Indications de TD 2

Exercice 1. Il suffit de vérifier que les deux applications suivantes sont bien définies, car ils sont évidement l'inverse de l'un de l'autre.

$$\begin{array}{rcl} f : \pi_1(X) \times \pi_1(Y) & \to & \pi_1(X \times Y) \\ \alpha, \beta & \mapsto & (t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g : \pi_1(X \times Y) & \to & \pi_1(X) \times \pi_1(Y) \\ \gamma & \mapsto & (\mathrm{pr}_X \circ \gamma, \mathrm{pr}_Y \circ \gamma) \end{array}$$

En effet, le fait que f et g respecte l'équivalence d'homotopie est assez direct à démontrer. Par exemple, si α et α' sont homotopes via l'homotopie $H : S^1 \times I \to X$, alors $(H, \beta) : S^1 \times I \to X \times Y$ est une homotopie entre $f(\alpha, \beta)$ et $f(\alpha', \beta)$.

Exercice 2. (1) L'égalité de deux produits se découle de la façon suivante :

$$x \bullet y = (x * 1) \bullet (1 * y) = (x \bullet 1) * (1 \bullet y) = x * y.$$

La commutativité :

$$x \bullet y = (1 * x) \bullet (y * 1) = (1 \bullet y) * (x \bullet 1) = y * x = y \bullet x.$$

L'associativité :

$$(x \bullet y) \bullet z = (x \bullet y) \bullet (1 \bullet z) = (x \bullet 1) \bullet (y \bullet z) = x \bullet (y \bullet z).$$

(2) On considère deux lois de produit sur $\pi_1(X)$ pour X un groupe topologique. La première est la loi usuelle pour un groupe fondamental, notée $\bullet$: on rappelle qu'elle provient de la 'conjonction' de deux lacets. La deuxième provient de la loi du groupe $\cdot$ sur X lui-même :

$$\begin{array}{rcl} * : C_{1,1}(X) \times C_{1,1}(X) & \to & C_{1,1}(X) \\ \alpha, \beta & \mapsto & (t \mapsto \alpha(t) \cdot \beta(t)) \end{array}$$

On vérifie bien que $*$ respecte l'équivalence d'homotopie : soit H une homotopie (à extrémités fixés) entre α et α', alors $H \cdot \beta$ est une homotopie entre $\alpha(t) \cdot \beta(t)$ et $\alpha'(t) \cdot \beta(t)$. Donc $*$ descend bien en un produit encore noté $* : \pi_1(X, 1) \times \pi_1(X, 1) \to \pi_1(X, 1)$.
Par la construction, $\bullet$ et $*$ satisfont les deux conditions de (1), qui nous permet de déduire la commutativité du groupe fondamental en particulier.

Exercice 3. C'est une conséquence immédiate de Exercice 16 de TD 1. (*cf.* aussi Exercice 2.2 de TD 2 de 2011/2012.)

Exercice 4. 1. (a) C'est l'isomorphisme de changement de point de base. Voir le cours.

(b) Il suffit de noter le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1, x) \arrow[rrr, "\pi_1(f)"] \arrow[dd, "\phi_\gamma"'] \arrow[dr, "\deg"] & & & \pi_1(S^1, f(x)) \arrow[dd, "\phi_{f\circ\gamma}"] \arrow[dl, "\deg"'] \\
& \mathbf{Z} \arrow[r, "\times n_x", "\times n_y"'] & \mathbf{Z} & \\
\pi_1(S^1, y) \arrow[rrr, "\pi_1(f)"'] \arrow[ur, "\deg"] & & & \pi_1(S^1, f(y)) \arrow[ul, "\deg"']
\end{tikzcd}$$

2. C'est une conséquence immédiate du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1, x) \arrow[rr, "\pi_1(g\circ f)"] \arrow[dr, "\pi_1(f)"'] \arrow[ddd, "\deg"'] & & \pi_1(S^1, g(f(x))) \arrow[ddd, "\deg"] \\
& \pi_1(S^1, f(x)) \arrow[ur, "\pi_1(g)"'] \arrow[d, "\deg"'] & \\
& \mathbf{Z} \arrow[dr, "\times \deg(g)"] & \\
\mathbf{Z} \arrow[ur, "\times \deg(f)"'] \arrow[rr, "\times \deg(g\circ f)"'] & & \mathbf{Z}
\end{tikzcd}$$

3. On remarque d'abord qu'une rotation est de degré 1, et homotope à l'identité, donc on peut composer une rotation convenable à gauche ou à droite autant qu'on veut sans changer la question.

