Indications de TD 4

Exercice 1. 1. Il est assez directe de vérifier que c'est une relation d'équivalence : pour la réflexivité, on inverse l'orientation de [0,1] ; pour la transitivité, il suffit de reparamétriser [0,2] par [0,1].)

Compatibilité avec la composition : soient H une homotopie de paires entre f et f', alors $g \circ H$ est une homotopie de paire entre $g \circ f$ et $g \circ f'$. Même argument pour la composition de l'autre ordre.

La composition des morphismes dans la catégorie hP est bien-définie puisque cette relation d'équivalence est compatible avec la composition.

2. Par exemple, $X = A = \{*\}$ est un point, $Y = [0,1]$, $B = \{0\}$ et les applications sont données par $f(*) = 0$, $g(*) = 1$.

3. $(iii) \Rightarrow (i)$: Supposons on a une factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "F"'] & & hP \arrow[dl, "\overline{F}"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Soient f et g morphismes de P, alors par définition $[f] = [g]$ est la même chose que $q(f) = q(g)$. Donc $F(f) = \overline{F}(q(f)) = \overline{F}(q(g)) = F(g)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$: On peut construire $\overline{F}$ de la manière suivante : sur les objets, $\overline{F}$ est le même que F, et sur les morphisme, (i) garantit la formule $\overline{F}([f]) := F(f)$ est bien définie. Il suffit de vérifier l'axiome de composition :

$$\overline{F}([f] \circ [g]) = \overline{F}([f \circ g]) = F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) = \overline{F}([f]) \circ \overline{F}([g]).$$

Et $F = \overline{F} \circ q$ provient de la définition.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Soit f un morphisme dans P. Par définition, $[f]$ est un isomorphisme dans hP si et seulement s'il existe un morphisme g dans P, tel que $[f \circ g] = [f] \circ [g] = [\mathrm{id}]$ et $[g \circ f] = [g] \circ [f] = [\mathrm{id}]$. Par (i), on obtient

$F(f\circ g) = F(f)\circ F(g) = \mathrm{id}$ et $F(g\circ f) = F(g)\circ F(f) = \mathrm{id}$, qui implique que $F(f)$ est un isomorphisme dans C.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Pour tout $(X, A) \in \mathrm{Obj}(P)$, on considère les trois morphismes suivants :

$$\begin{aligned} i_0 : (X, A) &\to (X \times I, A \times I) \\ x &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_1 : (X, A) &\to (X \times I, A \times I) \\ x &\mapsto (x, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi : (X \times I, A \times I) &\to (X, A) \\ (x, t) &\mapsto x. \end{aligned}$$

C'est facile que i_0, i_1, π sont des équivalences d'homotopies des paires, *i.e.* $[i_0], [i_1], [\pi]$ sont des isomorphismes dans hP. Par l'hypothèse, $F(i_0), F(i_1), F(\pi)$ sont des isomorphismes dans C. Notons que $\pi\circ i_0 = \pi\circ i_1 = \mathrm{id}$ implique $F(\pi)\circ F(i_0) = F(\pi)\circ F(i_1) = F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$. Donc $F(i_0) = F(\pi)^{-1} = F(i_1)$ parce qu'ils sont des isomorphismes. On a démontré le cas spécial $f = i_0, g = i_1$. Pour le cas général, soient $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ deux morphismes dans P, tels que $[f] = [g]$, alors par définition, il existe un morphisme $H : X \times I \to Y$, tel que $f = H \circ i_0$, $g = H \circ i_1$ et $H(A \times I) \subset B$. Maintenant, d'après le cas spécial, $F(i_0) = F(i_1)$. D'où, $F(f) = F(H\circ i_0) = F(H\circ i_1) = F(g)$.

4. Par le théorème d'invariance d'homotopie des groupes d'homologie relatives, on a (i) de la question précédente. Et (iii) nous permet de conclure.

5. Comme dans 4, il suffit de vérifier (i), qui est le théorème standard de l'invariance par homotopie du groupe fondamental : si $f, g : S^1 \to X$ avec $f(1) = g(1) = x_0$ sont homotopes relative au point base 1, alors $f_* = g_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(X, x_0)$.

Notons que le groupe d'homologie vérifie cette propriété aussi mais pas la propriété suivante : pour un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, le groupe fondamental classifie les revêtements.

Exercice 2. 1. Un groupe peut être vu comme une catégorie à un seul objet, les morphismes correspondent bijectivement aux éléments de ce groupe, et la loi de composition est donnée par la loi du groupe. L'élément neutre est le morphisme d'identité, l'axiome d'associativité pour le groupe est exactement l'axiome d'associativité pour les compositions dans cette catégorie, finalement, l'axiome d'inversibilité pour le groupe nous dit que tous les morphismes dans la catégorie ainsi construite sont des isomorphismes, *i.e.* un groupoïde.

2. Comme montré dans le cours, la composition et l'inversion des chemins sont bien définies modulo l'équivalence d'homotopie aux extrémités.

3. C'est juste le théorème de l'existence et l'unicité de relèvement.

4. (a) On a la notion duale de cofibration. Il est formel de démontrer le lemme suivant (cf. par exemple le livre de Bredon, 'Topology and Geometry' Page 455, Theorem 6.13) : **Lemme** Soit $A \hookrightarrow X$ est une cofibration. Soit Y est un espace topologique. Alors, $C(X, Y) \to C(A, Y)$ est une fibration.
Donc il reste de démontrer que pour une variété V, l'inclusion de n points $i : \{x_1, \cdots, x_n\} \hookrightarrow V$ est une cofibration. Évidement il existe un voisinage $U_1 \coprod \cdots \coprod U_n$ qui se rétracte vers $\{x_1, \cdots, x_n\}$, qui implique que i est une cofibration.

