remarque. *Dans la définition d'un bon quotient il faut normalement rajouter la propriété suivante : pour tous fermés disjoints Z_1 et Z_2 de X qui sont G-invariants, les adhérences de leurs images par φ sont encore disjointes.*

Cependant cette condition découle des autres axiomes si le groupe G est linéairement réductif. Comme nous utiliserons les résultats de cette annexe uniquement dans ce cas particulier, nous pouvons donc omettre cet axiome.

Terminons par la dernière définition importante.

Définition 2.1.4. *G est dit linéaire s'il existe une immersion fermée de G dans GL_n.*

Exemple 2.1.3. *Les groupes finis sont linéaires.*

Maintenant que nous avons défini toutes les possibilités de quotient, il faut chercher des conditions pour assurer leur existence. Contrairement au cas de la théorie ensembliste ou topologique, il n'est pas toujours évident qu'un quotient existe en tant que schéma. Parmi toutes les notions de quotient, on voudrait idéalement obtenir un quotient géometrique, ou au pire un bon quotient.

2.2 Le cas affine

Commençons par traiter le cas affine.

Théorème 2.2.1 (Mumford)**.** *Si $X = \mathrm{Spec}(R)$ est un schéma affine et que G est lisse et linéairement réductif, alors R^G est une k-algèbre de type fini et $X \to \mathrm{Spec}(R^G) = Y$ est un bon quotient. En particulier si G est fini c'est un quotient géométrique grâce à la proposition 2.1.1*

En particulier si k est de caractéristique nulle, tous les groupes finis sont lisses et linéairement réductifs, donc on peut toujours former des quotient géométriques pour leur action sur des schémas affines.
Dans le cas fini on a en fait un résultat plus général qui sera utile pour la section suivante.

Théorème 2.2.2. *Si G est fini, un quotient géométrique existe si et seulement si X peut être recouvert par des ouverts affines G-invariants.*

Démonstration. Voir ([3], V.1.8). ■

En particulier on retrouve le théorème 2.2.1.

Théorème 2.2.3. *Soit $k'|k$ une extension finie galoisienne de groupe de Galois G. Le foncteur*

$$A \longrightarrow A \otimes_k k'$$

induit une équivalence de catégories entre la catégorie des k-algèbres et la catégorie des k'-algèbres avec une G-action où chaque $\sigma \in G$ agit σ-linéairement. Son inverse est donnée par le foncteur

$$B \longrightarrow B^G$$

Démonstration. Étant donné B une k'-algèbre munie d'une action de G où chaque élément σ est σ-linéaire, montrons d'abord que $B = B^G \times_k k'$. Pour cela on prend $e_1, \cdots, e_n$ une k-base de k'. On veut montrer qu'il existe un ensemble $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ constitué d'éléments de B^G tel que $\{e_i x_\alpha\}$ forme une base de B sur k. Par lemme de Zorn donnons nous un système maximal d'éléments x_α tel que l'ensemble des $e_i x_\alpha$ forme une famille libre. Si ce n'est pas une base alors cela induit une sous algèbre G-invariante de B. Soit $x \in B$ qui n'est pas dans cette sous algèbre. Pour $e \in k'$ on a

$$\sum_{\sigma \in G} \sigma(e \cdot x) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(e) \cdot \sigma(x).$$

Mais par indépendance des caractères sur un groupe fini, la matrice suivante est inversible

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(e_1) & \cdots & \sigma_1(e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n(e_1) & \cdots & \sigma_n(e_n) \end{pmatrix}$$

Dès lors il existe un $e \in k'$ tel que

$$x_\beta = \sum_{\sigma \in G} \sigma(e) \cdot \sigma(x)$$

ne soit pas dans l'espace vectoriel engendré par les $e_i x_\alpha$.

Ainsi si on rajoute x_β à notre système, on voit qu'il n'est pas maximal. D'où le fait que la famille est génératrice quand on la prend maximal, et donc $B^G \otimes_k k' = B$.