Dans la suite, on va utiliser la coordonnée angulaire de S^1 modulo 2π. Si on se donne deux endomorphismes de S^1 homotopes $f \sim g$, quitte à composer avec certaines rotations, on peut supposer que $f(0) = g(0) = 0$. Soit $H : S^1 \times I \to S^1$ l'homotopie entre f et g, on peut définit une autre homotopie relative à 0 entre f et g, en posant

$$\begin{aligned} H' : S^1 \times I &\to S^1 \\ (x,t) &\mapsto H(x,t) - H(0,t) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

En conséquence, f, g représentent le même élément dans $\pi_1(S^1, 0)$, ainsi ont le même degré.

Réciproquement, soient f, g deux endomorphismes de S^1 avec le même degré. Quitte à composer avec certaines rotations, on peut supposer que $f(0) = g(0) = 0$. Sous cet hypothèse, $\deg(f) = \deg(g)$ implique que f et g représentent le même élément dans $\pi_1(S^1, 0)$. Par la définition du groupe fondamental, on obtient une homotopie (relatif à 0) entre f et g.

4. Si f n'est pas surjective, alors f se factorise par $S^1 \backslash x$, qui est contractile. Donc f est homotopiquement trivial. En particulier, elle est de degré nul. Le contre-exemple de la réciproque est facile à construire.

5. On considère le relèvement de f, $\widetilde{f} : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$. Quitte composer des rotations, on peut supposer que $\widetilde{f}(0) = 0$. Ce qu'il reste est un argument élémentaire en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 5. $f : S^n \to \mathbf{R}^n$.

1. On applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $\phi(x) := f(x) - f(-x)$.

2. (a) On considère le relèvement de k,

$$\widetilde{k} : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1.$$

Sans perdre la généralité, on peut supposer que $\widetilde{k}(0) = 0$. L'hypothèse $k(x) = -k(-x)$ pour tout x est équivalente à la condition suivante : pour chaque $x \in S^2$, il existe un entier $m_x \in \mathbf{Z}$, tel que

$$\widetilde{k}(x + \frac{1}{2}) = \widetilde{k}(x) + \frac{2m_x + 1}{2}.$$

Par la continuité de $\widetilde{k}$, on trouve que m_x est en fait indépendant de x : il existe $m \in \mathbf{Z}$, tel que pour tout x, on a

$$\widetilde{k}(x + \frac{1}{2}) = \widetilde{k}(x) + \frac{2m + 1}{2}.$$

On en déduit que

$$\widetilde{k}(1) = \widetilde{k}(\frac{1}{2}) + \frac{2m+1}{2} = \widetilde{k}(0) + (2m+1).$$

Par définition, $\deg(k) = \widetilde{k}(1) - \widetilde{k}(0) = 2m+1$, est impair.

(b) Grâce à l'hypothèse de non-annulation de $f(x) - f(-x)$, on peut construire l'application continue $g : S^2 \to S^1$ suivante :

$$g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$

Il est immédiat que g vérifie bien l'équation $g(-x) = -g(x)$.

(c) ι se prolonge en une application de $D^2 \to S^1$, donc elle est homotopiquement triviale. Donc $g \circ \iota$ l'est aussi. Par contre, $k := g \circ \iota$ vérifie bien l'équation $k(-x) = -k(x)$, par (a), k est de degré impaire. En particulier, k n'est pas homotopiquement triviale. D'où une contradiction, qui affirme l'existence de x tel que $f(x) = f(-x)$.

Exercice 6. On applique le théorème de Borsuk-Ulam à l'application continue suivante :

$$\begin{aligned} f : S^2 &\to \mathbf{R}^2 \\ x &\mapsto (f_A(x), f_B(x)) \end{aligned}$$

où

$$f_A(x) := \min_{y \in A} dist(x, y);$$

$$f_B(x) := \min_{y \in B} dist(x, y).$$

Par le théorème de Borsuk-Ulam, il existe un point $x \in S^2$, tel que $f_A(-x) = f_A(x)$ et $f_B(-x) = f_B(x)$. Si $f_A(x) = f_A(-x) = 0$, alors $x \in A$ comme A est fermé ; si $f_B(x) = f_B(-x) = 0$, alors $x \in B$ comme B est fermé ; si $f_A(x) = f_A(-x) > 0$ et $f_B(x) = f_B(-x) > 0$, alors x et $-x$ ne sont pas dans $A \cup B$, donc ils sont tous dans C.