(b) On va construire le foncteur de transport parallèle T. Sur les objets, c'est simplement $T : b \mapsto p^{-1}(b)$ pour chaque $b \in B$. Si on se donne un chemin γ entre deux points b, b' de B, on utilise la propriété de relèvement en prenant $X = p^{-1}(b)$ et f l'inclusion de X dans E, pour obtenir un relèvement $\widetilde{H} : X \times I \to E$. On considère la restriction de $\widetilde{H}$ à $X \times \{1\}$, qui nous donne une application continue $T(b) = p^{-1}(b) = X \to p^{-1}(b') = T(b')$; on l'appelle $T(\gamma)$. Pour vérifier que $T(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ, on utilise l'hypothèse pour $X = I$.

(c) Par connexité par arcs de B, pour toute paire de deux points b et b', il y a un chemin qui leur relie ; autrement-dit, il existe un morphisme γ de b à b' dans le groupoïde $\Pi_1(B)$. Comme tous les morphismes de $\Pi_1(B)$ sont des isomorphismes, son image par un foncteur T reste un isomorphisme : $T(\gamma) : p^{-1}(b) \to p^{-1}(b')$ dans la catégorie $hFib(p)$. C'est-à-dire, les deux fibres sont homotopes.

(d) En général, un foncteur $F : C \to C'$ induit un morphisme de groupes entre les groupes des automorphismes $F : \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(F(X))$ pour chaque objet X dans C. Dans notre situation, $\pi_1(B, b)$ est le groupe des automorphismes de l'objet b dans $\Pi_1(B)$. Donc on a un morphisme de groupes $\pi_1(B, b) \to$

$\mathrm{Aut}(p^{-1}(b))$. On le compose avec le morphisme de groupe naturel $\mathrm{Aut}(p^{-1}(b)) \to \mathrm{Aut}(H_*(p^{-1}(b), R))$, ici on a utilisé le fait que le foncteur d'homologie se factorise par la catégorie homotopique des espaces topologiques. On en déduit la conclusion directement.

Exercice 3. 1. Voir par exemple Page 71 du livre de Gelfand et Manin : 'Methods of Homologicla Algebra'.

2. **Théorème** Soit X un espace topologique 'raisonnable' (connexe par arc, localement connexe par arc et semi-localement simplement connexe). Soit $x \in X$ un point. Alors le foncteur 'fibre au-dessus de x' induit une équivalence de catégories :

$$\{\{\text{revêtements de } X \text{ (connexes, resp. finis)}\}\} \xrightarrow{F} \{\{\pi_1(X, x)\text{−ensembles (transitifs, resp. finis)}\}\},$$

où les morphismes de la catégorie à gauche sont des application continues au-dessus de X, les morphismes de la catégorie à droite sont des applications $\pi_1(X, x)$-équivariantes.

3. Il est un foncteur puisque le groupe fondamental est invariant par homotopie. Il est essentiellement surjectif parce que on peut réaliser chaque groupe de présentation finie comme le groupe fondamental d'un CW-complexe fini : on prend un bouquet de cercles correspondants aux générateurs, puis on fait attacher des 2-cellules pour les relations. Le foncteur de groupe fondamental n'est pas une équivalence de catégorie : le groupe fondamental n'est pas un invariant assez fin pour distinguer les types d'homotopies. Par exemple : le groupe fondamental d'un sphère de dimension 2 et celle d'un point est le même, par contre, ils ne sont pas homotopes.

Exercice 4. 1. Par la méthode de 'chase au diagramme'.

2. Il suffit d'écrire les deux suites exactes longues et aussi les morphismes de comparaison. Le lemme des cinq nous permet de conclure.

Exercice 5. On peut voir le diagramme comme une suite exacte courte des complexes (les trois colonnes sont trois complexes), la suite exacte longue associée nous permet de déduire l'exactitude de la troisième colonne.

Exercice 6. 1. La seule chose à vérifier est la transitivité. Si $f - g = du + ud$ et $g - h = dv + vd$ sont les homotopies, alors $f - h = d(u + v) + (u + v)d$.

2. Pour la composition, si $f - g = du + ud$, alors $fh - gh = d(uh) + (uh)d$ et $hf - hg = d(hu) + (hu)d$.

3. Les morphismes dans la catégorie $K(R-mod)$ et ses compositions sont bien-définie grâce à 1 et 2.

4 Voir Hatcher 'Algbraic Topology', Page 111 113.

Exercice 7. C'est la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de complexes suivante :

$$0 \to \frac{C_\bullet(B)}{C_\bullet(A)} \to \frac{C_\bullet(X)}{C_\bullet(A)} \to \frac{C_\bullet(X)}{C_\bullet(B)} \to 0.$$

Exercice 8. Un typo : remplacer c par x dans la définition de la différentielle. Dernière phrase : f_* induit des isomorphismes en homologie.

1. $\begin{pmatrix} -d_C & f \\ 0 & d_D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -d_C & f \\ 0 & d_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_C^2 & -d_C f + f d_D \\ 0 & d_D^2 \end{pmatrix} = 0.$

2. La suite exacte courte de complexes

$$0 \to D \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{p} C[-1] \to 0$$

est facile à construire : i est l'inclusion naturelle en chaque degré ; en degré j, p est $(-1)^j\pi$ où π est la projection naturelle (on peut dire simplement que p est la projection naturelle avec une signe alternative selon la parité du degré). La suite exacte longue associée est exactement celle dans l'énoncé. La coïncidence de l'application de connexion et f_* vient de la construction de l'application de connexion pour la suite exacte longue. Finalement, f_* induit des isomorphismes en homologie (*i.e.* f est un *quasi-isomorphisme*) si et seulement si les ∂ sont des isomorphismes, si et seulement si $C(f)$ a pour les groupes d'homologie nuls.

