Indications de TD 3

Exercice 1. 1. Trivial. En fait, comme E et B sont localement homéomorphes et p est surjective, donc ils partagent la même propriété locale topologique, par exemple, 'localement connexe' (resp. 'localement connexe par arc').

2. (a) Soient x, y deux points distincts de E. On note $a = p(x), b = p(y)$ leur images dans B. Si $a = b$, alors on prend un voisinage trivialisant de $a = b$; par définition de revêtement, x et y sont dans voisinages disjoints. Si $a \neq b$, par l'hypothèse de séparabilité de B, on dispose deux voisinages disjoints de a et b respectivement, alors leur préimages nous fournissent deux voisinages disjoints de x et y.

(b) Il faut dḿontrer qu'il n'existent pas deux voisinages disjoints de (1,0) et (0,1) qui sont stables par l'action de $\mathbf{Z}$. On suppose il y en a, disons $(1,0) \in U$ et $(1,0) \in V$. Alors U contient un petit carré centré à $(1,0)$. En itérant l'action de Z, on sait que U contient aussi certains rectangles plus en plus fins mais plus en plus long proche de l'axe y. On fait le même argument pour V. On conclut que $U \cap V \neq \varnothing$.

3. La compacité de E implique celle de B pour des raisons triviales. Réciproquement, on suppose que B est compacte. Si on se donne un recouvrement de E, noté U_j où $j \in I$. Pour chaque point $b \in B$, par la finitude de sa fibre E_b, on peut choisir un nombre fini de ouverts $\{U_j\}_{j \in J_b}$ qui recouvert la fibre E_b, où J_b est un sous ensemble fini de I. Comme $p : E \to B$ est un revêtement, en particulier p est une application ouverte, donc il existe un voisinage ouvert V de b dans B, tel que

$$p^{-1}(V) \subset \bigcup_{j \in J_b} U_j.$$

On a ainsi un recouvrement ouvert $\{V_b\}_{b \in B}$ de B. Grâce à la compacité de B, il existe un sous recouvrement fini $\{V_{b_i}\}_{i=1}^n$ de B. Alors le sous recouvrement

$$\{U_j\}_{j \in J} \quad ; \quad J := \bigcup_{i=1}^n J_{b_i}$$

nous convient.

Exercice 2. On rappelle la différence entre la notion de *revêtement* et celle de *homéomorphisme local* : revêtement est une propriété locale en but (et donc aussi pour la source), cependant homéomorphisme local est une propriété locale seulement pour la source. 1. Par définition.

2.(a) Supposons toutes les fibres de f sont finies de cardinale n. Pour chaque point $y \in Y$, on note sa fibre $X_y = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Par la propriété de homéomorphisme local, il existe pour chaque $1 \leq i \leq n$, un voisinage ouvert U_i de x_i et un voisinage ouvert V_i de y, tel que la restriction $f|_{U_i} : U_i \to V_i$ est un homéomorphisme. On prend $V := \cap_{i=1}^n V_i$, et $U_i' := (f|_{U_i})^{-1}(V) \subset U_i$ le preimage de V près de x_i, qui est homéomorphe à V. Comme la cardinale de toute fibre est n, on sait que le preimage $f^{-1}(V)$ est exactement $\coprod_{i=1}^n U_i'$. Donc V est un voisinage trivialisant.

(b) Une inclusion ouverte stricte est toujours un homéomorphisme local. La projection d'une droite à deux origines à la droite est un homéomorphisme local. L'application $e^{i\bullet} : \mathbf{R}_{>0} \to S^1$ est un homéomorphisme local.

Exercice 3. 1, 2. Voir le polycopié (disponible sur le page web de FIMFA) du cours 'Topologie Algébrique' de F. Paulin Page 33 - 35.