Exercice 7. $a = 0$ dans 2.
2. (a) C'est un technique standard. Un argument non-constructif : on peut faire une convolution à noyau C^∞ à support compact suffisamment concentré

à l'origine. Un argument constructif et élémentaire est aussi possible, par exemple : pour un lacet γ donné, on le découpe suffisamment tel que chaque morceau est contenu dans un petit disque contenant pas l'origine. On remplace ce morceau simplement par le segment reliant le point de départ de ce morceau et celle d'arriver. Et puis, on lissifie chaque point de coupage par un petit arc convenable.

(b) Comme on a vu dans 1, l'indice est un invariant homotopique, il suffit de montrer que l'indice de lacet $t \mapsto e^{2n\pi i t}$ est n.

Exercice 8. Par définition, $\Sigma X = C^+X \cup C^-X$, où $C^+X := X \times [0, \frac{1}{2}]/X \times \{0\}$ et $C^-X := X \times [\frac{1}{2}, 1]/X \times \{1\}$. Comme $X = C^+X \cap C^-X$ est connexe, on peut applique le théorème de Van Kampen :

$$\pi_1(\Sigma X) = \pi_1(C^+X) \star_{\pi_1(X)} \pi_1(C^-X),$$

qui est trivial parce que C^*X et C^-X sont contractiles.

Exercice 9. 1. M_1 est la partie avec $x \leq \frac{1}{2}$, M_2 est la partie avec $x \geq \frac{1}{2}$.

2. Comme un ruban de Moebius est homotope équivalent à un cercle (par la rétraction sur le cercle au milieu). En particulier, son groupe fondamental est $\mathbf{Z}$. On note la classe de génératrice de $\pi_1(M_1)$ par a, et la classe de génératrice de $\pi_1(M_2)$ par b (a est le cercle descendant du segment $x = \frac{1}{4}$, b est le cercle descendant du segment $x = \frac{3}{4}$).

Comme $C := M_1 \cap M_2$ est un cercle, dont la classe dans $\pi_1(M_1)$ est a^2 et la classe dans $\pi_1(M_2)$ est b^2, en appliquant le théorème de Van Kampen, on obtient

$$\pi_1(K) = \pi_1(M_1) \star_{\pi_1(C)} \pi_1(M_2),$$

où $\pi_1(C) = \mathbf{Z} \to \pi_1(M_1) = \mathbf{Z} \cdot a$ est $1 \mapsto a^2$,$\pi_1(C) = \mathbf{Z} \to \pi_1(M_2) = \mathbf{Z} \cdot b$ est $1 \mapsto b^2$. En conclusion, $\pi_1(K) =< a, b \ | \ a^2 = b^2 >$.

3. L'abélianisé de $\pi_1(K) =< a, b \ | \ a^2 = b^2 >$ est évidement

$$\mathbf{Z} \cdot a \oplus \mathbf{Z} \cdot b / < 2a - 2b > \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2.$$

Or le groupe fondamental d'un tore est $< a, b \ | \ aba^{-1}b^{-1} = 1 >$, et son abélianisé est $\mathbf{Z} \cdot a \oplus \mathbf{Z} \cdot b \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

Exercice 10. $\dim X = d \geq 3$.
Par récurrence, il suffit de considérer le cas $n = 1$, noté $x := x_1$. On choisit un petit boule D^d à l'origine x. Alors $V = (V \backslash \{x\}) \cup D^d$ et $(V \backslash \{x\}) \cap D^d = D^d \backslash \{x\} \sim$

S^{d-1}. Comme $d \geq 3$, S^{d-1} est connexe et simplement connexe, donc on peut conclure en utilisant le théorème de Van Kampen :

$$\pi_1(V\backslash\{x\}) \xrightarrow{\cong} \pi_1(V\backslash\{x\}) \star_{\pi_1(D^d\backslash\{x\})} \pi_1(D^d) = \pi_1(V).$$

Exercice 11. 1. Par la présentation par un polygone de $2g$ cotés et le principe d'attachement de cellule. On obtient que

$$\pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle.$$

2. Utiliser toujours la présentation de polygone, on voit que l'effet homotopique d'enlever un point est de faire disparaitre le 2-cellule, et l'effet d'enlever chaque fois un point de plus est de rajouter de plus une diagonale au polygone. En conséquence :

$$\pi_1(S_g - X) = \pi_1(\bigvee^{2g+n-1} S^1) = \mathbb{F}_{2g+n-1},$$

le groupe libre de $(2g + n - 1)$ lettres.