Exercice 9. On rappelle qu'on dit que $C(f)$ est *contractile* si les deux morphismes des complexes

$$\mathrm{id}_{C(f)} : C(f) \to C(f),$$
$$0 : C(f) \to C(f)$$

sont homotopes.

On note la suite exacte $0 \to D \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{p} C[-1] \to 0$.

1. Par l'hypothèse, $i = \mathrm{id}_{C(f)} \circ i \sim 0 \circ i = 0 : D \to C(f)$, *i.e.* l'injection $i : D \to C(f)$ est homotope à zéro. On note l'homotopie $h : D \to C(f)[1]$, par définition : $dh + hd = i$. On prétend que $r := \pi \circ h : D \to C$ est un morphisme de complexes :

$$(\pi h)d - d(\pi h) = \pi(i - dh) + d\pi h = \pi i + (d\pi + \pi d)h = 0.$$

De plus, on va vérifier qu'il est un inverse homotopique à droite de f. En effet, on note $\pi' : C(f) \to D$ la projection naturelle, alors on a $\mathrm{id}_D = \pi' i$ et $f\pi + d\pi' = \pi' d$. On en déduit alors :

$$\mathrm{id}_D - fr = \pi' i - f\pi h = \pi'(dh + hd) - f\pi h = (f\pi + d\pi')h + \pi' hd - f\pi h = d\pi' h + \pi' hd.$$

Autrement-dit, $\pi' h$ est une homotopie entre id_D et fr.

2. Même type d'argument que 1 pour obtenir un inverse homotopique à gauche l. Puis si on note l l'inverse homotopique à gauche, r l'inverse homotopique à droite, alors $l \sim l \circ f \circ r \sim r$, donc $f \circ l \sim f \circ r \sim \mathrm{id}$, *i.e.* l est aussi l'inverse à droite.

Exercice 10. 1. C'est une proposition standard dans le cours. La réciproque n'est pas vrai, il suffit de trouve un complexe qui est exact mais pas contractile (alors l'identité est un quasi-isomorphisme mais pas une équivalence de homotopie.) Par exemple, le complexe $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0$.

2. On utilise la propriété de module projective pour construire la rétraction.

3. f est un quasi-isomorphisme implique que le cône $C(f)$ est un complexe exact par Exercice 8. Par construction du cône, tous les termes sont libres, donc $C(f)$ est contractile (par 2.). Finalement, Exercice 9 conclut que f est une équivalence d'homotopie.

Exercice 11. 1. Rien à démontrer.

2. Soit $y : \Delta^2 \to X$ une application continue qui est un 2-chaine singulière de X, donc son bord est un élément typique de B_1. On note y_0, y_1, y_2 les trois sommets, $\gamma_{01}, \gamma_{12}, \gamma_{20}$ les trois chemins. Alors

$$\psi(\partial y) = \psi(\gamma_{01} + \gamma_{12} + \gamma_{20}) = \gamma_{x_0}\gamma_{01}\gamma_{x_1}^{-1}\gamma_{x_1}\gamma_{12}\gamma_{x_2}^{-1}\gamma_{x_2}\gamma_{20}\gamma_{x_0}^{-1} \sim \gamma_{x_0}\gamma_{01}\gamma_{12}\gamma_{20}\gamma_{x_0}^{-1}.$$

Comme le triangle fournit une homotopie pour rétracter le lacet $\gamma_{01}\gamma_{12}\gamma_{20}$. On trouve $\psi(\partial y) \sim \gamma_{x_0}\gamma_{x_0}^{-1}$, qui est homotope au lacet constant. On obtient ainsi un morphisme $H_1(X, \mathbf{Z}) \to \pi_1(X, x_0)_{ab}$. Par définition (si on prend γ_{x_0} le chemin constant) $\psi \circ h = \mathrm{id}$.

3. Le fait que $h(\psi(f))$ est représentée par $f + \gamma_{f(0)} - \gamma_{f(1)}$ vient directement de la définition. Donc pour un 1-cycle, disons $\sum_i f_i$ avec $\sum_i f_i(0) - f_i(1) = 0$. Alors, $h \circ \psi(\sum_i f_i) = \sum_i (f_i + \gamma_{f_i(0)} - \gamma_{f_i(1)}) = \sum_i f_i$, *i.e.* $h \circ \psi = \mathrm{id}$.

Exercice 12. 1. La fonctorialité vient de la fonctorialité du foncteur H_* et la fonctorialité de noyau.

2. Pour $* \geq 1$, $\widetilde{H}_*$, H_* et $H_*(\bullet, \{x\})$ sont le même foncteur (par la suite exacte longue d'homologie relative). Pour $* = 0$, on a d'abord une surjection $\pi_* : H_0(X) \to H_0(\{\mathrm{pt}\}) = \mathbf{Z}$ associée à l'application $X \to \{\mathrm{pt}\}$. On remarque qu'il admet une section induite par $\{x\} \hookrightarrow X$:

$$H_0(\{x\}) \to H_0(X).$$

Donc $H_0(X) \simeq H_0(\{x\}) \oplus \ker(\pi_*) = H_0(\{x\}) \oplus \widetilde{H}(X)$. Or la suite exacte longue d'homologie relative nous donne

$$0 \to H_0(\{x\}) \to H_0(X) \to H_0(X, \{x\}).$$

Donc $H_0(X, \{x\}) = H_0(X)/H_0(\{x\})$, qui est isomorphe à $\widetilde{H}(X)$ par la décomposition en somme directe.

