(Co)homologie de Groupes

Mémoire M1 de recherche

Guillaume Redero
Professeur encadrant : Lie Fu

Table des matières

Chapitre 1

Espaces d'Eilenberg–MacLane

1 $K(G, 1)$

(cf. [Hat01] section 1.B)

Définition 1.1. Soit G un groupe, on appelle *premier espace d'Eilenberg–MacLane*, noté $K(G, 1)$, un espace topologique qui a G pour groupe fondamental et dont le revêtement universel est contractile.

On a un résultat d'unicité et d'existence pour les $K(G, 1)$:

Theorème 1.2. *Soit G un groupe, alors le $K(G, 1)$ est unique à équivalence d'homotopie près.*

Lemme 1.3. *Soit X un CW-complexe, Y un $K(G, 1)$, alors tout homomorphisme $\phi\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ est induit par une application continue $f\colon X \longrightarrow Y$ unique à homotopie près.*

Démonstration.

- Pour l'existence, on suppose d'abord que X est constitué d'une unique 0-cellule x_0. Soit $\phi\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$. Comme $\phi([\mathbb{1}_{x_0}]) = [\mathbb{1}_{y_0}]$, on pose $f(x_0) = y_0$ de telle sorte que $f_* = \phi$ sur $\pi_1(X^0, x_0)$.

  Chaque 1-cellules e_1 de X est rattachée à x_0, on peut donc paramétriser e_1 en un lacet basé en x_0, et dont la classe d'homotopie est ainsi élément de $\pi_1(X, x_0)$, et $\phi([e_1]) = [e_1'] \in \pi_1(Y, y_0)$. On envoie donc e_1 sur e_1' vu en tant que 1-cellule de Y, de telle sorte que $f_* = \phi$ sur $\pi_1(X^1, x_0)$.

  Soit e_2 une 2-cellule de X, qui se rattache à X^1 via une application $\psi\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow X^1$, que l'on peut voir comme un lacet de X basé en x_0. En particulier, ψ est un lacet contenu dans e_2 qui est contractile, donc ψ est homotope au chemin constant, d'où $[\psi'] := \phi([\psi]) = [\mathbb{1}_{y_0}]$. Donc il existe une 2-cellule e'_2 de Y qui se rattache à Y^1 via ψ', et on peut envoyer e_2 sur e'_2 de telle sorte que $f_* = \phi$ sur $\pi_1(X^2, x_0)$.

On suppose ensuite que l'on a construit f sur X^{n-1}, $n > 2$. Si e_n est une n-cellule de X, elle se rattache sur X^{n-1} via une application $\psi_n \colon \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X^n$. Comme $\mathbb{S}^{n-1}$ est simplement connexe, $f\psi_n \colon \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow Y$ se relève dans le revêtement universel de Y qui est contractile, donc le relèvement de $f\psi_n$ est null-homotope, et donc $f\psi_n$ aussi. Donc $f\psi_n(\mathbb{S}^{n-1})$ est contractile, i.e. il existe une n-cellule e'_n qui s'y rattache. On envoie ainsi e_n sur e'_n de telle sorte que $f_* = \phi$ sur $\pi_1(X^n,\, x_0)$.

Si X est quelconque, alors on peut trouver un arbre maximal dans X, que l'on assimile par rétraction à une 0-cellule : on se ramène ainsi au cas précédent où X est constitué d'une unique 0-cellule.

- Pour l'unicité, on suppose là-encore que X est constitué d'une unique 0-cellule x_0. Si f et g vérifient la proposition, on cherche une homotopie $H \colon X \times I \longrightarrow Y$ entre f et g. On a déjà que H est définie sur $X \times \partial I$. Ensuite, $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ et f et g sont homotopes sur X^1, définissant H sur $X^1 \times I$.

  On suppose alors que l'on a construit H sur $X^{n-1} \times I$, $n > 1$. Si e_n est une n-cellule de X, alors $e_n \times (0,\, 1)$ est une $(n+1)$-cellule de $X \times I$ sur laquelle H est bien définie, et qui se rattache sur $X^n \times I$ via une application $\Psi_n \colon \mathbb{S}^n \longrightarrow Y$. Donc $H\Psi_n$ se relève dans le revêtement universel de $X \times I$ qui est contractile, donc le relèvement de $H\Psi_n$ est null-homotope, et donc $H\Psi_n$ aussi. Donc de la même façon que tout à l'heure, on peut étendre H sur $X^n \times I$.

  Si X est quelconque, on peut se ramener comme tout à l'heure à une unique 0-cellule par rétraction d'un arbre maximal.

□

Démonstration. [Théorème 1.2]

Soient X et Y deux CW-complexes $K(G,\, 1)$ de points bases respectifs x_0 et y_0. Par définition du $K(G,\, 1)$, $\pi_1(X,\, x_0) \cong \pi_1(Y,\, y_0)$, qui est induit par des applications continues $f \colon X \longrightarrow Y$ et $g \colon Y \longrightarrow X$ par le lemme 1.3. Or $(fg)_* = f_* g_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(Y,\, y_0)}$ et $(gf)_* = f_* g_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,\, x_0)}$, donc en utilisant l'unicité dans le lemme 1.3, $fg \sim \mathrm{Id}_Y$ et $gf \sim \mathrm{Id}_X$, i.e. X et Y sont homotopiquement équivalents.

□

Theorème 1.4. *Soit G un groupe, alors un $K(G,\, 1)$ existe.*

Lemme 1.5. *Soit X un complexe simplicial muni d'une action libre de G qui permute les cellules, alors X est un revêtement de X/G.*

Démonstration.

Il suffit de montrer que l'action de G sur X est proprement discontinue. Soit $x \in X$, alors x appartient à une n-cellule σ où on a choisi n minimal. Soit $g \in G$, $g \neq e$, alors $g \cdot \sigma$ est une n-cellule différente de σ car l'action est libre, et $\sigma \cap g \cdot \sigma = \emptyset$, sinon x serait dans la $(n-1)$-cellule $\sigma \cap g \cdot \sigma$, ce qui contredirait la minimalité de n. On peut donc trouver U ouvert de X contenant x tel que $U \cap g \cdot U = \emptyset$.