3. C'est un fait général que à équivalence d'homotopie près, identifier m points distincts qui sont dans la même composante connexe par arc est la même de faire le bouquet avec $(m - 1)$ cercles. En conséquence :

$$\pi_1(S_g/Y) = \pi_1(S_g \vee \bigvee^{m-1} S^1) = \pi_1(S) \star \mathbb{F}_{m-1},$$

ou plus concrètement,

$$\pi_1(S_g/Y) = \langle a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g, c_1, \cdots, c_{m-1} \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle.$$

4. En combinant 2 et 3, on conclut que $(n, m \geq 1)$

$$\pi_1((S_g - X)/Y) = \pi_1(\bigvee^{2g+n+m-2} S^1) = \mathbb{F}_{2g+n+m-2}.$$

Exercice 12. 1. $\mathbf{C}\mathbf{P}^n = \mathbf{C}^{n+1}\backslash\{0\}/\mathbf{C}^* = S^{2n+1}/S^1$. $\mathbf{C}\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{C}\mathbf{P}^n \cup_g D^{2n+2}$, où l'application d'attachement est donnée par l'application quotient : $\partial D^{2n+2} = S^{2n+1} \to S^{2n+1}/S^1 = \mathbf{C}\mathbf{P}^n$.

2. Ils sont tous simplement connexe : rattachement une cellule de dimension ≥ 3 ne change pas le groupe fondamental.

Exercice 13. 1. Il suffit d'observer que une matrice de $SU_2(\mathbf{C})$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$$

avec $a, b \in \mathbf{C}$ tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

2. Comme S^3 est simplement connexe, $\pi_1(SU_2(\mathbf{C}))$ est trivial.
Pour U_2, on remarque que la suite exacte courte suivante

$$0 \to SU_2 \to U_2 \xrightarrow{\det} S^1 \to 0$$

admet une section : $S^1 \to U_2$, qui envoie $e^{i\theta}$ vers $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc U_2 est en fait un produit semi-direct :

$$U_2 = SU_2 \rtimes S^1.$$

En particulier, on a un homéomorphisme $U_2 \simeq SU_2 \times S^1$. (Attention : ce n'est pas un isomorphisme de groupe de Lie.) D'où, $\pi_1(U_2) = \pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$.
Par le processus de Gram-Schmidt, on sait que GL_2 se rétracte par déformation sur U_2, donc son groupe fondamental est aussi $\mathbf{Z}$.

3. On a l'homéomorphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \to & SO_2(\mathbf{R}) \\ e^{\theta i} & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc $\pi_1(SO_2(\mathbf{R})) = \mathbf{Z}$. Comme $GL_2^+(\mathbf{R})$ est homotope à $SO_2(\mathbf{R})$ par Gram-Schmidt, son groupe fondamental est aussi $\mathbf{Z}$. Pour $GL_2^-(\mathbf{R})$, il suffit de noter qu'il est homéomorphe à $GL_2^+(\mathbf{R})$ par multiplication par $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. 1. *cf.* Le technique de modification d'une homotopie dans (3) de Exercice 4.

2. On représente ab par le lacet γ_0 qui fait un tour de vitesse uniforme dans une moitié du temps $t \in [0, 1/2]$ sur le premier cercle, et fait un tour de même vitesse dans l'autre moitié du temps $t \in [1/2, 1]$ sur le deuxième cercle. On fait déformer ce lacet (*i.e.* une homotopie) de la manière suivante : pour $s \in I$ le paramètre de l'homotopie, le lacet γ_s est défini par :

– si $t \in [0, 1 - \frac{s}{2}]$, $\gamma_s(t) = \gamma_0(t + \frac{s}{2})$;

– si $t \in [1-\frac{s}{2}, 1]$, $\gamma_s(t) = \gamma_0(t-1+\frac{s}{2})$.
On peut vérifier facilement que γ_1 représente ba.

Comme le groupe fondamental de $S^1 \vee S^1$ est le groupe libre de deux lettre $< a, b >$, on a bien que $ab \neq ba$ dans le groupe fondamental. Donc par définition, ab et ba ne sont pas homotopes via une homotopie à extrémités fixées.