3. Très facile. Comme pour $i \geq 1$, c'est exactement la même suite exacte longue de Mayer-Vietoris. Soit on fait un chase au diagramme pour les $\widetilde{H}_0$, soit on utilise le fait général que le noyau d'un morphisme surjectif entre deux complexes exactes est aussi un complexe exacte.

4. On prend U comme l'union de X et un petit voisinage ouvert du point base dans Y, et U comme l'union de Y et un petit voisinage ouvert du point base dans X. Alors $U \cap V$ est contractile. Par la définition de l'homologie réduite, $\widetilde{H}_*(\{pt\}) = 0$. Donc par la suite exacte longue de Mayer-Vietoris dans 3., on déduit bien l'isomorphisme qu'on cherche.

Exercice 13. 1. C'est une conséquence immédiate de la propriété d'excision d'homologie relative.

2. Comme A est contractile, il existe une application $H : A \times I \to A$ telle que $H|_{A\times\{0\}} = \mathrm{id}_A$ et $H|_{A\times\{0\}}$ est une application constante. On applique la propriété d'extension d'homotopie pour $Y = X$, $f = \mathrm{id}_X$ et $A \times I \to X$ définie par h. On obtient ainsi une application $\widetilde{H} : X \times I \to X$. Par la construction $H|_{X\times\{1\}} : X \to X$ est constante sur A, donc il se factorise par X/A, on note l'application ainsi construite $g : X/A \to X$. Si on appelle $q : X \to X/A$ l'application quotient, alors l'homotopie entre id_X et $g \circ q$ a été fournie par $\widetilde{H}$; $\widetilde{H}$ induit une application $\widetilde{h} : X/A \times I \to X/A$, qui fournit une homotopie entre $\mathrm{id}_{X/A}$ et $q \circ g$.

3 et 4. En général, un push-out d'une cofibration reste une cofibration. Voir par exemple Page 44 du livre de Peter May : 'A concise course in algebraic topology'.

5. $H_*(X, A) \simeq H_*(X \cup CA, CA) \simeq H_*((X \cup CA)/CA, CA/CA) \simeq H_*(X/A, *)$, où la première égalité est par la propriété d'excision, la deuxième vient de 2. qui

nous donne une homotopie des paire : $(X \cup CA, CA) \sim (X \cup CA/CA, CA/CA)$, et la dernière est élémentaire.

Exercice 14. 1. Les colonnes sont bien exactes. La première et deuxième ligne sont exacte par la construction, et donc la troisième est aussi exacte par le lemme des neuf.

2. C'est exactement la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de la troisième ligne dans 1. plus le théorème d'isomorphisme de chaînes $\mathcal{U}$-petites.

Exercice 15. Par Mayer-Vietoris (la version pour l'homologie réduite : Exercice 12), $\widetilde{H}_0(\Sigma X) = 0$ donc $H_0(X; R) \simeq R$; $H_i(\Sigma X; R) = \widetilde{H}_i(\Sigma X; R) \simeq \widetilde{H}_{i-1}(X; R)$ pour $i \geq 1$, donc $H_i(\Sigma X; R) \simeq \widetilde{H}_{i-1}(X; R)$ pour $i \geq 2$ et $H_1(\Sigma X; R) \simeq R^{\oplus \pi_0(X)}$.

Exercice 16. En fait, en contractant Δ^2 et un segment de plus, on voit directement que ce parachute est homotope à un bouquet de deux cercles.

Exercice 17. Comme il n'y a que des cellules de dimension paire, donc les différentielle dans le complexe de chaînes cellulaire sont tous nulles. En conclusion, $H_{2i}(\mathbf{C}\,\mathbf{P}^n) = \mathbf{Z}$ pour $0 \leq i \leq n$ et les restes groupes d'homologie sont nuls.

Exercice 18. 1. Par la formule de Künneth, $H_*(X \times S^n; R) \simeq H_*(X; R) \otimes_R H_*(S^n; R)$ comme R-algèbres graduées. Or $H_*(S^n; R)$ est R en degré 0 et n, nul en autres degrés. Par conséquent, $H_i(X \times S^n) = H_i(X) \oplus H_{i-n}(X)$.

2. La liberté est déjà démontrée dans 1. Pour le rang, la formule de Künneth nous donne $H_*((S^n)^{\times k}; R) = H_*(S^n; R)^{\otimes_R k} = (R \oplus R \cdot t^n)^{\otimes_R k}$ comme R-algèbres graduées, où t est introduit juste pour suivre le degré. Donc $rg(H_{ni}) = \binom{k}{i}$ pour $0 \leq i \leq k$; les restes groupes d'homologie est nuls.

3. $S^d \wedge X = S^1 \wedge \cdots \wedge S^1 \wedge X = \Sigma^d(X)$, la suspension itérée. Donc par le résultat de Exercice 15, on a $\widetilde{H}_i(S^d \wedge X) = \widetilde{H}_{i-d}(X)$ pour tout i, donc $H_i(S^d \wedge X) = \widetilde{H}_{i-d}(X)$ pour tout $i \geq 1$ et $H_0(S^d \wedge X) = \widetilde{H}_0(S^d \wedge X) \oplus R = R$.

Exercice 19. 1. Tous les sous-groupes d'indice deux sont distingués, donc le revêtement est galoisien et le groupe des automorphismes est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

2. D'abord, on prend un recouvrement $\mathcal{U}$ de B par des voisinages ouverts trivialisants, et on note $\mathcal{V}$ le recouvrement correspondant de E (le pull-back de $\mathcal{U}$). On a donc une suite exacte courte des complexes des chaînes $\mathcal{U}$- ou $\mathcal{V}$-petites :

$$0 \to C_*^{\mathcal{U}}(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{t} C_*^{\mathcal{V}}(E, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{p_*} C_*^{\mathcal{U}}(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to 0.$$

La suite exacte longues associée est exactement ce qu'on cherche par le théorème d'isomorphisme des chaînes petites.