Montrons maintenant la pleine fidélité. Soit $r : A \longrightarrow C$ un morphisme de k-algèbre, et r' son extension à k'. Par construction r' fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "\sigma"'] & C' \arrow[d, "\sigma"] \\ A' \arrow[r, "r'"'] & C' \end{tikzcd}$$

pour $\sigma \in G$. Réciproquement si on se donne un morphisme qui fait commuter ce diagramme, il passe à la partie invariante. Mais comme ${A'}^G = A$ on en déduit un morphisme $A \to C$. Il est alors clair que ces constructions sont inverses l'une de l'autre d'où le résultat. ■

Appliquons ce théorème à des questions de quotient par des groupes de Galois.

Proposition 2.2.4. *Soit X une variété affine de type fini sur un corps k, $k'|k$ une extension galoisienne de groupe de Galois G et X' l'extension de X à k'. Alors $X'/G \simeq X$.*

Démonstration. Le théorème 2.2.2 assure l'existence du quotient géométrique X'/G, et il doit s'agir du spectre de l'anneau affine des invariants. On est donc ramené à une question purement algébrique : si A est une k-algèbre de type fini alors $(A \otimes k')^G = A$. Cette égalité est alors précisément le résultat du théorème précédent. ■

Remarque. *Il existe bien d'autres équivalences de catégories similaires à celle du théorème 2.2.3. Leur traduction géométrique donne beaucoup d'informations sur la théorie des faisceaux cohérents sur X en fonction des faisceaux sur X'. On renvoie à [26] pour plus d'informations.*

2.3 Le cas projectif

Voyons enfin l'existence des quotients dans le cas où X est une variété projective. Dans ce cas on voudrait que le quotient soit aussi une variété projective. Vérifions d'abord que le quotient existe en nous restreignant au cas où G est fini.

Cadre. *Outre les hypothèses que l'on a fait précédemment sur X et G, on suppose désormais que le corps k est infini et que le groupe G est fini.*

Proposition 2.3.1. *Si X une variété quasi-projective, alors il existe un quotient géométrique.*

Démonstration. On se donne un point fermé $x \in X$ et $\mathcal{O}$ son orbite sous l'action de G. Comme X est quasi projective, il existe un ouvert affine U qui contient $\mathcal{O}$: il suffit de prendre le complémentaire d'un hyperplan qui ne rencontre pas $\mathcal{O}$, ce qui est possible car cet ensemble est fini et le corps k est infini.

Dès lors on pose $V_x = \bigcap_{\sigma \in G} \sigma \cdot U$. Cet ensemble est ouvert comme intersection d'ouverts, G-invariant par construction, et affine car les $\sigma \cdot U$ sont affines et que la variété X est séparée. Par ailleurs V_x est non vide car il contient $\mathcal{O}$ par construction.

On remarque ensuite que comme X est quasi-projective, tout point se spécialise en un point fermé, et donc les V_x construit précédemment forment un recouvrement de X par des ouverts affines G-invariants. On peut alors appliquer le théorème 2.2.2 pour conclure. ■

Étudions maintenant la forme géométrique du quotient X/G.

Proposition 2.3.2. *Si X est quasi-projective alors le quotient X/G l'est aussi, et si X est projective alors X/G est projective.*

On a donc bien obtenu un quotient projectif.

Remarque. *En revanche même si X est lisse, il n'y a aucune raison pour que X/G soit lisse, et de fait cela ne sera pas le cas dans les exemples qui suivent.*

On a cependant un critère sur l'action G qui assure la lissité du quotient.

Définition 2.3.1. *L'action $a : G \times X \to X$ est libre si le morphisme*

$$G \times X \xrightarrow{a \times \mathrm{pr}_2} X \times X$$

est un monomorphisme.

Proposition 2.3.3. *Si l'action de G est libre sur X quasi-projectif lisse, alors X/G est lisse.*

Finissons par quelques exemples qui reviennent de nombreuses fois dans ces notes.

