TD : feuille n°1
Notions de base.

Les exercices marqués du symbole ☕ sont des exercices à faire en priorité. Ce sont des grands classiques. Les résultats de certains d'entre eux seront utilisés dans des cours ou dans des exercices ultérieurs.

1 Espaces topologiques, homéomorphismes et quotients

☕Exercice 1. Corps convexes.

Un *corps convexe de* $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble K compact, convexe, d'intérieur non vide, et contenant 0 dans son intérieur.

1. Montrez que la formule suivante définit une norme sur $\mathbb{R}^n$:

$$N(x) = \inf\{\lambda \in]0; +\infty[\quad | \ \frac{1}{\lambda}x \in K\} \ .$$

2. Montrez que K est homéomorphe à D^n et que la frontière de K est homéomorphe à S^{n-1}.

☕Exercice 2. Compactification d'Alexandroff.

Soit X un espace topologique localement compact. On munit $X^+ = X \cup \{\infty\}$ de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de X, et les complémentaires dans X^+ des compacts de X.

1. Vérifiez que X^+ est bien un espace topologique.
2. Montrez que X^+ est un espace compact. Montrez que le sous-ensemble $X^+ \setminus \{\infty\}$, muni de la topologie induite est homéomorphe à l'espace X de départ.
3. Montrez que la topologie définie sur X^+ est l'unique topologie telle que
   (a) X^+ est compact
   (b) Le sous-espace $X^+ \setminus \{\infty\}$ est homéomorphe à X.
4. Montrez que $(\mathbb{R}^n)^+$ est homéomorphe à S^n.

☕Exercice 3. Bouquet d'espaces.

Soit X, X' des espaces topologiques et $x \in X$ et $x' \in X'$. Montrez que le bouquet $X \vee X'$ est homéomorphe au sous-espace $X \times \{x'\} \cup \{x\} \times X'$ de $X \times X'$.

☕Exercice 4. Tore.

Le tore est l'espace topologique T, quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x, 0) = (x, 1)$ et $(0, y) = (1, y)$. Montrez que T est homéomorphe aux espaces suivants.

(a) Le produit $S^1 \times S^1$.
(b) Le quotient de $\mathbb{R}^2$ sous l'action du groupe discret $\mathbb{Z}^2$ agissant par translations.
(c) Le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ (c'est à dire l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$, qu'on peut obtenir comme image d'un point du cercle du plan $\{y = 0\}$ de centre $(2, 0, 0)$ et de rayon 1, par une rotation d'axe (Oz))

Exercice 5. Séparabilité des quotients.

1. Soit A un sous-espace compact d'un espace topologique séparé X. Montrez que X/A est séparé.
2. Soit G un groupe compact agissant sur un espace topologique séparé X. Montrez que l'espace des orbites X/G est séparé.
3. Le groupe $GL_n(\mathbb{C})$ agit sur $M_n(\mathbb{C})$ par conjugaison. Montrez que l'espace des orbites $M_n(\mathbb{C})/GL_n(\mathbb{C})$ est non séparé.

Exercice 6. Sphères et groupes orthogonaux.

On considère le groupe orthogonal $O_{n-1}(\mathbb{R})$ comme le sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de la forme $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$. Le groupe $O_{n-1}(\mathbb{R})$ agit sur $O_n(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche. Montrez que le quotient $O_n(\mathbb{R})/O_{n-1}(\mathbb{R})$ est homéomorphe à S^{n-1}.

☕**Exercice 7. Espaces projectifs.**

On rappelle que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'espace $\mathbb{K}P^n$ est le quotient de $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ par l'action du groupe multiplicatif $\mathbb{K}^*$ agissant par homothéties.

1. (a) Le sous-groupe $\{\pm 1\}$ de $\mathbb{R}^*$ agit sur S^n par multiplication. Montrez que le quotient $S^n/\{\pm 1\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^n$.
   (b) Le sous-groupe S^1 de $\mathbb{C}$ constitué des nombres complexes de module 1 agit sur $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par multiplication. Montrez que le quotient S^{2n+1}/S^1 est homéomorphe à $\mathbb{C}P^n$.
2. Montrez que $\mathbb{R}P^1$ est homéomorphe à S^1.
3. Montrez que $\mathbb{C}P^1$ est homéomorphe à S^2.

Exercice 8. La droite à deux origines.

On appelle droite à deux origines l'espace topologique X obtenu en recollant deux copies de $\mathbb{R}$ le long du sous-espace $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrez que tout point de X admet un voisinage ouvert homéomorphe à un disque D^1, mais que X n'est pas une variété topologique.

Exercice 9. Connexité dans les variétés topologiques.

Soit X une variété topologique de dimension n.

1. Montrez que X est connexe si et seulement si X est connexe par arcs.
2. Montrez que si X est connexe, alors pour tous points x et y de X, il existe un homéomorphisme de X envoyant x sur y. (On pourra commencer par traiter le cas d'un disque ouvert de $\mathbb{R}^n$)

2 Homotopies et π_0

☕**Exercice 10. Ruban de Moebius**

Le ruban de Moebius est l'espace topologique M, quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x,0) = (1-x,1)$. Dessinez M. Montrez que M a le même type d'homotopie que S^1.

☕**Exercice 11. Alphabet**

Regroupez les lettres capitales de l'alphabet latin par type d'homotopie. (On admettra - ce qu'on démontrera dans le chapitre 1 du cours - que les lettres A, B et C ne sont pas homotopiquement équivalentes.)