□

Démonstration. [Théorème 1.4]

On considère les G-modules C_n formés à partir de l'ensemble X^n des n-cellules $[g_0, g_1, \ldots, g_n]$, où $g_i \in G$, ainsi que les applications :

$$\begin{array}{rrcl} \partial_n\colon & C_n & \longrightarrow & C_{n-1} \\ & [g_0, \ldots, g_n] & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, [g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n] \end{array}$$

(C_*, ∂) forme un complexe de chaînes du complexe simplicial X dont les n-cellules sont les éléments de X^n. X est contractile via l'homotopie :

$$\begin{array}{rrcl} h\colon & C_n & \longrightarrow & C_{n+1} \\ & [g_0, \ldots, g_n] & \longmapsto & [1, g_0, \ldots, g_n] \end{array}$$

qui relie l'identité et l'application nulle, en effet :

$$\begin{aligned} \partial h \, [g_0, \cdots, g_n] + h\partial \, [g_0, \cdots, g_n] &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \, [1, g_0, \ldots, \hat{g}_{i-1}, \ldots, g_n] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, [1, g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n] \\ &= [g_0, \ldots, g_n] + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \, [1, g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, [1, g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n] \\ &= [g_0, \ldots, g_n] \end{aligned}$$

d'où $\mathrm{Id} - 0 = \partial h + h\partial$. Par ailleurs, on a une action de G sur X par permutation des cellules : $g \cdot [g_0, \ldots, g_n] = [gg_0, \ldots, gg_n]$. L'action de G sur lui-même par translation à gauche étant libre, l'action de G sur les

n-cellules de X l'est aussi. Par le lemme 1.5, on en déduit que X est un revêtement universel de l'espace X/G, constitué de l'unique 0-cellule [1] dans la mesure où G agit transitivement sur les 0-cellules de X. Comme G agit par permutation sur la fibre de [1], il est isomorphe à $\pi_1(X/G, [1])$, et comme X est contractile, X/G est bien un $K(G, 1)$.

□

2 $K(G, n)$

On a une généralisation du $K(G, 1)$ pour les groupes d'homotopies supérieurs. (cf. [Hat01] section 4.2)

Définition 1.6. Soit G un groupe, $n \in \mathbb{N}$, on appelle *n^e espace d'Eilenberg–Maclane*, noté $K(G, n)$, un espace topologique X tel que $\pi_n(X) = G$ et pour tout $i \neq n$, $\pi_i(X) = 0$.

Remarque 1.7. On vérifie que cette définition est compatible avec celle donnée dans le cas $n = 1$. Soit X un $K(G, 1)$, Y son revêtement universel :

- On suppose que Y est contractile : soit $\gamma \colon \mathbb{S}^i \longrightarrow X$ continue, $i \geq 2$, alors γ se relève dans Y contractile, donc le relèvement de γ est null-homotope, donc γ aussi, d'où $\pi_i(X) = 0$;
- On suppose que $\forall i \geq 2$, $\pi_i(X) = 0$: soit $\gamma \colon \mathbb{S}^i \longrightarrow Y$ continue, $i \geq 2$, alors $p\gamma \in \pi_i(X)$ i.e. $p\gamma$ est null-homotope, donc γ aussi, d'où $\pi_i(Y) = 0$. Comme Y est simplement connexe, tous ses groupes d'homotopies sont triviaux, donc Y est contractile.

Remarque 1.8. Comme $\pi_n(X)$ est abélien lorsque $n \geq 2$, un $K(G, n)$ n'est défini que lorsque G est abélien.

Theorème 1.9. *Soit G un groupe abélien, alors un $K(G, n)$ existe.*

Démonstration. [idée]

On écrit $G = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}/\bigoplus_{i \in I} d_i\mathbb{Z}$. Soit $X = \bigvee_{i \in I} \mathbb{S}^n_i$, alors pour chaque $d_i \neq 0$, on rattache une $(n+1)$-cellule $e^{(i)}_{n+1}$ sur $\mathbb{S}^n_i$ via une application $\mathbb{S}^n \longrightarrow X$ de degré d_i. On obtient alors un espace X' tel que $\pi_n(X') = G$ et $\forall i < n$, $\pi_i(X') = 0$. Pour annuler le π_{n+1}, il suffit de recoller des $(n+2)$-cellules $e^{(i)}_{n+2}$ sur les $e^{(i)}_{n+1}$ correspondantes via des applications $\mathbb{S}^{n+1} \longrightarrow X'$ de degré 1. En procédant ainsi par récurrence, on annule tous les π_i pour $i > n$ sans modifier les autres, et l'espace résultant vérifie bien les propriétés espérées.

□

Theorème 1.10. *Soit G un groupe abélien, alors le $K(G, n)$ est unique à équivalence d'homotopie près.*

On pourra trouver des preuves explicites des théorèmes 1.9 et 1.10 dans [Hat01] chapitre 4.

Chapitre 2

Résolution de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$

Pour définir la (co)homologie de groupes, on a besoin d'introduire la notion de résolution de A-modules (cf. [Bro82] chapitre I).
Dans toute cette partie, G désigne un groupe.

1 Définitions

Définition 2.1. Soit A un anneau associatif unitaire, M un module sur A (à gauche ou à droite). On appelle *résolution de M* une suite exacte de A-modules :

$$\ldots \longrightarrow M_i \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Si les M_i sont libres, alors la résolution est dite *libre*.

Exemple 2.2.
- Une résolution de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en tant que $\mathbb{Z}$-module est donnée par :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ n\ } \mathbb{Z} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

  où π est la surjection canonique.
- On pose $A = \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$: A est un $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $t = \overline{T}$ d'ordre n. On remarque que :

$$\overline{0} = t^n - 1 = (t-1)\left(1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-1}\right) = (t-1)N$$

  où $N = 1 + t + \ldots + t^{n-1}$. Si on pose $M = A/(t-1)$, on peut construire une résolution libre de M 2-périodique. On a un début de résolution :

$$A \xrightarrow{t-1} M \longrightarrow 0$$

  Comme l'idéal $(t-1)$ est anihilé par N dans A, et réciproquement, le reste de la résolution est immédiat :

$$\ldots \xrightarrow{\ N\ } A \xrightarrow{t-1} A \xrightarrow{\ N\ } A \xrightarrow{t-1} M \longrightarrow 0$$

Définition 2.3. On définit l'anneau $\mathbb{Z}G$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires formelles finies $\sum_{g\in G} k_g g$ où $k_g \in \mathbb{Z}$, sur lequel on étend de façon naturelle la multiplication de G.

Définition 2.4. On appelle *G-module* un module sur l'anneau $\mathbb{Z}G$.