Exemple 2.3.1. *Si X est une variété quasi-projective alors $\mathfrak{S}_n$ agit sur X^n par permutation des facteurs, on obtient un quotient $X/\mathfrak{S}_n$ qui représente les n-uplets non ordonnés de X. On note S^nX ce quotient.*

Exemple 2.3.2. *Si A est une variété abélienne alors $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur A par $x \to -x$. On peut donc former le quotient A/G qui est une variété dont les singularités correspondent aux images des points de 2-torsion.*

Bien que la construction de l'espace symétrique ne donne pas une variété lisse, il existe une situation où c'est en fait le cas.

Proposition 2.3.4. *Si C est une courbe lisse, alors S^nC est lisse.*

Remarque. *On peut montrer que dans la proposition précédente si S^nX est lisse alors X est une courbe.*

Exemple 2.3.3. *Dans un cas affine on a $S^n\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^n$. Cela vient du fait que $\left(\mathbb{A}^1\right)^n = \mathbb{A}^n$ et que l'espace invariant sous l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $k[x_1, \cdots, x_n]$ est $k[y_1, \cdots, y_n]$ où les y_i sont les polynômes symétriques élémentaires. En particulier le spectre associé redonne bien l'espace affine de dimension n.*

En compactifiant cet exemple on en déduit $S^n\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^n$.

Exemple 2.3.4. *En recollant la proposition 2.2.4, on voit que si X est une variété quasi-projective sur un corps k, si $k'|k$ est une extension finie galoisienne de groupe de Galois G et si X' est l'extension de X à k', alors $X'/G = X$.*

Citons enfin un résultat important.

Proposition 2.3.5. *Soit Y une variété quasi-projective sur laquelle agit un groupe fini G, alors cette action se prolonge à $\mathrm{CH}^i(Y)$ par le poussé en avant. On a alors*

$$\mathrm{CH}^i(Y/G)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}^i(Y)^G_{\mathbb{Q}}.$$

Démonstration. Nous allons montrer que l'isomorphisme est induit par π^*, d'inverse $\omega = \frac{1}{|G|}\pi_*$ où $\pi : Y \to Y/G$ est la projection canonique.

De façon générale il est bien connu que pour un morphisme $f : X' \to X$ fini plat de degré d on a $f_*f^* = d\,\mathrm{Id}$. En appliquant cela à π on voit déjà que le morphisme est injectif et que ω est le candidat pour être son inverse. Par ailleurs il est clair que l'image réciproque d'une variété de Y/G est G-invariante, donc le morphisme π^* se factorise bien par $\mathrm{CH}^i(Y)^G$.

Remarquons que par le lemme de Schur sur les groupes finis, le foncteur $\cdot^G$ est exact à droite dans le cadre des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels. En effet si on a une application surjective $F \to H$, alors on décompose $F = F^G \oplus F'$ et $H = H^G \oplus H'$ et le morphisme induit envoie F' dans H', donc la surjectivité impose que $F^G \to H^G$ soit surjectif. Dès lors $\mathrm{CH}^i(Y)^G$ est un quotient du groupe libre $Z^i(Y)^G$, et on peut ramener la question de la surjectivité à l'espace libre des cycles, sans relation d'équivalence.

Dans ce cas si V est une variété G-invariante sur X alors on a directement

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = V.$$

Dès lors $\pi^*(\pi_*(V))$ est proportionnel à V par un entier non nul (le degré de l'extension de corps qui apparait dans la définition du poussé en avant). Comme on considère des espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$ on a donc bien la surjectivité voulue. D'où le résultat. ∎

Par l'exemple précédent cette situation s'applique en particulier pour calculer les groupes de Chow liés à des changements de corps finis galoisiens.

C Remarque sur la conservativité des groupes de Chow

L'objectif de ce mémoire était entre autre d'étudier la conservativité des foncteurs de cohomologie sur des catégories de motifs. Il aurait aussi pu être intéressant d'étudier la conservativité des foncteurs de Chow. Les quelques résultats suivant répondent à cette question et sont utilisés à de nombreuses reprises.