3. Comme on a le revêtement $S^n \to \mathbf{R}\mathbf{P}^n$ on peut appliquer la suite exacte dans 2. Or $H_i(S^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ pour $i = 0$ ou n et 0 pour les autres i, on a $H_i(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ pour $i \leq n-1$. Et on sait qu'un CW-complexe a le groupe d'homologie nul pour les degrés plus que la dimension. Donc $H_i(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$ pour $i \geq n+1$. Finalement, la dimension de $H_n(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est de 1 par le fait que la somme alternée des dimensions dans une suite exacte longue finie est 0. Pour résumer : $H_i(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ pour $0 \leq i \leq n$ et 0 pour les autres i.

Exercice 20. 1. Si $n = 0$, alors $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}^{\oplus 2g}$ et $H_2 = \mathbf{Z}$. On suppose maintenant $n \geq 1$, alors $S_g \backslash X$ est homotope à un bouquet des $(n + 2g - 1)$ cercles, donc $H_0 = \mathbf{Z}, H_1 = \mathbf{Z}^{\oplus n+2g-1}$ et $H_2 = 0$.

2. S_g/Y est homotope à $S_g \vee \bigvee^{m-1} S^1$. Donc $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}^{\oplus 2g+m-1}$ et $H_2 = \mathbf{Z}$.

3. Le cas où $n = 0$ est traité dans 2. On suppose $n \geq 1$, alors $(S_g \backslash X)/Y$ est homotope à un bouquet des $(2g + n + m - 2)$ cercles. Donc $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}^{\oplus 2g+m+n-2}$ et $H_2 = 0$.

Exercice 21. La bouteille de Klein est un bouquet de deux cercle a et b avec un 2-cellule attachée selon $aba^{-1}b$, donc $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = (\mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b)/(2b) \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $H_2 = 0$.

Exercice 22. Il faut rajouter une hypothèse : le rang de A_0 est un groupe libre de rang au moins 1.

En utilisant la dernière formule de Exercice 12, il suffit de construire pour chaque $i \in \mathbf{N}$, un espace X_i satisfaisant $\widetilde{H}_*(X) = \widetilde{H}_i(X) = \mathbf{Z}$ et pour chaque $i \in \mathbf{N}^*$ et chaque $m \in \mathbf{N}^*$ un espace Y_i satisfaisant $\widetilde{H}_*(Y) = H_i(Y) = \mathbf{Z}/m$. Pour X_i on peut prendre S^i ; et pour Y_i, on fait attacher une $(i+1)$ cellule D^{i+1} à la sphère S^i par l'application d'attachement $S^i = \partial D^{i+1} \to S^i$ qui est une application de degré m.

Exercice 23. Par le théorème de Jordan, on peut supposer que le plongement f est le standard. La partie intérieure est contractile. La partie extérieure est homéomorphe à $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$, donc homotope à S^{n-1}.

Exercice 24. On peut calculer les groupes d'homologie d'un tore par la formule de Künneth, et les groupes de homologie de $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ par Exercice 12. Le résultat : $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}^{\oplus 2}$ et $H_2 = \mathbf{Z}$. Ils ne sont pas homotopiquement équivalents parce que leur groupes fondamentaux ne sont pas isomorphes : $\pi_1(T) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ mais $\pi_1(S^1 \vee S^1 \vee S^2) = \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$.

Exercice 25. 1. Par la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, les groupes d'homologie de la droite à n origines sont faciles à calculer : $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}^{\oplus n-1}$.

2. Il a deux composantes connexes par arcs, donc $H_0 = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Or chaque simplexe singulière a pour l'image contenue dans une partie 'finie' par la compacité. Donc $H_i = 0$ pour $i \geq 1$.

3. On demande de plus que $X = \bigcup_n X_n$. Un contre-exemple : $X = S^1$ et $X_n = [1, e^{2\pi i(1-\frac{1}{n})}] \subset S^1$. Alors, X_n sont contractiles et $H_1(X)$ est non-trivial. On peut faire des exemples analogues pour les groupes d'homologie de degré supérieure.

Exercice 26. 1. On va démontrer que ca coïncide avec celle définie par le groupe fondamental pour $n = 1$. En effet, ceci découle du diagramme commutatif suivant et l'isomorphisme de Hurewicz h.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1) \arrow[r, "h", "\simeq"'] \arrow[d, "f_*"'] & H_1(S^1) \arrow[d, "f_*"] \\
\pi_1(S^1) \arrow[r, "h", "\simeq"'] & H_1(S^1)
\end{tikzcd}$$

2. Si f n'est pas surjectif, disons $x \notin \mathrm{Im}(f)$, alors f se factorise par l'espace contractile $S^n \backslash \{x\}$, donc le degré devrait être 0. On peut fabriquer un contre-exemple de la réciproque de la manière suivante : on d'abord envoie la sphère vers un bouquet de deux sphères en écrasant l'équateur en un point ; puis on envoie une sphère identiquement sur la sphère au but, et envoie l'autre sphère sur le but de degré -1 (par exemple, en inversant un coordonnée).

Supposons f est injective. On prétend que f est forcement surjectif. Sinon, f est une application injective vers la sphère avec un point enlevé, *i.e.* $\mathbf{R}^n$, ce n'est pas possible (par exemple par le théorème de Borsuk-Ulam dans Exercice 34). Donc f est une bijection. [On a un autre argument possible pour la bijectivité de f : par le théorème d'invariance du domaine, l'image de f est ouverte. Or par la compacité de S^n, l'image de f est aussi fermée, donc f est surjective.]