Exemple 2.5. • $\mathbb{Z}$ est un G-module pour l'action triviale de G sur $\mathbb{Z}$;

- Plus généralement, si G agit sur un ensemble X, alors $\mathbb{Z}X$ est un G-module, où $\mathbb{Z}X$ est le groupe abélien libre des combinaisons formelles finies d'éléments de X sur $\mathbb{Z}$;
- Si $G = \mathbb{Z}$, alors $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}\left[T, T^{-1}\right]$ (*anneau de Laurent*). En effet, l'application :

$$\begin{array}{rrcl} \phi: & \mathbb{Z}G & \longrightarrow & \mathbb{Z}\left[T, T^{-1}\right] \\ & a \in G & \longmapsto & T^a \end{array}$$

  vérifiant pour tout a, $b \in G$ et $k_a \in \mathbb{Z}$, $k_a\phi(a) + \phi(b) = (T^a)^{k_a}T^b$, est un isomorphisme d'anneaux ;
- Plus généralement, si $G = \mathbb{Z}^n$ où $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}\left[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}\right]$ via l'application :

$$\begin{array}{rrcl} \psi: & \mathbb{Z}G & \longrightarrow & \mathbb{Z}\left[T_1, T_1^{-1}, \dots\right] \\ & (a_1, \dots, a_n) \in G & \longmapsto & T_1^{a_1} \dots T_n^{a_n} \end{array}$$

- Si $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[T]/\left(T^n - 1\right)$ via l'application :

$$\begin{array}{rrcl} \chi: & \mathbb{Z}G & \longrightarrow & \mathbb{Z}[T]/\left(T^n - 1\right) \\ & a & \longmapsto & T^n \end{array}$$

  Le deuxième point de l'exemple 2.2 nous fournit ainsi une résolution libre de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$.

Définition 2.6. On appelle *morphisme d'augmentation* le morphisme d'anneaux :

$$\begin{array}{rrcl} \epsilon: & \mathbb{Z}G & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \displaystyle\sum_{g\in G} k_g g & \longmapsto & \displaystyle\sum_{g\in G} k_g \end{array}$$

Son noyau est appelé *idéal d'augmentation.*

Proposition 2.7. *Soit I l'idéal d'augmentation de G, et soit S une partie de G, alors les éléments $(s-1)_{s\in S}$ engendrent I en tant qu'idéal à gauche de $\mathbb{Z}G$ ssi S engendre G.*

Démonstration.

- Montrons d'abord que I est engendré par les éléments $(g-1)_{g\in G}$ en tant que $\mathbb{Z}$-module. On remarque d'abord que $\forall g \in G$, $\epsilon(g-1) = 0$, ce qui montre l'inclusion inverse. Ensuite, soit $x \in I$, $x = \sum_{g\in G} k_g g$, alors $\epsilon(x) = 0$, i.e. $\sum_{g\in G} k_g = 0$, donc :

$$x = \sum_{g\in G} k_g(g-1) + k_g = \sum_{g\in G} k_g(g-1)$$

  d'où x est engendré par les $(g-1)_{g\in G}$, ce qui montre l'inclusion directe.
- Si S engendre G : soit $g \in G$, alors $g = \prod_i s_i$ où $s_i \in S$. On remarque que :

$$s_1 s_2 - 1 = s_1(s_2 - 1) + (s_1 - 1) \in \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z}G(s-1)$$

  donc par récurrence, on déduit facilement que $g - 1 \in \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z}G(s-1)$, ce qui montre l'implication inverse.
- Si les $(s-1)_{s\in S}$ engendrent I : soit H le sous-groupe engendré par S. G agit par translation à gauche sur l'ensemble de ses classes à gauche G/H, on peut donc considérer le module $\mathbb{Z}(G/H)$. Comme H fixe la classe du neutre, on a en particulier que $\forall s \in S$, $sH = H$, i.e. $(s-1)H = 0$, et donc $IH = 0$. Or I est engendré par les $(g-1)_{g\in G}$ en tant que $\mathbb{Z}$-module, d'où $\forall g \in G$, $(g-1)H = 0$, i.e. $\forall g \in G$, $gH = H$. On en déduit que G/H est le groupe trivial, i.e. $G = H$, ce qui montre l'implication directe.

$\square$

2 Résolution par le $K(G, 1)$

On va maintenant expliciter un résolution de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$ via la topologie, où $\mathbb{Z}$ est vu comme G-module à gauche avec action triviale.

Définition 2.8. On appelle *G-complexe* un CW-complexe X sur lequel G agit par permutation des cellules.

Remarque 2.9. Si X un G-complexe, on note $C_n(X)$ le G-module engendré par les combinaisons linéaires formelles des n-cellules de X sur $\mathbb{Z}$. En définissant des morphismes de G-modules $\partial_n \colon C_n \longrightarrow C_{n-1}$ comme d'habitude, on obtient ainsi un complexe de G-modules $(C_*(X), \partial)$.

Theorème 2.10. *Soit X un G-complexe contractile, $(C_*(X), \partial)$ un complexe de chaîne de G-modules, alors*

$$\ldots \xrightarrow{\partial} C_n(X) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

est une résolution de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$. De plus, si G agit librement sur X, alors la résolution est libre.

Démonstration.

X est contractile, donc $H_n(X) = 0$, i.e. $\mathrm{Ker}(\partial_n) = \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$, donc la suite est exacte. Si l'action de G sur X est libre, alors l'action induite de $\mathbb{Z}G$ sur $\mathbb{Z}X$ est libre, et comme G permute les cellules, l'action de $\mathbb{Z}G$ restreinte à $C_n(X)$ est libre, d'où $C_n(X)$ est un G-module libre.

□

Corollaire 2.11. *Soit X un $K(G,\, 1)$, Y son revêtement universel, alors $C_*(Y) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ est une résolution libre de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$.*

3 Exemples

Exemple 2.12. Si $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a,\, b\rangle$: $X = \mathbb{T}^2$ a pour groupe fondamental G, et son revêtement $Y = \mathbb{R}^2$ est contractile, c'est donc un $K(G,\, 1)$. X est un CW-complexe constitué d'une 0-cellule, de deux 1-cellules et d'une 2-cellule. Soit ω_0 une 0-cellule de Y au-dessus de celle de X, alors ω_0 engendre $C_0(Y)$, donc le début de la résolution s'écrit :

$$\mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Soit e_a et e_b les deux 1-cellules de Y au dessus-de X et d'extremités initiales ω_0, qui engendrent donc $C_1(Y)$, alors e_a et e_b finissent respectivement en $a\omega_0$ et $b\omega_0$, d'où :

$$\partial_1(e_a) = (a-1)\omega_0$$
$$\partial_1(e_b) = (b-1)\omega_0$$

Soit A la 2-cellule de Y au-dessus de X et portée par e_a et e_b et orientée dans le sens de e_a, qui engendre donc $C_2(Y)$ alors A est délimitée par e_a, ae_b, $-be_a$ et $-e_b$, d'où :

$$\partial_2(A) = (1-b)e_a + (a-1)e_b$$

Comme $\forall n > 2$, $C_n(X) = 0$, on a donc trouvé une résolution :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}GA \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}Ge_a \oplus \mathbb{Z}Ge_b \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G\omega_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Exemple 2.13. On reprend la construction du $K(G,\, 1)$ de la preuve du théorème 1.4. On remarque que si $\sigma = [g_0,\, \dots,\, g_n] \in C_n(G)$, alors :

$$[g_0,\, \dots,\, g_n] = g_0\left[1,\, g_0^{-1}g_1,\, \dots,\, g_0^{-1}g_n\right]$$

et on construit par récurrence :

$$\begin{cases} g_1' = g_0^{-1}g_1 \\ \forall i > 1,\, g_i' = \left(g_1'g_2'\dots g_{i-1}'\right)^{-1} g_i \end{cases}$$