Dans le cas d'un corps quelconque k rappelons que le principe de Manin permet de vérifier que deux motifs sont isomorphes si et seulement si leurs groupes de Chow le sont sur tous les T-points pour T une variété projective lisse. Le résultat suivant en est un raffinement important. Intuitivement il devrait suffire de vérifier la relation sur le corps des fonctions sur la variété T. Si le corps k est assez grand, alors le corps $k(T)$ devrait être l'extension d'un sous corps de k, donc vérifier le résultat sur k devrait être suffisant.

Définition 3.0.1. *Un morphisme de motif $f : M \to N$ est dit surjectif si pour toute variété projective lisse T, l'action*

$$(f \otimes T)_* : \mathrm{CH}(M \otimes T) \to \mathrm{CH}(N \otimes T)$$

est surjective.

Théorème 3.0.1. *On à l'équivalence entre les propositions suivantes :*
- *f est surjectif.*
- *il existe un morphisme $g : N \to M$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_N$.*
- *Il existe T un facteur direct de M isomorphe à N tel que f soit isomorphe à la projection sur T.*

Démonstration. Si g est une section de f, alors f est surjectif au sens des motifs par fonctorialité du produit tensoriel et de l'action sur les groupes de Chow. Cela prouve l'implication $(2) \implies (1)$.

Réciproquement, écrivons $M = (X, p, m)$ et $N = (Y, q, n)$ et appliquons la propriété de surjectivité à $M \otimes \mathfrak{h}(Y)$. On a donc un morphisme surjectif

$$(f \otimes \mathfrak{h}(Y))_* : \mathrm{CH}(M \otimes \mathfrak{h}(Y)) \longrightarrow \mathrm{CH}(N \otimes \mathfrak{h}(Y)).$$

On a donc un cycle γ dont l'image par ce morphisme est le projecteur q. On considère alors γ comme un élément de $\mathrm{CH}(X \times Y)$, et le fait que γ soit un morphisme partant de M assure une compatibilité de ce cycle avec l'action de p. C'est à dire que l'on a

$$(p \otimes \mathfrak{h}(Y))_* \gamma = \gamma.$$

Dès lors si on considère la transposée de γ, elle vérifie $p \circ \gamma^\top = \gamma^\top$. De même si on prend une correspondance $\tilde{f}$ qui représente f, elle vérifie $q^\top = (f \otimes \mathfrak{h}(Y))_* \gamma = \gamma \circ \tilde{f}^\top$. Enfin on ne garde que la composante $\gamma_{m-n}^\top$ qui est dans $\mathrm{Corr}^0(Y, Y)$ et on pose $g = \gamma_{m-n} \circ q$ qui convient grâce aux calculs précédents. D'où $(1) \implies (2)$.

L'assertion $(3) \implies (2)$ est immédiate en prenant le morphisme canonique $T \to M$. Réciproquement on considère alors $p = g \circ f \in \mathrm{End}(M)$. celui ci est clairement un idempotent car g est une section de f. On a donc une décomposition

$$M = T \oplus T'$$

Où T' est défini par le projecteur $\mathrm{Id}_M - p$. Dès lors il est clair que f et g induisent un isomorphisme de motifs $T \simeq N$. D'où le résultat.

∎

Exemple 3.0.1. *Si X et Y sont des variétés projectives lisses et $f : X \to Y$ est un morphisme dominant, alors Γ_f induit un morphisme $\mathfrak{h}(X) \to \mathfrak{h}(Y)$ qui est surjectif au sens des motifs. En particulier $\mathfrak{h}(Y)$ est un facteur direct de $\mathfrak{h}(X)$ par le théorème précédent.*

Commençons par vérifier que cette propriété peut se tester sur une classe plus restreinte.