Comme S^n est compacte, f est en fait un auto-homéomorphisme. Alors $\deg(f)\deg(f^{-1}) = \deg(\mathrm{id}) = 1$ (le degré est évidement multiplicatif). D'où,

$\deg(f) = \pm 1$. Un contre-exemple de la réciproque peut être construit par la même méthode comme ci-dessus.

3. On utilise un recouvrement qui est symétrique par rapport à la réflexion. Chaque élément de $A \in O_{n+1}(\mathbf{R})$ s'écrit comme une composition de plusieurs réflexions, et $\det(A) = 1$ s'il y en a un nombre pair, $\det(A) = -1$ s'il y en a un nombre impair. Comme l'application antipode est une composition de $n+1$ réflexions, son degré est $(-1)^{n+1}$.

4. C'est une conséquence immédiate du fait que la suite exacte longue de Mayer-Vietoris est naturelle, *i.e.* commute aux morphismes induits par f.

Exercice 27. 1. (a) On peut construire une homotopie directement :

$$H(x,t) := \frac{(1-t)f(x) + t(-x)}{\|(1-t)f(x) + t(-x)\|}.$$

(b) On suppose par l'absurde que f n'admet pas de point fixe et pour chaque $x \in S^{2n}$, $f(x) \neq -x$. Alors par (a), on sait que f est homotope à l'antipode, donc $\deg(f) = (-1)^{2n+1} = -1$. Or si on note ι l'application antipode, alors $f \circ \iota$ n'a pas de point fixe par l'hypothèse géométrique. On utilise (a) encore une fois pour obtenir $f \circ \iota$ est homotope à ι, *i.e.* f est homotope à id, donc $\deg(f) = 1$. On arrive à une contradiction.

2. Chaque élément de G agit par un automorphisme, donc son degré est ± 1. Comme le degré est multiplicatif, on obtient un morphisme des groupes : $f : G \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Par le résultat de 1, on sait que pour un élément non-neutre de G, l'action est homotope à l'antipode, dont le degré est $(-1)^{2n+1} = -1$. C'est-à-dire, le morphisme des groupes f satisfait $\ker(f) = \{e\}$, *i.e.* f est injectif.

3. (a) On suppose la sphère S^{2n-1} est donnée dans $\mathbf{R}^{2n}$ par l'équation $x_1^2 + \cdots + x_{2n}^2 = 1$. Alors un champs de vecteur : en point $(x_1, \cdots, x_{2n})$, le vecteur est $(-x_2, x_1, -x_3, x_4, \cdots, -x_{2n-1}, x_{2n})$.

(b) On considère $f : S^{2n} \to S^{2n}$ comme dans l'énoncé, alors on a toujours $x \perp f(x)$. On remarque que f et $f \circ \iota$ n'ont pas de point fixe. Par le résultat de 1(a), $f \sim \iota$ et $f \circ \iota \sim \iota$. Un calcul de degré nous fournit une contradiction.

Exercice 28. D'abord, on remarque que le degré est défini par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 = H_n(\mathbf{R}^n) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n\backslash\{0\}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "f_*=\deg(f)"] & H_{n-1}(\mathbf{R}^n\backslash\{0\}) = \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, "f_*=\deg(f)"] & 0 = H_{n-1}(\mathbf{R}^n) \arrow[d] \\
0 = H_n(\mathbf{R}^n) \arrow[r] & H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n\backslash\{0\}) \arrow[r, "\simeq"] & H_{n-1}(\mathbf{R}^n\backslash\{0\}) = \mathbf{Z} \arrow[r] & 0 = H_{n-1}(\mathbf{R}^n)
\end{tikzcd}$$

1. Si $f(0) \neq 0$, alors $f : \mathbf{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ se factorise par $\mathbf{R}^n$ qui est contractile. Donc le morphisme sur les groupes d'homologie est nul. On obtient par la remarque précédente que $\deg(f) = 0$.

2. Une sphère centrée à l'origine de rayon suffisamment petit est un générateur de $H_{n-1}(\mathbf{R}^n \backslash \{0\})$. Par l'hypothèse, f envoie une telle sphère à une petite sphère homéomorphe (qui est aussi un générateur de l'arrivée), donc $f : H_{n-1}(\mathbf{R}^n \backslash \{0\}) \to H_{n-1}(\mathbf{R}^n \backslash \{0\})$ est un isomorphisme. Ceci implique que $\deg(f) = \pm 1$ par la remarque au début.

3. D'après 2., $\deg(A) = \pm 1$. Les valeurs de degré étant discrètes, les éléments dans une même composante connexe de $GL_n(\mathbf{R})$ ont le même degré. Donc les matrices de déterminant positif a pour le degré égal à celle de l'identité, qui est 1 ; les matrices de déterminant negatif a pour le degré égal à celle de $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, qui est -1.

4. Comme f est un difféomorphisme local, sa matrice jacobienne est non-dégénérée. On peut prendre l'homotopie suivante :

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tDf(0) \cdot x.$$

Si U est pris suffisamment petit, $H(U \backslash \{0\}, t)$ n'est jamais l'origine.

Exercice 29. 1. Si $k > i$, comme $H_k(S^i) = 0$, on a $H_k(X_i, X_{i-1}) = 0$. Par récurrence ($H_k(X_0)$ est bien nul) et la suite exacte longue relative (précisément l'exactitude de $H_k(X_{i-1}) \to H_k(X_i) \to H_k(X_i, X_{i-1})$), on a $H_k(X_i) = 0$ si $k > i$. Même argument nous donne $H_k(X_i)$. Finalement, la suite exacte est une partie de la suite exacte longue d'homologie relative, en remplaçant $H_i(X_{i-1})$ et $H_{i-1}(X_i, X_{i-1})$ par zéro.