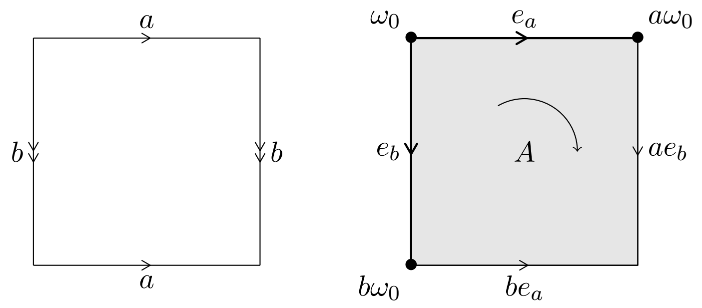

FIGURE 2.1 – À gauche : X ; à droite : relèvement de X dans Y

de sorte à ce que σ s'écrive de manière unique :

$$\sigma = g_0 \left[1,\, g_1',\, g_1' g_2',\, \ldots,\, g_1' g_2' \ldots g_n'\right] \coloneqq g_0 \left[g_1' \,|\, g_2' \,|\, \ldots \,|\, g_n'\right]$$

En particulier, les éléments de la forme $[g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_n]$ engendrent le G-module $C_n(G)$. On note :

$$\begin{array}{rrcl} \partial_n^{(i)} : & C_n & \longrightarrow & C_{n-1} \\ & [g_0,\, \ldots,\, g_n] & \longmapsto & [g_0,\, \ldots,\, \hat{g}_i,\, \ldots,\, g_n] \end{array}$$

On peut alors réécrire les opérateurs $\partial_n^{(i)}$ en terme de barres :

$$\partial_n^{(i)} \left([g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_n]\right) = \begin{cases} g_1 \, [g_2 \,|\, \ldots \,|\, g_n] & \text{si } i = 0 \\ [g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_{n-1}] & \text{si } i = n \\ [g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_i g_{i+1} \,|\, \ldots \,|\, g_n] & \text{sinon} \end{cases}$$

Si G est de type fini de rang r, on obtient ainsi une résolution de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$ de la forme :

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G^{\oplus r^n} \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G^{\oplus r} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Cette résolution est appelée *résolution barre* de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$.

Chapitre 3

(Co)homologie de groupes

1 Résolutions projectives

La notion de résolution projective généralise celle de résolution libre (cf. [Wei95] section 2.2).
Dans toute cette partie, A désigne un anneau associatif unitaire.

Définition 3.1. Soit P un A-module, on dit que P est *projectif* ssi étant donné M et N deux A-modules, un homomorphisme surjectif $f\colon M \longrightarrow N$ et un homomorphisme $\phi\colon P \longrightarrow N$, alors on peut trouver un homomorphisme $\psi\colon P \longrightarrow M$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\psi"'] \arrow[d, "\phi"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Définition 3.2. Soit M un A-module, alors une résolution $F \longrightarrow M$ où les F_i sont projectifs est dite *projective*.

Lemme 3.3. *Tout A-module libre est projectif ; tout A-module projectif est facteur direct d'un A-module libre.*

Démonstration.

- On considère le diagramme à ligne exacte suivant où P est libre :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\psi"'] \arrow[d, "\phi"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

  Soit $(a_i)_{i\in I}$ une base de P, alors $\phi(a_i) \in \mathrm{Im}(f)$, d'où $\exists b_i \in M$, $f(b_i) = a_i$. On pose donc $\forall i \in I$, $\psi(a_i) = b_i$, et on vérifie très facilement que ψ

définit un morphisme.

- Si P est projectif, alors on peut toujours construire une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \xrightarrow{\epsilon} P \longrightarrow 0$$

où F est un module libre engendré par une famille de générateurs de P, et $R = \mathrm{Ker}(\epsilon)$. On peut ainsi trouver un morphisme χ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl, dotted, "\chi"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_P"] & \\ 0 \arrow[r] & R \arrow[r] & F \arrow[r, "\epsilon"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Donc la suite exacte courte admet une section, i.e. $F \cong P \oplus R$.

□

Il n'y a pas unicité de la résolution projective, mais on a tout de même le résultat suivant :

Theorème 3.4. *Soit M et N deux A-modules, $(F, \partial) \longrightarrow M$ une résolution projective de M, $\alpha\colon M \longrightarrow N$ un homomorphisme, alors pour toute résolution $(F', \partial') \longrightarrow N$, il existe un morphisme de complexes de chaînes $f\colon F \longrightarrow F'$ tel que $f_0 = \alpha$, unique à homotopie près.*

Démonstration.

- Pour prouver l'existence, on suppose par récurrence que l'on a construit f_i pour $i \leq n$. On a un diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r, "\partial"] & F_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dotted] & F_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_n"] & F_{n-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \dots \\ \dots \arrow[r, "\partial'"'] & F'_{n+1} \arrow[r, "\partial'"'] & F'_n \arrow[r, "\partial'"'] & F'_{n-1} \arrow[r, "\partial'"'] & \dots \end{tikzcd}$$

qui induit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r, "\partial"] & F_{n+1} \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[d, dotted] & \mathrm{Ker}(\partial_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}_n"] & 0 \\ \dots \arrow[r, "\partial'"'] & F'_{n+1} \arrow[r, "\overline{\partial'}"'] & \mathrm{Ker}(\partial'_{n-1}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où $\overline{f}_n$ est bien définie dans la mesure où $\partial' f_n = f_{n-1}\partial$, i.e. $\partial' f_n = 0$ sur $\mathrm{Ker}(\partial_{n-1})$. Or F_{n+1} est projectif, $\overline{\partial'}$ est surjective, donc on peut trouver une application $f_{n+1}\colon F_{n+1} \longrightarrow F'_{n+1}$.