Lemme 3.0.2. *Si k est un domaine universel alors f_* est surjectif sur les groupes de Chow, si et seulement si $(f_K)_*$ est surjectif pour toute extension $K|k$.*

Démonstration. Commençons par le sens réciproque que nous allons prouver dans un cadre plus général où la base n'est pas un domaine universel : si $F|E$ est une extension de corps, $f : M \to N$ un morphisme de motif défini sur E tel que $(f_F)_*$ est surjectif, alors f_* est surjectif. En effet on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}(M) \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{CH}(M_F) \arrow[d, "(f_F)_*"] \\ \mathrm{CH}(N) \arrow[r, hook] & \mathrm{CH}(N_F) \end{tikzcd}$$

où par hypothèse le morphisme de droite est surjectif. Soit $\gamma \in \mathrm{CH}(N)$ et γ_F son extension à N_F. Par hypothèse il existe un cycle $\beta \in \mathrm{CH}(M_F)$ tel que $(f_F)_*(\beta) = \gamma_F$. Ce cycle β est défini sur une extension de type fini sur E, donc on peut supposer que c'est plus généralement le cas de F. Dès lors on peut supposer que F est le corps des fonctions d'une variété quasi-projective lisse Y sur E. Prenons maintenant $y \in Y$ un point fermé de corps résiduel $\kappa(y)$. On a donc une immersion fermée $\{y\} \hookrightarrow Y$ qui induit donc un morphisme de spécialisation fonctoriel et compatible à l'action des cycles

$$\sigma : \mathrm{CH}^*(X_F) \longrightarrow \mathrm{CH}^*(X_{\kappa(y)})$$

pour toute variété projective lisse X sur E. Il est alors clair que $(f_{\kappa(y)})_*(\sigma(\beta)) = \gamma_{\kappa(y)}$. On est donc ramené au cas d'une extension finie de E que l'on peut supposer galoisienne. Dans celui ci on utilise le fait que l'application norme induit un diagramme fonctoriel en X.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}(X) \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "\times[\kappa(y):E]"'] & \mathrm{CH}(X_{\kappa(y)}) \arrow[r, "N"] & \mathrm{CH}(X) \end{tikzcd}$$

Comme on considère les groupes de Chow à coefficients rationnels, on en déduit donc que $\frac{1}{[\kappa(y):E]}N(\beta)$ est bien l'antécédent voulu pour γ. D'où la réciproque.

Pour le sens direct revenons au cas où le corps de base est un domaine universel, et montrons que si f_* est surjectif, alors c'est aussi le cas des $(f_K)_*$ pour toutes les extensions $K|k$. Soit $k_0 \subset k$ un corps de définition de f, celui ci est de type fini. Par ailleurs prenons $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Supposons que K soit de même cardinalité que k, alors on peut se donner un isomorphisme $\overline{K} \simeq k$ qui vaille l'identité sur k_0. Dès lors $(f_{\overline{K}})_*$ est surjectif, et ce que nous avons prouvé précédemment montre que c'est aussi le cas de f_K.

Si maintenant K est de cardinal plus grand que k, pour un cycle spécifique $\alpha \in \mathrm{CH}(N_K)$, celui ci est défini sur un corps $K' \subset K$ qui est de type fini sur k, donc on peut se ramener au cas précédent.

■

Proposition 3.0.3. *Soit k un domaine universel et $f : M \to N$ un morphisme. Supposons que f_* est surjectif, alors f est un morphisme surjectif.*

Démonstration. Par le lemme précédent on sait que $(f_K)_*$ est surjectif pour toute extension $K|k$. La preuve qui suit vient de [28].

Écrivons $M = (X, q, m)$. Et donnons nous T une variété projective lisse sur k. En particulier q est un endomorphisme du motif $\mathfrak{h}(X)$. Notons alors $q \otimes T$ l'endomorphisme de $\mathfrak{h}(X \times T)$ induit par T. Comme q est un idempotent, on vérifie que c'est aussi le cas de $q \otimes T$.