2. (a) Par définition, $d \circ d : H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \to H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$ est la composée :

$$H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \to H_n(X_n) \to H_n(X_n, X_{n-1}) \to H_{n-1}(X_{n-1}) \to H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}),$$

Or les deux flèches au milieu sont deux flèches successives dans la suite exacte longue d'homologie relative pour la paire (X_n, X_{n-1}).

(b) Le diagramme est un peu compliqué à dessiner dans le texte, j'espère que j'ai expliqué dans le TD assez clairement. En gros, c'est une conséquence de la définition plus un chase au diagramme facile.

3. Parce que $C_i^{\mathrm{cell}}(X)$ est un groupe libre de rang fini, et $H_i(X)$ est un sous-quotient de ce groupe.

4. Il suffit de noter que le morphisme de connexion $H_n(X_n, X_{n-1}) \to H_{n-1}(X_{n-1})$ est induit par les applications d'attachement des n-cellules.

Exercice 30. 1. On rappelle d'abord la structure de CW-complexe de $X := \mathbf{RP}^n$: il y a une cellule en chaque dimension $\leq n$; $X_i = \mathbf{RP}^i$ pour $0 \leq i \leq n$; les applications d'attachement sont les quotients naturels $S^i \to \mathbf{RP}^i$. Par un calcul local, on trouve que l'application

$$S^i \twoheadrightarrow \mathbf{RP}^i \twoheadrightarrow \mathbf{RP}^i/\mathbf{RP}^{i-1} \simeq S^i$$

est de degré $(-1)^i + 1$.

Donc le complexe cellulaire est le suivant :

$$0 \to \mathbf{Z} \to \cdots \to \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \to 0.$$

D'où on a l'homologie de $\mathbf{RP}^n$: $H_0 = \mathbf{Z}$; $H_i = \mathbf{Z}/2$ pour $i \leq n$ impair et $H_i = 0$ pour $i \leq n$ pair ; $H_i = 0$ pour $i > n$.

2. Le complexe cellulaire de $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{RP}^2$ est le produit tensoriel du complexe cellulaire de $\mathbf{RP}^2$ avec lui-même :

$$(0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \to 0) \otimes (0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \to 0),$$

qui est le complexe total du bi-complexe suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z} \arrow[r, "2"] \arrow[d, "2"] & \mathbf{Z} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "2"] & \mathbf{Z} \arrow[d, "2"] \\
\mathbf{Z} \arrow[r, "2"] \arrow[d, "0"] & \mathbf{Z} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & \mathbf{Z} \arrow[d, "0"] \\
\mathbf{Z} \arrow[r, "2"] & \mathbf{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbf{Z}
\end{tikzcd}$$

qui est

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{(2,2)} \mathbf{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \mathbf{Z}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \mathbf{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \mathbf{Z} \to 0.$$

On en déduit l'homologie : $H_0 = \mathbf{Z}$; $H_1 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; $H_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; $H_3 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; $H_4 = 0$.

Remarque : on pourrait utiliser la formule de Künneth.

Exercice 31. 1. (a) Il suffit de casser une suite exacte longue en plusieurs suites exactes courtes.

(b) Ceci découle directement de (a).

2. (a) On applique 1(a) au complexe cellulaire.

(b) Les cellules de $X \times Y$ correspondent bijectivement aux produits d'une cellule de X et une cellule de Y, donc $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

(c) On peut d'abord raffiner la structure de CW-complexe sur B telle que chaque cellule est contenue dans un voisinage ouvert trivialisant. Alors le pull-back de cette structure de CW-complexe rend E un CW-complexe. Par la construction, il y a k cellules dans E au-dessus de chaque cellule de B. Donc $\chi(E) = k\chi(X)$.

(d) Au niveau des cellules, l'effet de quotient par A est juste remplacer les cellules de A par un point, donc $\chi(X/A) = \chi(X) - \chi(A) + 1$.

(e) Au niveau de cellules, c'est élémentaire.

3. En terminologie standard, on appelle 'face' pour ce qu'on dit 'facette' ici. ('Facette' est une terminologie standard réservé pour les faces de codimension 1.)

(a) Évident.

(b) Non, parce que $\chi(T) = \chi(S^{\times} S^1) = \chi(S^1)^2 = 0$, mais $2015 - 5987 + 3678 \neq 0$.

(c) La première égalité vient du fait que $\chi(P) = \chi(S^2) = 2$, les restes sont élémentaires. Dans la première équation, on remplace s par $\frac{2a}{q}$ et f par $\frac{2a}{p}$. On obtient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}.$$

La liste :

- $p = q = 3$, P est un tétraèdre ;
- $p = 3, q = 4$, P est un octaèdre ;
- $p = 4, q = 3$, P est un cube ;
- $p = 3, q = 5$, P est un icosaèdre ;
- $p = 5, q = 3$, P est un dodécaèdre.

Voir par exemple : http ://en.wikipedia.org/wiki/Regular_polyhedra

Exercice 32. Dans (2), on suppose que K est compact.

En tout cas, ils sont des vraies propositions, donc je trouve qu'il vaut mieux de les démontrer !

(4) est évident en utilisant la notion de degré.

(3) est une conséquence de (4) parce qu'une application de source S^{n-1} s'étend

sur D^n si et seulement si elle est homotope à une application constante.
(1) : on considère $x \mapsto \frac{x-f(x)}{\|f(x)-x\|}$, et utilise (3) ensuite.
(2) : On peut ramener (2) à (1) par Exercice 1 de TD1.
(5) : s'il existe un point x de D^n qui n'est pas dans l'image de f, alors on a une application continue $f : D^n \to \mathbf{R}^n \backslash \{x\}$. La restriction de f à S^{n-1} induit donc l'identité sur les groupe d'homologie. Mais on sait que f s'étend en une application sur D^n, qui implique que la restriction de f à S^{n-1} est homotope à une application constante, donc f devrait induire le morphisme nul sur les groupes d'homologie. C'est une contradiction.
(6) : On utilise (1) pour le composé $f \circ g$, où $f : \mathbf{R}^n \to D^n$ est définie par $f(x) = x$ si $\|x\| \leq 1$; $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ si $\|x\| \geq 1$.