Exercice 15. Dans 2, Γ est un graphe connexe, et

$$c(\Gamma) := 1 + \#\{\text{Arêtes}\} - \#\{\text{Sommets}\}$$

1. En générale, une paire de CW-complexe est une *cofibration*, *i.e.* elle satisfait la *propriété d'extension d'homotopie.* Pour une paire de CW-complexe (X, A), si A est contractile, alors on peut contracter A sans changer le type d'homotopie de X : $X \twoheadrightarrow X/A$ est une équivalence d'homotopie. Pour la preuve en détaille, voir Chapitre 1 de Hatcher 'Algebraic Topology', ou *cf.* la deuxième partie de TD 3 de 2011/2012.

2. S'il existe une arête dont les extrémités sont distinctes, par 1, on peut l'écraser sans changer le type d'homotopie, et le nombre des arêtes et le nombre de sommets réduisent par 1. Par récurrence et l'hypothèse que Γ est connexe, il reste un sommet à la fin, et donc $c(\Gamma) := 1+\#\{\text{Arêtes}\}-\#\{\text{Sommets}\}$ arêtes. C'est-à-dire, le type d'homotopie de Γ est le même qu'un bouquet de $c(\Gamma)$ cercles. D'où le résultat.

Exercice 16. On attache une 2-cellule à un cercle par l'application d'attachement $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$.

Exercices Additionnels 1. Pour le cercle à deux origines, on applique le théorème de Van Kampen à la partition obtenue par enlever un des deux points non-séparés. Alors l'intersection est bien connexe et contractile, donc par Van Kampen, le groupe fondamental est le groupe libre de deux lettres.

Le groupe fondamental de la droite à deux origines est isomorphisme à $\mathbf{Z}$. On utilise déformation d'homotopie pour ramener au groupe fondamental d'un cercle. Soient H^+, H^- les demi-plans fermés supérieure et inférieure respectivement. On note L^+, L^- les bords de H^+, H^-, note O^+, O^- les origines de L^+ et L^-, et x^+, x^- les coordonnées de L^+, L^- respectivement. Comme H^+ se rétracte par déformation sur L^+ et même pour H^- et L^-, on sait que le groupe fondamental de la droite à deux origines est isomorphe à celle de

$H^+ \coprod H^-/\{x^+ \sim x^-;\ x \neq 0\}$. On remarque que l'inclusion $H^+\backslash\{O^+\} \hookrightarrow H^+$ est une équivalence d'homotopie. Du coup,

$$\pi_1\left(\left(H^+ \coprod H^-\right)/\{x^+ \sim x^-;\ x \neq 0\}\right) = \pi_1\left(\left(H^+\backslash\{O^+\} \coprod H^-\backslash\{O^-\}\right)/\{x^+ \sim x^-;\ x \neq 0\}\right).$$

Or l'espace à droite est évidement $\mathbf{R}^2\backslash\{O\}$, dont le groupe fondamental est $\mathbf{Z}$.

Une autre solution (suggérée par Hua WANG) : D'abord par le technique de la preuve de la surjectivité pour le théorème de Van Kampen (plus précisément, on découpe un lacet suffisamment pour que chaque petit segment contient au plus un origine), il est facile de montrer que G est engendré par le lacet qui part de -1 à 1 passant par la première origine et revient de 1 à -1 en passant par la deuxième origine, donc G est un groupe cyclique. Or on reprend le cercle à deux origines X. On note les deux origines x_1 et x_2, et choisit un autre point x. On considère un recouvrement de X différent de ce qu'on a utilisé ci-dessus : $U_1 := X\backslash\{x\}$, $U_2 := X\backslash\{x_1\}$. Alors, $X = U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2 \simeq \mathbf{R}^1$ qui est connexe et contractile. Par le théorème de Van Kampen et le résultat du groupe fondamental de X, on obtient :

$$G \star \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \star \mathbf{Z},$$

où G est le groupe fondamental de U_1, qui est homéomorphe à une droite à deux origines. En abélianisant, on en déduit que le rang de G est un, c'est-à-dire, $G \simeq \mathbf{Z}$.

2. $\mathbf{R}\mathbf{P}^n = S^n/\{x \sim -x\}$, la structure de CW-complexe est donnée par la formule récursive suivante

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{R}\mathbf{P}^n \cup_g D^{n+1},$$

où l'application d'attachement est le quotient $\partial D^{n+1} = S^n \to \mathbf{R}\mathbf{P}^n$.
Les résultats sont : $\pi_1(\mathbf{R}\mathbf{P}^1) = \pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$, $\pi_1(\mathbf{R}\mathbf{P}^n) = \pi_1(\mathbf{R}\mathbf{P}^2) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, pour tout $n \geq 2$.