Posons maintenant U un ouvert de T et Z son complémentaire. La suite exacte de localisation s'écrit

$$\mathrm{CH}_{e+d-i}(X \times Z) \longrightarrow \mathrm{CH}^i(X \times T) \longrightarrow \mathrm{CH}^i(X \times U) \longrightarrow 0$$

Où $e = \dim(T)$ et $d = \dim(X)$. En passant à la colimite (qui est exacte à droite) on obtient

$$\varinjlim_U \mathrm{CH}_{e+d-i}(X \times Z) \longrightarrow \mathrm{CH}^i(X \times T) \longrightarrow \mathrm{CH}^i(X_K) \longrightarrow 0$$

où $K = k(T)$. On applique ensuite les opérateurs $q \otimes T$, $q \otimes Z$ et $q \otimes K$, on obtient (qui est exacte car ?)

$$\varinjlim_U \mathrm{Im}(q \otimes Z) \longrightarrow \mathrm{Im}(q \otimes T) \longrightarrow \mathrm{CH}^i(M_K) \longrightarrow 0$$

On a donc

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_U \mathrm{CH}(M \otimes Z) \arrow[r] \arrow[d, "\varinjlim(f\otimes Z)_*"'] & \mathrm{CH}(M \otimes T) \arrow[r] \arrow[d, "(f\otimes T)_*"'] & \mathrm{CH}(M_K) \arrow[r] \arrow[d, "(f_K)_*"] & 0 \\
\varinjlim_U \mathrm{CH}(N \otimes Z) \arrow[r] & \mathrm{CH}(N \otimes T) \arrow[r] & \mathrm{CH}(N_K) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

On procède alors par récurrence sur d la dimension de T que l'on peut supposer irréductible.

- En $d = 0$ on est simplement face à f_* (où une extension finie) qui est supposé surjectif par hypothèse (ou par le lemme précédent dans le cas d'une extension finie).
- Dans le cas général l'hypothèse de récurrence assure que le morphisme vertical à gauche est surjectif, et donc une chasse dans le diagramme assure que $(f \otimes T)_*$ est surjectif.

■

On a donc bien prouvé le résultat souhaité.

Exemple 3.0.2. *Un morphisme de motifs sur $\mathbb{C}$ admet une section si et seulement si son action sur les groupes de Chow est surjective.*

Nous allons maintenant passer au cas de la relation d'isomorphisme. Celle-ci est légèrement plus compliquée car les diagrammes que l'on utilise respectent mal l'injectivité. Commençons par une remarque sur la conservativité du foncteur d'extension des scalaires sur la catégorie des motifs.

Proposition 3.0.4. *Soit $k \subset \Omega$ un domaine universel et M un motif de Chow sur k. Supposons que $\mathrm{CH}(M_\Omega) = 0$, alors $M = 0$.*

Démonstration. Écrivons $M = (X, q, m)$. Pour montrer que $M = 0$, on va appliquer le principe de Manin, on se donne donc T une variété projective lisse sur k. On utilise alors le diagramme de la preuve de la proposition 3.0.3.

$$\varinjlim_U \mathrm{Im}(q \otimes Z) \longrightarrow \mathrm{Im}(q \otimes T) \longrightarrow \mathrm{CH}^i(M_K) \longrightarrow 0$$

Comme l'extension des scalaires est injective sur les groupes de Chow et que l'on peut plonger K dans Ω, on en déduit que l'on a une surjection

$$\varinjlim_U \mathrm{Im}(q \otimes Z) \to \mathrm{CH}(M \otimes T)$$

On procède alors par récurrence sur d pour conclure. Il suffit de traiter le cas où T est irréductible.

- Si T est de dimension 0 et irréductible, c'est un point, donc on est face à $\mathrm{CH}(M)$, qui s'injecte dans $\mathrm{CH}(M_\Omega)$ qui est nul. D'où le résultat.
- Dans le cas $d \geq 1$ le terme de gauche dans la surjection précédente est nul par hypothèse de récurrence. D'où le résultat.

■

Le théorème principal est alors le suivant.