- Soit $g\colon F \longrightarrow F'$ un autre morphisme de complexe de chaîne, on suppose par récurrence que l'on a construit une application $h_i\colon F_i \longrightarrow F'_{i+1}$ entre f_i et g_i telle que $f_i - g_i = h_{i-1}\partial + \partial' h_i$ pour $i \leq n$. Alors en notant $\tau = f - g$, on a un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "\partial"] & F_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\tau_{n+1}"] \arrow[dl, dotted] & F_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\tau_n"] \arrow[dl, "h_n"] & F_{n-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "h_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial'"'] & F'_{n+2} \arrow[r, "\partial'"'] & F'_{n+1} \arrow[r, "\partial'"'] & F'_n \arrow[r, "\partial'"'] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

qui induit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "\partial"] & F_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\rho_{n+1}"] \arrow[dl, dotted] & F_n \arrow[r, "\partial"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial'"'] & F'_{n+2} \arrow[r, "\overline{\partial'}"'] & \mathrm{Ker}(\partial'_n) \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

où $\rho_{n+1} = \tau_{n+1} - h_n\partial$. Cette application est bien définie car :

$$\begin{aligned}
\partial'\rho_{n+1} &= \partial'\tau_{n+1} - \partial' h_n \partial \\
&= \tau_n \partial - \partial' h_n \partial \\
&= h_{n-1}\partial^2 + \partial' h_n \partial - \partial' h_n \partial \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\overline{\partial'}$ est surjective, F_{n+1} est projectif, donc on peut trouver une application $h_{n+1}\colon F_{n+1} \longrightarrow F'_{n+2}$.

□

2 Foncteur dérivé

Dans cette partie, A désigne un anneau associatif unitaire (cf. [Wei95] section 2.6).

Définition 3.5. Soit T un foncteur de la catégorie des A-modules dans la catégorie des groupes abéliens.

- On dit que T est *exact à droite* ssi pour toute suite exacte courte $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$, la suite :

$$T(M) \longrightarrow T(N) \longrightarrow T(P) \longrightarrow 0$$

est exacte.

- On dit que T est *exact à gauche* ssi pour toute suite exacte courte $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$, la suite :

$$0 \longrightarrow T(M) \longrightarrow T(N) \longrightarrow T(P)$$

est exacte.

Définition 3.6. • Soit M un A-module, soit $P \longrightarrow M$ une résolution projective, soit T un foncteur covariant exact à droite. On définit L_*T le *foncteur dérivé à gauche* de manière à ce que $L_*T(M) = H_*\left(T(P)\right)$;

- Soit M un A-module, soit $P \longrightarrow M$ une résolution projective, soit T un foncteur covariant exact à gauche. On définit R^*T le *foncteur dérivé à droite* de manière à ce que $R^*T(M) = H^*\left(T(P)\right)$.

Proposition 3.7. *Les foncteurs L_*T et R^*T ne dépendent pas de la résolution choisie.*

Démonstration.

> Si $F \longrightarrow M$ et $F' \longrightarrow M$ sont deux résolutions projectives, alors par le théorème précédent, on peut trouver un morphisme $f\colon F \longrightarrow F'$ où $f_0 = \mathrm{Id}_M$. Comme f est unique à homotopie près, alors $f_*\colon H_*\left(T(F)\right) \longrightarrow H_*\left(T(F')\right)$ est unique. De même, on peut trouver un morphisme $g\colon F' \longrightarrow F$ qui induit $g_*\colon H_*\left(T(F')\right) \longrightarrow H_*\left(T(F)\right)$ lui-aussi unique. gf est un morphisme de F dans F qui relève Id_M, mais il en est de même pour Id_F, d'où gf et Id_F sont homotopes, donc $g_*f_* = \mathrm{Id}_{H_*(T(F))}$. De même, $f_*g_* = \mathrm{Id}_{H_*(T(F'))}$. Donc $L_*T(M)$ est défini à unique isomorphisme près. La preuve pour R^*T est totalement analogue.

□

On va maintenant construire le foncteur Ext, nécessaire pour définir la cohomologie de groupes :

Proposition 3.8. *Soit M un A-module à droite, alors le foncteur* $\mathrm{Hom}_A(M, —)$ *de la catégorie des A-modules à gauche dans la catégorie des A-modules à gauche est exact à gauche.*

Démonstration.

> Soit $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de A-modules, on veut montrer que la suite :
>
> $$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{Hom}_A(M, P) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathrm{Hom}_A(M, Q)$$
>
> où $\tilde{f}(\nu) = f \circ \nu$, est exacte.
>
> - Si $\nu \in \mathrm{Ker}(\tilde{f})$ alors $f \circ \nu = 0$, i.e. $\mathrm{Im}(\nu) \in \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ car f est injective, donc $\nu = 0$ i.e. $\tilde{f}$ est injective ;

- Si $\rho \in \mathrm{Im}(\tilde{f})$ alors :

$$\exists \nu \in \mathrm{Hom}_A(M,\, N),\, f \circ \nu = \rho$$

d'où on déduit que :

$$g \circ \rho = g \circ (f \circ \rho) = (g \circ f) \circ \rho = 0$$

car $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$, donc $\rho \in \mathrm{Ker}(\tilde{g})$ i.e. $\mathrm{Im}(\tilde{f}) \subset \mathrm{Ker}(\tilde{g})$;

- Si $\rho \in \mathrm{Ker}(\tilde{g})$ alors $g \circ \rho = 0$, i.e. $\mathrm{Im}(\rho) \subset \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$, donc $\rho \in \mathrm{Im}(\tilde{f})$, donc $\mathrm{Im}(\tilde{f}) = \mathrm{Ker}(\tilde{g})$.

Donc la suite est exacte.

□

Définition 3.9. Soit M un A-module à droite, N un A-module à gauche, on définit le bifoncteur Ext_A^* par :

$$\mathrm{Ext}_A^*(M,\, N) = R^* \left(\mathrm{Hom}_A(M,\, —)\right)(N)$$

L'analogue de Ext pour l'homologie de groupes est le foncteur Tor :

Proposition 3.10. *Soit M un A-module à droite, alors le foncteur $— \otimes_A M$ de la catégorie des A-modules à droite dans la catégorie des A-modules à gauche est exact à droite.*

Pour montrer cette proposition, on a besoin d'un résultat théorique sur la fonctorialité (cf. [Wei95] section 2.6).