Exercice 33. 1. Si f n'a pas de point fixe, par le 1. de Exercice 27, f est homotope à l'application antipode. Donc $\deg(f) = \pm 1$ (dépend de la parité de n). Mais si f est homotopiquement triviale, *i.e.* f homotope à une application constante, alors $\deg(f) = 0$, qui est une contradiction.

2. On définit $\Delta := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_i \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_n = 1\}$. Alors Δ est homéomorphe à un disque D^{n-1}. On considère $f : \Delta \to \Delta$ définie par $x \mapsto \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$. On conclut par le théorème de Brouwer.

3. Il est facile de vérifier que $\phi : [0,1]^n \to \mathbf{R}^n$ est une application continue à valeurs dans $[0,1]^n$. On obtient ainsi un endo-morphismes de $[0,1]^n$ qui est homéomorphe à un disque de dimension n. Par le théorème de Brouwer, il existe un point fixe de ϕ, qui dit exactement que f s'annule en ce point.

Exercice 34. 1. En fait, f et $\overline{f}$ induisent morphismes de suites exactes courtes de complexes des chaînes petites :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_*^{\mathcal{U}_1}(\mathbf{R}\,\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\overline{f}_*"] & C_*^{\mathcal{V}_1}(S^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "f_*"] & C_*^{\mathcal{U}_1}(\mathbf{R}\,\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_*^{\mathcal{U}_2}(\mathbf{R}\,\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \arrow[r, "t"] & C_*^{\mathcal{V}_2}(S^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \arrow[r, "p_*"] & C_*^{\mathcal{U}_2}(\mathbf{R}\,\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{U}_2$ est un recouvrement suffisamment fin (ouverts trivialisants de $\mathbf{RR}^n$ tel que les pull-backs en $\mathbf{R}\,\mathbf{P}^m$ sont aussi des ouverts trivialisants), et $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{V}_1$ sont des pull-backs de $\mathcal{U}_2$. Donc on en déduit que f_* et $\overline{f}_*$ sont morphismes des suites exactes longues de transfert.

(b) Comme $\overline{f}_* : H_0(\mathbf{R}\,\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to H_0(\mathbf{R}\,\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est un isomorphisme, et dans le digramme commutatif des deux suites exactes longues de transfert, il y a des parties du type suivant, pour tout $0 \leq i \leq n-1$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_{i+1}(\mathbf{R}\,\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\overline{f}_{*,i+1}"] & H_i(\mathbf{R}\,\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}_{*,i}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_{i+1}(\mathbf{R}\,\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \arrow[r, "\simeq"] & H_i(\mathbf{R}\,\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Donc par récurrence, $\overline{f}_* : H_i(\mathbf{R}\,\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to H_i(\mathbf{R}\,\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sont des isomorphismes pour tout $0 \leq i \leq n$.

Or il y un carré dans le digramme commutatif des deux suites exactes longues de transfert :

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbf{R}\,\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}_*", "\simeq"'] & H_n(S^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0 \arrow[d, "f_*"] \\
H_n(\mathbf{R}\,\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \arrow[r, "\simeq"] & H_n(S^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}
\end{tikzcd}$$

Mais ce n'est pas possible parce que un composé nous donne un isomorphisme et l'autre nous donne 0.

2. On suppose par l'absurde que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout $x \in S^n$. On considère l'application continue $g : S^n \to S^{n-1}$ définie par $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$. Clairement, g est impaire : $g(x) = -g(-x)$. Alors, 1. nous permet de conclure.

Exercice 35. 1. On applique le théorème de Borsuk-Ulam à $f = (f_1, \cdots, f_n) : S^n \to \mathbf{R}^n$, qui est définie par $f_i(x) := dist(x, A_i)$.

2. Les hyperplans orientés de $\mathbf{R}^n$ avec les deux hyperplans à l'infinie sont paramétré par la sphère S^n en associant les vecteur normal unité. (Proprement-dit, on complète d'abord $\mathbf{R}^n$ par $\mathbf{R}\,\mathbf{P}^n$ en ajoutant l'hyperplan à l'infinie. Alors, les hyperplans de $\mathbf{R}\,\mathbf{P}^n$ sont des hyperplans de $\mathbf{R}^n$ avec l'hyperplan à l'infinie qu'on ajoute. Comme $\mathbf{R}\,\mathbf{P}^n$ peut être aussi vu comme l'espace des droites dans $V = \mathbf{R}^{n+1}$. Donc les hyperplans de $\mathbf{R}\,\mathbf{P}^n$ sont identifiés naturellement aux hyperplans de V, qui sont paramétré par l'espace projectif dual $\mathbf{P}(V^*) \simeq \mathbf{R}\,\mathbf{P}^n$. Si on considère de plus les orientations, c'est un revêtement double de $\mathbf{P}(V^*)$, qui est homéomorphe à la sphère S^n.)

On considère $f = (f_1, \cdots, f_n) : S^n \to \mathbf{R}^n$, qui est par définition $f_i(v)$ est la mesure de A_i dans la partie positive de l'hyperplan orienté paramétré par v. Puis, le théorème de Borsuk-Ulam nous fournit un hyperplan H tel que pour chaque i, la mesure de A_i dans la partie positive est égale à celle dans la partie négative, (donc H n'est pas l'hyperplan à l'infinie) autrement-dit, H coupe A_i en deux parties de mesure égale.