3. Immédiat de 1 et 2.

Exercice 4. 1. Par récurrence, il suffit de considérer le cas de deux facteurs. Soient $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ deux revêtements, montrons que

$$f := f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$$

est aussi un revêtement. Pour chaque point $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$, on choisit voisinages trivialisants U_1 de y_1 dans Y_1 et U_2 de y_2 dans Y_2 respectivement. Alors $f_i^{-1}(U_i)$ est homéomorphe à $U_i \times I_i$ au-dessus de U_i, où I_i sont des ensembles discrets et $i = 1, 2$. Donc $f^{-1}(U_1 \times U_2) = f_1^{-1}(U_1) \times f_2^{-1}(U_2)$ qui est homéomorphe à $(U_1 \times U_2) \times (I_1 \times I_2)$ au-dessus de $U_1 \times U_2$. Autrement-dit, $U_1 \times U_2$ est un voisinage trivialisant, et f est un revêtement.

2. Pour le contre-exemple, il suffit de rappeler qu'un ouvert dans un produit dénombrable de copies, par exemple $(S^1)^{\mathbf{N}}$, contient toujours un ouvert de la forme $U_1 \times \cdots \times U_r \times S^1 \times S^1 \times \cdots$, dont préimage est de la forme $V_1 \times \cdots V_r \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \cdots$ qui n'est pas homéomorphe un union disjoints de copies de $U_1 \times \cdots \times U_r \times S^1 \times S^1 \times \cdots$.

Exercice 5. $g_{ii} = \mathrm{id}_{V_i}$, et donc $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$.

1(a). La réflexivité vient de $g_{ii} = \mathrm{id}_{V_i}$; la symétrie vient de $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$; la transitivité viens de la condition de cocycle.

(b). (D'abord, c'est bien-définie.) Notons que le preimage de V_i est exactement $V_i \times F$. Donc c'est un revêtement et les V_i sont des voisinages trivialisants.

2. Si on se donne un revêtement $p : E \to B$ satisfaisant la propriété, alors grâce à la condition $\Phi_j\Phi_i^{-1}(x, f) = (x, g_{ji}(x)f)$, l'application $\Phi : E \to \Sigma/R$ au-dessus de B définie par $\Phi_i : p^{-1}(V_i) \to V_i \times F$ est bien-définie. Comme Φ_i sont des trivialisations, Φ est homéomorphisme au-dessus de B, *i.e.* E est isomorphe à Σ/R comme revêtement sur B.

Exercice 6. On rappelle qu'un *morphisme* entre deux revêtements est juste une application continue au-dessus de la base, *i.e.* un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

1. Pour chaque point $b \in B$, on choisit un voisinage trivialisant V à la fois pour p et p', alors on dispose deux homéomorphismes au-dessus de V trivialisants : $p^{-1}(V) \xrightarrow{\cong} V \times F$ et $p'^{-1}(V) \xrightarrow{\cong} V \times F'$, où F, F' sont deux ensembles discrets (fibres de p et p' au-dessus de b). On note U_e et $U_{e'}$ les copie de V près de e et e' respectivement. Donc h induit une application $h_b : F \to F'$. C'est clair que si $e' \in F'$ est dans l'image de h_b, disons $e' = h(e)$ pour $e \in F$, alors $U_{e'}$ est l'image par h de U_e ; si $e' \in F'$ n'est pas dans l'image de h_b, alors $U_{e'}$ est totalement en dehors de l'image de h. En particulier, l'image de $h : E \to E'$ est à la fois ouvert et fermé. Par la connexité de E', h est surjective.

2. Pour chaque $e' \in F'$, le preimage $h^{-1}(U_{e'})$ est l'union disjoint $\coprod_{e \in h_b^{-1}(e')} U_e$, qui est homéomorphe au-dessus de V au produit $U_{e'} \times h_b^{-1}(e')$.

Exercice 7. $C^- \subset \mathbf{R}^2$. Remplacer tous les 2π par $\frac{1}{2\pi}$.

1. En fait, n'importe quelle application continue de S^1 ver X a pour l'image toujours continu dans une partie finie de l'oscillation, qui est contractile.

2. On suppose il y a un relèvement. On commence par le point $(-10, 0)$, alors C^- se relève forcement à valeur dans $[0, 1/2]$. Puis la partie d'oscillation se relève forcement à valeur dans $(1/2, \infty)$, même pour les deux segments.

Donc on arrive au point $(-10, 0)$ un valeur strictement positif. D'où une contradiction.