Définition 3.11. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories, $S\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ et $T\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ des foncteurs, alors S et T sont dits *adjoints* ssi pour tout objet M de $\mathcal{B}$ et N de $\mathcal{A}$, il existe un homomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T(M),\, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M,\, S(N))$$

On dit alors que T est *adjoint à gauche* et S est *adjoint à droite.*

Theorême 3.12. *Un foncteur adjoint à gauche est exact à droite, et un foncteur adjoint à droite est exact à gauche. (cf. [Wei95] section 2.6)*

Proposition 3.13. *Soit M un A-bimodule, alors les foncteurs $\mathrm{Hom}_A(M,\, —)$ et $— \otimes_A M$ sont adjoints, i.e. pour tout A-module à droite N et pour tout A-module à gauche P, on a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-}mod}\left(N \otimes_A M,\, P\right) \cong \mathrm{Hom}_{A\text{-}mod}\left(N,\, \mathrm{Hom}_A(M,\, P)\right)$$

Démonstration.

On pose d'une part :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \operatorname{Hom}(N \otimes_A M,\, P) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(N,\, \operatorname{Hom}_A(M,\, P)) \\ & f & \longmapsto & (n \longmapsto f(n \otimes \cdot)) \end{array}$$

et d'autre part :

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \operatorname{Hom}(N,\, \operatorname{Hom}_A(M,\, P)) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(N \otimes_A M,\, P) \\ & f & \longmapsto & (n \otimes m \longmapsto f(n)(m)) \end{array}$$

- D'abord, il est clair que $\Phi(f)(n)$ est a valeur dans $\operatorname{Hom}_A(M,\, P)$ par A-linéarité de f est du produit tensoriel à gauche ;
- Ensuite, $\Phi(f)$ est un homomorphisme par A-linéarité de f et du produit tensoriel à droite. De même, $\Psi(f)$ s'étend naturellement en un homomorphisme sur $N \otimes_A M$ par A-linéarité de f et de $f(n)$;
- Il est également facile de voir que Φ et Ψ sont des homomorphismes de A-modules ;
- Il reste à montrer que ce sont des bijections réciproques :

$$\Phi \circ \Psi(f) = \Phi(n \otimes m \longmapsto f(n)(m)) = n' \longmapsto f(n')(\cdot) = f$$
$$\Psi \circ \Phi(f) = \Psi(n \longmapsto f(n \otimes \cdot)) = n' \otimes m \longmapsto f(n' \otimes \cdot)(m) = f$$

□

Définition 3.14. Soit M un A-module à droite, N un A-module à gauche, on définit le bifoncteur Tor_*^A par :

$$\operatorname{Tor}_*^A(M,\, N) = L_*\left(-\otimes_A N\right)(M)$$

3 (Co)homologie de groupes

Le formalisme précédent va nous permettre de donner une définition précise de la (co)homologie de groupes (cf. [Wei95] section 6.1).
Dans cette partie, G désigne un groupe.

Définition 3.15. Soit M un G-module, on définit le *module coinvariant* $M_G = M/IM$, où I est l'idéal d'augmentation. Comme l'action de G sur M_G est trivial, M_G est doté d'une structure de groupe abélien.

Proposition 3.16. *Si M est un G-module, alors M_G est le plus grand quotient sur lequel G agit trivialement.*

Démonstration.

Soit S une partie génératrice de G, alors I est engendré à gauche par les $(s-1)_{s\in S}$. Soit $S_0 \subsetneq S$, J l'idéal à gauche engendré par les $(s-1)_{s\in S}$, alors $J \subset I$:

- Si S_0 engendre G alors $J = I$;
- Sinon, $\exists g_0 \in G \setminus \langle S_0 \rangle$, donc $g_0 - 1 \notin J$, mais dans ce cas, G n'agit pas trivialement sur M/JM car $(g_0 - 1)M \neq \overline{0}$

Donc I est le plus petit idéal tel que G agisse trivialement sur M/IM, i.e. M_G est le plus grand quotient sur lequel G agisse trivialement.

$\square$

Lemme 3.17. *Soit M un G-module, alors $M_G \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ où $\mathbb{Z}$ est vu comme G-module à droite avec action triviale.*

Démonstration.

On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & M & \longrightarrow & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \\ & m & \longmapsto & 1 \otimes m \end{array}$$

Φ est $\mathbb{Z}G$-linéaire par $\mathbb{Z}G$-linéarité du produit tensoriel. De plus, Φ est surjective car si $k \otimes m \in \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$:

$$k \otimes m = 1 \cdot k \otimes m = 1 \otimes km = \Phi(km)$$

Or $\forall m \in M$, Φ est constante sur Gm, donc nulle sur $Gm - m$, d'où $\mathrm{Ker}(\Phi) \subset I$, et on vérifie facilement que Φ est nulle sur I, donc $\mathrm{Ker}(\Phi) = I$: par passage au quotient, on a bien l'isomorphisme annoncé.

$\square$

Définition 3.18. On définit *l'homologie de G à coefficients dans M* :

$$H_*(G\,;\,M) = \mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},\,M)$$

En particulier, on note $H_*(G) = H_*(G\,;\,\mathbb{Z})$, où $\mathbb{Z}$ est vu comme G-module à gauche avec action triviale.

Theorème 3.19. *Soit Y un $K(G,\,1)$, alors :*

$$H_*(G) = H_*(Y)$$

Démonstration.

Si Y est un $K(G,\,1)$, X son revêtement universel, alors on a vu que $C_*(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$ est une résolution libre (donc projective) de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$ et comme $Y = X/G$, $C_*(Y) = (C_*(X))_G$, donc $H_*(Y) = H_*(G)$.

□

La définition de la cohomologie procède de façon tout à fait similaire :

Définition 3.20. Soit M un G-module, on définit le *sous-module invariant* M^G comme l'ensemble des éléments de M stabilisés par G. Comme l'action de G sur M^G est triviale, M^G est doté d'une structure de groupe abélien.

Proposition 3.21. *Si M est G-module, alors M^G est le plus petit sous-module sur lequel G agit trivialement.*

Lemme 3.22. *Soit M un G-module, alors $M^G \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$ où $\mathbb{Z}$ est vu comme G-module à droite avec action triviale.*

Démonstration.

Les éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$ sont uniquement déterminés par l'image de 1. On pose :

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & M^G & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \\ & m & \longmapsto & (1 \longmapsto m) \end{array}$$

Ψ est $\mathbb{Z}G$-linéaire, injective et comme l'action de G sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$ est triviale, elle est surjective, donc on a bien l'isomorphisme annoncé.

□

Définition 3.23. On définit la *cohomologie de G à coefficients dans M* :

$$H^*(G\,;\, M) = \mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$$

En particulier, on note $H^*(G) = H^*(G\,;\,\mathbb{Z})$, où $\mathbb{Z}$ est vu comme G-module à gauche avec action triviale.

Theoreme 3.24. *Soit Y un $K(G, 1)$, alors :*

$$H^*(G) = H^*(Y)$$

Démonstration.