Théorème 3.0.5. *Soit $f : M \to N$ un morphisme entre deux motifs sur k, et $k \subset \Omega$ un domaine universel. On a une équivalence entre*

- *f est un isomorphisme.*
- *f_Ω est un isomorphisme.*

- $(f_\Omega)_*$ *induit un isomorphisme sur tous les groupes de Chow.*

Démonstration. Les implications $(1) \implies (2) \implies (3)$ sont élémentaires. Pour $(3) \implies (1)$, si $(f_\Omega)_*$ est un isomorphisme, c'est en particulier un morphisme surjectif, et le théorème 3.0.1 nous en donne une section g ainsi qu'une décomposition en facteur direct.

$$M = N \oplus T'$$

Mais lorsque l'on considère l'action sur le groupe de Chow dans un domaine universel, $(f_\Omega)_*$ est un isomorphisme de groupe et $(g_\Omega)_*$ en est l'inverse à droite, donc est l'inverse total. Dès lors p agit comme l'identité sur le groupe de Chow de M, et donc $\mathrm{CH}(T'_\Omega) = 0$. Par la proposition précédente on a donc $T = 0$, c'est à dire $M = T \simeq N$ via f. D'où le résultat. ∎

Exemple 3.0.3. *Si k est lui même un domaine universel (par exemple si $k = \mathbb{C}$), le théorème indique qu'un morphisme de motifs est un isomorphisme si et seulement si son action sur les groupes de Chow est un isomorphisme.*

Corollaire 3.0.5.1. *Le foncteur d'extension des scalaires sur la catégorie des motifs est conservatif. En particulier si un motif est nul sur une extension de corps, alors il est nul sur son corps de définition.*

Démonstration. Il s'agit simplement de l'équivalence entre (1) et (2) dans le théorème précédent. ∎

Bibliographie

[1] Jean-Pierre SERRE. « Morphismes universels et variété d'Albanese ». fre. In : *Séminaire Claude Chevalley* 4 (1958), p. 1-22.

[2] G.M. KELLY. « On the radical of a category ». In : *J. Austral. Math. Soc* 102 (mars 1964), p. 299-307.

[3] A. GROTHENDIECK et de REYNAUD. *Revetements etales et groupe fondamental, SGA1*. Lecture notes in mathematics. Springer, 1971.

[4] A ROITMAN. « On Γ-equivalence of zero-dimensional cycles ». In : *Mathematics of the USSR-Sbornik* 86.4 (1971), p. 557.

[5] A ROITMAN. « RATIONAL EQUIVALENCE OF ZERO-CYCLES ». In : *Mathematics of the USSR-Sbornik* 18.4 (1972), p. 571.

[6] Robin HARTSHORNE. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977. ISBN : 9780387902449.

[7] Tetsuji SHIODA et Toshiyuki KATSURA. « On Fermat varieties ». In : *Tohoku Mathematical Journal* 31.1 (1979), p. 97-115. DOI : 10.2748/tmj/1178229881.

[8] D.R. MORRISON. « On K3 surfaces with large Picard number. » In : *Inventiones mathematicae* 75 (1984), p. 105-122.

[9] Spencer BLOCH. « Algebraic cycles and higher K-theory ». In : *Advances in Mathematics* 61.3 (1986), p. 267-304. ISSN : 0001-8708.

[10] Murre DENINGER. « Motivic decomposition of abelian schemes and the Fourier transform. » In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 422 (1991), p. 201-219.

[11] W. FULTON et J. HARRIS. *Representation Theory : A First Course*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1991. ISBN : 9780387974958.

[12] Bernhard KOCK. « Chow Motif and Higher Chow Theory of G/P. » eng. In : *Manuscripta mathematica* 70.4 (1991), p. 363-372.

[13] Klaus KÜNNEMANN. « A Lefschetz decomposition for Chow motives of abelian schemes. » In : *Inventiones mathematicae* 113.1 (1993), p. 85-102.

[14] Uwe JANNSEN. « Motivic sheaves and filtrations on Chow groups ». In : (1994).