Exercice 8. On applique le foncteur π_1 (*i.e.* on considère le morphisme de groupe fondamental induit par f) :

$$f_* : \pi_1(V) \to \pi_1\left((S^1)^{\times n}\right).$$

Comme $\pi_1\left((S^1)^{\times n}\right) = \pi_1(S^1)^{\times n} = \mathbf{Z}^n$ est sans torsion et le groupe $\pi_1(V)$ est fini par l'hypothèse, f_* est forcement trivial. Le théorème de relèvement d'application appliqué à f et le revêtement $\mathbf{R}^n \to (S^1)^{\times n}$, implique que f se factorise par l'espace $\mathbf{R}^n$, qui est contractile. Donc f est aussi homotopiquement triviale.

Exercice 9. Remplacer 'bijection' par 'surjection'.

D'abord, on a une application naturelle $\mathrm{Map}(X, E) \xrightarrow{p\circ} \mathrm{Map}(X, B)$, qui respecte la relation d'équivalence d'homotopie, donc il descend en une application $[X, E] \to [X, B]$. La surjectivité, qui est valable déjà au niveau de Map, vient du théorème de relèvement d'application parce que X est simplement connexe (plus la condition technique de connexité par arc locale).

Un exemple de non-injection : on prend le revêtement $p : S^n \to \mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$. On note $i : S^n \to S^n$ l'application antipodale. Alors si n est pair, id_{S^n} est de degré 1, mais i est de degré -1 ; en particulier, $\mathrm{id} \neq i$ dans $[S^n, S^n]$. Mais il est clair que $p \circ i = p \circ \mathrm{id}$.

Pour le contre-exemple, on considère le cas $p : \mathbf{R}^1 \to S^1$, et $X = S^1$, on a alors $[S^1, \mathbf{R}^1] = \{*\}$ parce que $\mathbf{R}^1$ est contractile ; cependant $[S^1, S^1] = \mathbf{Z}$ par l'application de degré.

Exercice 10. L'application de multiplication $m : G \times G \to G$ induit un morphisme de groupe fondamental $m_* : \pi_1(G) \times \pi_1(G) \to \pi_1(G)$. Par la preuve de Exercice 2 de TD2, m_* coïncide la loi de groupe fondamental $\pi_1(G)$. Fixons un point $e \in X$ dans la fibre au dessus de l'élément neutre de G. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, dashed, "\mu"] \arrow[d, "p\times p"] & X \arrow[d, "p"] \\ G \times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd}$$

L'image de la composition $\pi_1(X \times X) \xrightarrow{p_* \times p_*} \pi_1(G \times G) \xrightarrow{m_*} \pi_1(G)$ est contenu dans l'image $p_* : \pi_1(X) \to \pi_1(G)$. Par le théorème de relèvement d'application, on a un unique μ qui rende le diagramme ci-dessus commutatif et tel que $\mu(e, e) = e$. De même, on a un unique ι dans le diagramme suivant tel que $\iota(e) = e$, où i est l'inversion dans G :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\iota"] \arrow[d, "p"] & X \arrow[d, "p"] \\ G \arrow[r, "i"'] & G \end{tikzcd}$$

Pour démontrer que (X, μ, ι) est un groupe topologique, il faut vérifier les commutativités de trois diagrammes (associativité, inversion à gauche et inversion à droite). Comme les diagrammes analogues pour G sont commutatifs, par un comparaison des deux diagrammes par les applications de revêtements, on déduit la commutativité cherchée par l'unicité du relèvement dans le théorème de relèvement d'application. (Trop de diagrammes compliqués à typer, donc j'omette certaine détailles ici. J'espère que j'ai bien expliqué dans le TD.) Par construction (plus précisément, les deux diagrammes commutatifs ci-dessus), $p : X \to G$ est un morphisme de groupes.