La preuve est totalement analogue à celle pour l'homologie.

□

4 Propriétés générales de Tor et Ext

Les propriétés suivantes (admises) nous seront utiles par la suite.

Theorème 3.25. *Soit M un A-module à gauche, N un A-module à droite, alors :*

$$L_*(M \otimes_A —)(N) \cong L_*(— \otimes_A N)(M) = \mathrm{Tor}_*^A(M,\, N)$$

(cf. [Wei95] section 2.7)

Remarque 3.26. On a un résultat analogue pour le foncteur Ext.

Corollaire 3.27. *Soit M un A-module, alors :*

$$L_*(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} —)(M) \cong L_*(— \otimes_{\mathbb{Z}G} M)(\mathbb{Z}) = H_*(G,\, M)$$

En d'autre terme, on peut construire l'homologie de G à coefficients dans M soit à partir d'une résolution de M que l'on tensorise par $\mathbb{Z}$, soit d'une résolution de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$ que l'on tensorise par M.

Theorème 3.28. *Soit M un A-module à droite, $0 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules à gauche, alors on a une suite exacte longue :*

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_A Q \arrow[drr, rounded corners] & M \otimes_A P \arrow[l] & M \otimes_A N \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
\mathrm{Tor}_1^A(M,\, Q) \arrow[drr, rounded corners] & \mathrm{Tor}_1^A(M,\, P) \arrow[l] & \mathrm{Tor}_1^A(M,\, N) \arrow[l] & \\
 & \ldots & \mathrm{Tor}_2^A(M,\, N) \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

(cf. [Bro82] section III.6)

Remarque 3.29. On a un résultat analogue pour les foncteurs covariants $— \otimes_A M$, $\mathrm{Hom}_A(M,\, —)$ et pour le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_A(—,\, M)$.

En appliquant la définition 3.18, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.30. *Soit $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules à gauche, alors on a une suite exacte longue :*

$$\begin{tikzcd}
P_G \arrow[drr, rounded corners] & N_G \arrow[l] & M_G \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
H_1(G\,;\, P) \arrow[drr, rounded corners] & H_1(G\,;\, N) \arrow[l] & H_1(G\,;\, M) \arrow[l] & \\
 & \ldots & H_2(G\,;\, M) \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Chapitre 4

Calculs de (co)homologie

1 Homologie des groupes cycliques

(cf. [Wei95] section 6.2)

Définition 4.1. Soit G un groupe fini, on appelle l'*élément normal de G* l'élément $N = \sum_{g \in G} g$

Exemple 4.2. On a déjà vu que dans le cas G cyclique d'ordre n engendré par t, on a une résolution périodique de G sur $\mathbb{Z}G$:

$$\dots \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donc en appliquant $—_G$, on obtient :

$$\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

qui nous donne l'homologie de G à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

$$H_i(G) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i \text{ pair} \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{si } i \text{ impair} \end{cases}$$

Plus généralement, si M est un G-module à gauche, en appliquant $— \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ à la résolution précédente, on obtient :

$$\dots \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M$$

qui nous donne par le corollaire 3.27 l'homologie de G à coefficients dans M :

$$H_i(G\,;\,M) = \begin{cases} M_G & \text{si } i = 0 \\ M^G/NM & \text{si } i \text{ pair} \\ \mathrm{Ker}(N)/(t-1)M & \text{si } i \text{ impair} \end{cases}$$

où $\mathrm{Ker}(N) = \{m \in M\,;\, Nm = 0\}$.

2 Calcul en degré 0

(cf. [Wei95] section 6.1)
Dans toute cette partie, G désigne un groupe.

Proposition 4.3. *Soit G un groupe, N son élément normal alors :*
- *Si G est fini, alors $H_0(G\,;\mathbb{Z}G) = \mathbb{Z}N$;*
- *Si G est infini, alors $H_0(G\,;\mathbb{Z}G) = 0$*

Démonstration.

On remarque d'abord que $H_0(G\,;\mathbb{Z}G) = (\mathbb{Z}G)^G$.

- Si G est fini, soit $a \in (\mathbb{Z}G)^G$, $a = \sum_{g\in G} k_g g$. Soit $g_0 \in G$, alors :

$$g_0 a = \sum_{g\in G} k_g g_0 g = \sum_{g\neq g_0^{-1}} k_g g_0 g + k_{g_0^{-1}} 1 = a$$

donc en comparant les coefficients de a et $g_0 a$, on trouve que $k_{g_0^{-1}} = k_1$, donc $\forall g \in G$, $k_g = k_1$ d'où :

$$g = \sum_{g\in G} k_1 g = k_1 N$$

i.e. $(\mathbb{Z}G)^G = \mathbb{Z}N$

- Si G est infini, soit $a \in (\mathbb{Z}G)^G$, $a = \sum_{g\in G} k_g g$ où les k_g sont presque tous nuls. En particulier, $\exists g_0 \in G$, $k_{g_0} = 0$. Donc par le même calcul que tout à l'heure on trouve que $\forall g \in G$, $k_g = k_1 = 0$, i.e. $g = 0$, d'où $(\mathbb{Z}G)^G = 0$.

□

3 Calcul en degré 1

On peut calculer la cohomologie de G à coefficients dans M dans le cas général : il existe une relation étroite entre la cohomologie de degré 1 et la théorie de la dérivation (cf. [Wei95] section 6.4) :

Définition 4.4. Soit M un G-bimodule, on appelle *dérivation de G sur M* une application $D\colon G \longrightarrow M$ vérifiant :

$$\forall g,\, h \in G,\ D(gh) = gD(h) + D(g)h$$

On note $\mathrm{Der}(G, M)$ l'ensemble des dérivations de G sur M.

Proposition 4.5. *Soit M un G-module à gauche : on munit M d'une action triviale de G à droite. Alors les morphismes D_m pour $m \in M$ définis par :*

$$\forall g \in G,\, D_m(g) = gm - m$$

sont des dérivations de G sur M, appelées dérivations principales. *On note* $\mathrm{PDer}(G, M) = \{D_m\,;\, m \in M\}$.

Démonstration.

Soit $m \in M$ et soient $g, h \in G$, alors :

$$\begin{aligned} D_m(gh) &= ghm - m = (ghm - gm) + (gm - m) = gD_m(h) + D_m(g) \\ &= gD_m(h) + D_m(g)h \end{aligned}$$

□

Lemme 4.6. *Soit M un G-module à gauche, alors :*

$$\mathrm{PDer}(G, M) \cong M/M^G$$

Démonstration.