[15] JS MILNE. « Motives over finite fields ». In : (1994), p. 401-459.

[16] D. MUMFORD, J. FOGARTY et F. KIRWAN. *Geometric Invariant Theory*. Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, 3 Folge/A Series of Modern Surveys in Mathematics Series. Springer Berlin Heidelberg, 1994. ISBN : 9783540569633.

[17] Yves ANDRÉ. « Pour une théorie inconditionnelle des motifs ». fr. In : *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 83 (1996), p. 5-49.

[18] W. FULTON. *Young Tableaux : With Applications to Representation Theory and Geometry*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1997. ISBN : 9780521567244.

[19] Claire VOISIN. « The Griffiths group of a general Calabi-Yau threefold is not finitely generated ». In : *Duke Mathematical Journal* 102 (mars 2000).

[20] Yves ANDRÉ, Bruno KAHN et avec un appendice de PETER O'SULLIVAN. *Nilpotence, radicaux et structures monoidales*. 2002.

[21] Claire VOISIN. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. fre. Cours spécialisés. Paris : Société mathématique de France, 2002. ISBN : 2-85629-129-5.

[22] Yves ANDRÉ. « Motifs de dimension finie ». fre. In : *Séminaire Bourbaki* 46 (2003), p. 115-146.

[23] Y. ANDRÉ. *Une introduction aux motifs : motifs purs, motifs mixtes, périodes*. Panoramas et synthèses - Société mathématique de France. Société mathématique de France, 2004. ISBN : 9782856291641.

[24] R.K. LAZARSFELD. *Positivity in Algebraic Geometry I : Classical Setting : Line Bundles and Linear Series*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer, 2004. ISBN : 9783540225331.

[25] Shungen KIMURA. « Chow groups are finite dimensional, in some sense ». In : *Mathematische Annalen* 331 (2005), p. 173-201.

[26] Jorg JAHNEL. « The Brauer-Severi variety associated with a central simple algebra : a survey ». In : 2006.

[27] P. DELIGNE. « Catégories tannakiennes ». In : *The Grothendieck Festschrift : A Collection of Articles Written in Honor of the 60th Birthday of Alexander Grothendieck*. Sous la dir. de Pierre CARTIER et al. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 2007, p. 111-195. ISBN : 978-0-8176-4575-5. DOI : 10.1007/978-0-8176-4575-5_3.

[28] Sergey GORCHINSKIY et Vladimir GULETSKII. « Motives and representability of algebraic cycles on threefolds over a field ». In : *arXiv preprint arXiv :0806.0173* (2008).

[29] Claudio PEDRINI. *On the finite dimensionality of a K3 surface*. 2011. arXiv : 1106.1115 [math.AG].

[30] F. COSSEC. *Enriques Surfaces I*. Progress in Mathematics. Birkhauser Boston, 2012. ISBN : 9781461236962.

[31] Claire VOISIN. *Symplectic involutions of K3 surfaces act trivially on CH_0*. 2012. arXiv : 1204.6684 [math.AG].

[32] J.P. MURRE, J. NAGEL et C. PETERS. *Lectures on the Theory of Pure Motives*. University Lecture Series. American Mathematical Society, 2013. ISBN : 9780821894347.

[33] Burt TOTARO. « Hodge structures of type (n,0,...,0,n) ». In : (2014).

[34] Wolf BARTH et al. *Compact Complex Surfaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2015. ISBN : 9783642577390.

[35] Charles VIAL. *Remarks on motives of abelian type*. 2015. arXiv : 1112.1080 [math.AG].

[36] Daniel HUYBRECHTS. *Lectures on K3 Surfaces*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2016. ISBN : 9781316797259.

[Stacks] The STACKS PROJECT AUTHORS. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu. 2018.

[37] Claire VOISIN. « Fibrations in algebraic geometry and applications ». In : 56 (2021), p. 319-353.

[38] Daiki KAWABE. *Chow motives of genus one fibrations*. 2024. arXiv : 2201.06162 [math.AG].