Pour l'unicité de la structure de groupe sur X : d'abord c'est clair que dans la preuve ci-dessus, dès qu'on fixe un point dans la fibre d'élément neutre de G, disons $e \in X$, comme l'élément neutre de X, la multiplication et l'inversion sont uniquement déterminées. Néanmoins, le groupe fondamental de G est abélien (voir Exercice 2 de TD 2), donc X est un revêtement galoisien. Si on prend un autre point $e' \in X$ dans la fibre d'élément neutre de G, il existe toujours un automorphisme de revêtement qui envoie e à e' et un isomorphisme des groupes entre (X, e) et (X, e').

Exercice 11. $\pi_1(S^1 \times S^2) = \mathbf{Z}$; Pour les groupes cycliques finis, on introduit l'espace lenticulaire. On fait agir $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sur S^3 librement et proprement discontinument par : l'élément $i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ envoie (x_1, x_2, x_3, x_4) sur

$$\left(x_1 \cos\frac{2\pi i}{n} + x_2 \sin\frac{2\pi i}{n}, -x_1 \sin\frac{2\pi i}{n} + x_2 \cos\frac{2\pi i}{n}, x_3 \cos\frac{2\pi i}{n} + x_4 \sin\frac{2\pi i}{n}, -x_3 \sin\frac{2\pi i}{n} + x_4 \cos\frac{2\pi i}{n}\right).$$

Alors le quotient est de groupe fondamental $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Exercice 12. D'abord, par le théorème de relèvement d'application (S^2 est simplement connexe), il existe un relèvement :

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\pi"] & S^2 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \end{tikzcd}$$

Montrons que $\widetilde{f}$ est *impaire* au sens que $\widetilde{f}(-x) = -\widetilde{f}(x)$. Pour n'importe quelle paire de points antipodaux $x, -x \in S^2$ de départ, on prend le demi-équateur reliant x et $-x$, appelé γ, alors $\pi(\gamma)$ est un lacet de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ qui représente le générateur de $\pi_1(\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}})$. Par l'hypothèse, $f_*(\pi(\gamma))$ est non-trivial dans $\pi_1(\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}})$ à l'arrivé. On suppose par l'absurde que $\widetilde{f}(x)$ et $\widetilde{f}(-x)$ ne sont pas antipodaux, *i.e.* ils sont égaux, alors $\widetilde{f}(\gamma)$ est un lacet dans S^2 d'arrivé, donc $\pi_*(\widetilde{f}(\gamma))$ est trivial dans $\pi_1(\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}})$ à l'arrivé. D'où une contradiction. Autrement-dit, on a forcement $\widetilde{f}(-x) = -\widetilde{f}(x)$.

Exercice 13. 1. Trivial.

2. On réalise L comme le groupe fondamental de $X := \bigvee_{i=1}^n S^1$. Par la correspondance galoisienne, H est le groupe fondamental d'un revêtement de X à k feuilles, noté $p : Y \to X$. Par 1, Y est aussi un graphe fini. On compte son caractéristique d'Euler :

$$\chi_{top}(Y) = k \cdot \chi_{top}(X) = k(1 - n).$$

Par le calcul de Exercice 15(2) de TD 2, on obtient le groupe fondamental de Y est le groupe libre à $1 - \chi_{top}(Y) = 1 - k + kn$ générateurs.

3. Il suffit de construire un revêtement $p : \vee^n S^1 \to S^1 \vee S^1$. Voir les exemples (1)(3) de Page 58 du livre de Hatcher.

Exercice 14. On rappelle le théorème de correspondance galoisienne de revêtements :

Théorème Soit X un espace topologique 'raisonnable' (connexe par arc, localement connexe par arc et semi-localement simplement connexe). Soit $x \in X$ un point. Alors le foncteur 'fibre au-dessus de x' induit une équivalence de catégories :

$$\{\{\text{revêtements de } X \text{ (connexes, resp. finis)}\}\} \xrightarrow{F} \{\{\pi_1(X, x)\text{−ensembles (transitifs, resp. finis)}\}\},$$

où les morphismes de la catégorie à gauche sont des application continues au-dessus de X, les morphismes de la catégorie à droite sont des applications $\pi_1(X, x)$-équivariantes.

De plus, les revêtements galoisiens correspond aux $\pi_1(X, x)-$ensembles de la forme $\pi_1(X, x)/N$ pour N un sous-groupe normal.