On pose :

$$\begin{array}{cccc} \Psi\colon & M & \longrightarrow & \mathrm{PDer}(G, M) \\ & m & \longmapsto & D_m \end{array}$$

Ψ est un morphisme de groupe surjectif de façon triviale. Si $m \in \mathrm{Ker}(\Psi)$, alors :

$$D_m = 0 \Longleftrightarrow \forall g \in G,\, gm - m = 0 \Longleftrightarrow m \in M^G$$

Donc $\mathrm{Ker}(\Psi) = M^G$, donc par passage au quotient, on a bien l'isomorphisme annoncé.

□

Proposition 4.7. *Soit M un bimodule sur G avec action triviale à droite, soit $\phi\colon I \longrightarrow M$ un morphisme de G-modules, soit $D_\phi\colon G \longrightarrow M$ défini par :*

$$\forall g \in G,\, D_\phi(g) = \phi(g-1)$$

alors D_ϕ est une dérivation de G sur M.

Démonstration.

Soit $\phi\colon I \longrightarrow M$ un morphisme de G-modules, soient $g, h \in G$, alors :

$$\begin{aligned} D_\phi(gh) &= \phi(gh-1) = \phi(gh-g) + \phi(g-1) = gD_\phi(h) + D_\phi(g) \\ &= gD_\phi(h) + D_\phi(g)h \end{aligned}$$

□

Lemme 4.8. *Soit M un G-module à gauche, alors on a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I,\, M) \cong \mathrm{Der}(G,\, M)$$

Démonstration.

On pose :

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I,\, M) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(G,\, M) \\ & \phi & \longmapsto & D_\phi \end{array}$$

Φ est un morphisme injectif de façon triviale. Soit $D \in \mathrm{Der}(G,\, M)$, on pose $\phi\colon g-1 \longmapsto D(g)$, alors $\Phi(\phi) = D$ en tant que morphisme de groupes. Il reste à montrer que ϕ est G-linéaire. Soient $g,\, h \in G$, alors :

$$\begin{aligned} \phi(h(g-1)) &= \phi((hg-1)-(h-1)) = \phi(hg-1) - \phi(h-1) \\ &= D(hg) - D(h) = hD(g) + D(h)g - D(h) = hD(g) \\ &= h\phi(g-1) \end{aligned}$$

Donc Φ est surjective, donc c'est un isomorphisme.

□

Theorème 4.9. *Soit M un G-module à gauche, alors :*

$$H^1(G\,;\, M) = \mathrm{Der}(G,\, M)/\, \mathrm{PDer}(G,\, M)$$

Démonstration.

On a une suite exacte $0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$, qui induit donc par le théorème 3.28 une suite exacte longue :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},\, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G,\, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I,\, M) \arrow[dll, rounded corners] \\ & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},\, M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G,\, M) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Comme $\mathbb{Z}G$ est projectif car libre, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G,\, M) = 0$. La suite exacte devient alors :

$$0 \longrightarrow M^G \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Der}(G,\, M) \longrightarrow H^1(G,\, M) \longrightarrow 0$$

Ainsi, $H^1(G,\, M) \cong \mathrm{Der}(G,\, M)/\, \mathrm{Im}\,\alpha$, et $\mathrm{Im}\,\alpha \cong M/\, \mathrm{Ker}(\alpha)$, or $\mathrm{Ker}(\alpha) = M^G$, d'où :

$$M/\, \mathrm{Ker}(\alpha) \cong M/M^G \cong \mathrm{PDer}(G,\, M)$$

Donc :
$$H^1(G, M) \cong \mathrm{Der}(G, M)/\,\mathrm{PDer}(G, M)$$

□

On peut également expliciter l'homologie de G lorsque $M = \mathbb{Z}$ (cf. [Wei95] section 6.1) :

Proposition 4.10. *Soit G un groupe, I son idéal d'augmentation, alors on a un isomorphisme :*
$$G/D(G) \cong I/I^2$$
où $D(G)$ désigne le groupe engendré par les commutateurs de G.

Démonstration.

- On pose :
$$\begin{array}{rccc} \theta\colon & G & \longrightarrow & I/I^2 \\ & g & \longmapsto & \overline{g-1} \end{array}$$
Montrons que θ est un morphisme de groupes : si $g,\, h \in G$, alors :
$$\begin{aligned} \theta(gh) &= \overline{gh-1} = \overline{gh-1} - \overline{(g-1)(h-1)} = \overline{-1+(g+h-1)} \\ &= \overline{g-1} + \overline{h-1} = \theta(g) + \theta(h) \\ \theta(g^{-1}) &= \overline{g^{-1}-1} = \overline{g^{-1}-1} + \overline{(g-1)(g^{-1}-1)} = \overline{-1+(-1-g+1)} \\ &= -(\overline{g-1}) = -\theta(g) \end{aligned}$$
Comme I/I^2 est commutatif, θ envoie $D(G)$ sur 0, i.e. $D(G) \subset \mathrm{Ker}(\theta)$, donc on a une application :
$$\overline{\theta}\colon G/D(G) \longrightarrow I/I^2$$
- On pose :
$$\begin{array}{rccc} \sigma\colon & I & \longrightarrow & G/D(G) \\ & g-1 & \longmapsto & \overline{g} \end{array}$$
de façon à ce que σ soit un morphisme de groupes. Soit $(g-1)(h-1) \in I^2$, alors :
$$\begin{aligned} \sigma((g-1)(h-1)) &= \sigma(gh-g-h+1) = \sigma((gh-1)-(g-1)-(h-1)) \\ &= \overline{(gh)g^{-1}h^{-1}} = \overline{1} \end{aligned}$$
Donc $I^2 \subset \mathrm{Ker}(\sigma)$, i.e on a une application :
$$\overline{\sigma}\colon I/I^2 \longrightarrow G/D(G)$$
- Il reste à voir que $\overline{\sigma}$ et $\overline{\theta}$ sont bijections réciproques : c'est immédiat. Donc on a bien l'isomorphisme annoncé.

□

Proposition 4.11.

$$H_1(G) = G/D(G) = I/I^2$$

Démonstration.

Soit Y un $K(G,1)$, alors $H_1(G) = H_1(Y)$, or si X est un espace topologique alors $\pi_1(X)/D(\pi_1(X)) \cong H_1(X)$, d'où :

$$H_1(G) \cong \pi_1(Y)/D\left(\pi_1(Y)\right) = G/D(G)$$

et $G/D(G) \cong I/I^2$ par la proposition 4.10.

□

Bibliographie

[Bro82] Kenneth S. Brown. *Cohomology of Groups.* Springer, 1982.

[Hat01] Allan Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2001.

[Wei95] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge University Press, 1995.