Par le théorème de correspondance galoisienne ci-dessus, il suffit de démontrer l'énoncé suivant : soit G un groupe, N un sous-groupe normal de G, alors tout endomorphisme comme G-ensemble de G/N est un automorphisme. (Un exercice de la théorie de groupe facile, j'omette la preuve.)

En fait, on peut faiblir l'hypothèse de 'galoisien' considérablement : il suffit de supposer que le sous-groupe correspondant le revêtement, noté $H < G$, satisfait la propriété suivante : [si H contient un conjugué gHg^{-1}, alors ils sont égaux.]

Voici une solution rapide dans le cas galoisien : soit $p : E \to B$ un revêtement galoisien, soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Comme E est galoisien, quitte à composer f avec un automorphisme de E, on peut supposer que f fixe un point de E. Mais on rappelle qu'un morphisme entre deux revêtements est déterminé par l'image d'un point, donc f est l'identité. En tenant-compte l'automorphisme qu'on a composé avec, on conclut que f est un automorphisme en générale.

Exercice 15. Même démonstration pour le cas qu'il existe un revêtement universel.

Exercice 16. 1. Un calcul direct. Voici quelques motivations : $H_0 = su_2$ est l'algèbre de Lie (réelle !) du groupe de Lie (réel) $SU_2(\mathbf{C})$, sur laquelle, $SU_2(\mathbf{C})$ agit par conjugaison, appelé la *représentation adjointe*. Le produit scalaire est en fait proportionnel à la forme de Killing sur su_2, qui est bien sûr préservé par la représentation adjointe.

2. Comme le noyau est discret, l'application tangente est un isomorphisme, donc ϕ est un homéomorphisme (difféomorphisme) local. En particulier, ϕ est une application ouverte. L'image, qui est un sous groupe de $SO_3(\mathbf{R})$, contient un petit ouvert de l'élément neutre de $SO_3(\mathbf{R})$, qui engendre tout $SO_3(\mathbf{R})$. Donc ϕ est surjective.

3. Puisque ϕ est un homéomorphisme (difféomorphisme) local, à fibres finies de cardinale 2. Par Exercice 2(2)(a), ϕ est un revêtement à deux feuilles. Comme $SU_2(\mathbf{C})$ est homéomorphe à S^3 qui est simplement connexe, on déduit que $\pi_1(SO(3)) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exercice 17. D'abord, on note le lemme suivant (*cf.* Hatcher Chapitre 0, Page 16, Corollaire 0.21) :
Lemme : Si X et Y sont deux espaces topologiques homotopiquement équivalents, alors il existe un troisième espace topologique Z, tel que X et Y sont tous des rétraction par déformation de Z.

Le lemme nous permet de ramener au cas où $X \subset Y$ est un sous espace qui est une rétracte par déformation de Y. On note $\pi : \widetilde{Y} \to Y$ le revêtement universel de Y, et $X' := \pi^{-1}(X)$ le preimage de X dans $\widetilde{Y}$, qui est bien sur un revêtement de X. Comme X est une rétracte par déformation de Y, X' est aussi une rétracte par déformation de $\widetilde{Y}$ (par le relèvement d'homotopie relative à X). Donc X' est contractile, autrement-dit, X' est le revêtement universel de X qui est donc homotopiquement équivalent au revêtement universel de Y.

Exercice 18. Voir par exemple Page 64 - 65 du livre de Hatcher.

Exercice 19. 1. Voir Hatcher *Algebraic Topology* Page 59 ou Page 77.

2(b). Un sous-groupe d'indice deux est toujours un sous-groupe distingué.

2(a), 3. Étudier l'action de monodromie sur la fibre au-dessus du point nodal. J'omette les dessins ici, et j'espère que les dessins que j'ai fait dans le TD sont assez clairs.

Exercice 20. 1. Voir Exercice 9 de TD2.

2. Évident.

3. Par 2, G est exactement le groupe d'automorphisme du revêtement universel $\mathbf{R}^2 \to K$, qui est isomorphe au groupe fondamental de K. On peut vérifier facilement que s correspond à β et t correspond à α. Par 1, $tst = s$ est la seule relation.