Exercice 12. Type d'homotopie d'un produit et d'un complémentaire

1. Si X et X', resp. Y et Y', sont des espaces topologiques homotopiquement équivalents, montrez que $X \times Y$ et $X' \times Y'$ ont même type d'homotopie.
2. Soit E un sous-espace de dimension k de $\mathbb{R}^n$, avec $k < n$. Montrez que $\mathbb{R}^n \setminus E$ a le même type d'homotopie que S^{n-k-1}.
3. Soit C un sous ensemble convexe borné de $\mathbb{R}^n$. Montrez que $\mathbb{R}^n \setminus C$ a le même type d'homotopie que S^{n-1}.
4. Soit X un espace topologique, et A et B deux sous-espaces de X. Montrez que l'on peut avoir A et B homotopiquement équivalents, sans que $X \setminus A$ et $X \setminus B$ soient homotopiquement équivalents.

☕Exercice 13. Homotopies et Cones.

Le cone CX d'un expace topologique X est l'espace quotient obtenu en écrasant le sous espace $X \times \{0\}$ de $X \times [0,1]$. Soit $q : X \times [0,1] \to CX$ l'application quotient. On note ι_X l'application

$$\iota_X : \begin{array}{ccc} X & \to & CX \\ x & \mapsto & q(x,1) \end{array} .$$

1. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Montrez que f est homotope à une application constante si et seulement s'il existe une application $F : CX \to Y$ telle que $F \circ \iota_X = f$
2. Montre que CS^n est homéomorphe à D^{n+1}.
3. Montrez que pour tout espace X, le cone CX est contractile.

☕Exercice 14. Groupe orthogonal et groupe linéaire

Montrez que l'inclusion $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ est une équivalence d'homotopie. (indication : utilisez Gram-Schmidt)

☕Exercice 15. Groupes de matrices

Pour les groupes de matrices suivants, déterminez s'ils sont compacts ou non, et déterminez leur π_0 :

$$GL_n(\mathbb{C}) \ , \ GL_n(\mathbb{R}) \ , \ O_n(\mathbb{R}) \ , \ SO_n(\mathbb{R}) \ , \ U_n(\mathbb{C}) \ , \ SU_n(\mathbb{C}) \ .$$

☕Exercice 16. Composantes connexes par arcs des espaces fonctionnels.

Soit X un espace compact, Y un espace métrique. On note $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Montrez que deux fonctions f, g sont dans la même composante connexe par arcs de l'espace $\mathcal{C}(X,Y)$ si et seulement si elles sont homotopes.

Exercice 17. Colimite d'une suite d'espaces.

Soient X_k, $k \geq 1$ une famille d'espaces topologiques telle que pour tout k, munie pour tout k d'une application continue $i_{k+1,k} : X_k \to X_{k+1}$. Pour $\ell \geq k$, on note $i_{\ell,k} : X_k \to X_\ell$ la composée $i_{\ell,\ell-1} \circ \cdots \circ i_{k+1,k}$ (et $i_{k,k} = \mathrm{Id}$).

La colimite des espaces X_k est l'espace X_∞ défini comme l'espace topologique quotient de la réunion disjointe $\bigsqcup_{k\geq 0} X_k$ par la relation d'équivalence suivante : $x \equiv y$ si et seulement si il existe $\ell \geq k$ tel que $x = i_{\ell,k}(y)$ ou $y = i_{\ell,k}(x)$.

On note $i_k : X_k \to X_\infty$ la composée $X_k \hookrightarrow \bigsqcup_{k\geq 0} X_k \xrightarrow{q} X_\infty$.

1. Montrez que U est un ouvert de X_∞ si et seulement si pour tout k, $i_k^{-1}(U)$ est un ouvert de X_k.
2. Montrez que la donnée d'une application continue $f : X_\infty \to Y$ est équivalente à la donnée d'une famille d'applications $f_k : X_k \to Y$ telles que pour tout $\ell \geq k$, $f_\ell \circ i_{\ell,k} = f_k$.
3. **Cas d'une colimite de sous-espaces.**
   (a) On suppose que les $i_{k+1,k}$ induisent des homéomorphismes de X_k sur le sous-espace $i_{k+1,k}(X_k) \subset X_{k+1}$. Montrez que i_k induit un homéomorphisme de X_k sur le sous-espace $i_k(X_k) \subset X_\infty$.
   (b) Soit X un espace topologique et $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite croissante de sous-espaces de X. On note $i_{k+1,k}$ l'inclusion de X_k dans X_{k+1}. On suppose que $\cup_{k\geq 0} X_k = X$ et que U est un ouvert de X si et seulement si $U \cap X_k$ est un ouvert de X_k pour tout k. Montrez que l'on a un homéomorphisme $X_\infty \simeq X$.
4. Soit S^∞ la colimite des sphères S^k, lorsque l'application $i_{k+1,k} : S^k \to S^{k+1}$ est l'inclusion de S^k comme équateur de S^{k+1}. Montrez que S^∞ est contractile.

Exercice 18. Un groupe topologique homotopiquement commutatif

On note $GL_\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices infinies de la forme $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_\infty \end{bmatrix}$.

On note $i_n : GL_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_\infty(\mathbb{R})$ l'inclusion donnée par $A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_\infty \end{bmatrix}$. On munit $GL_\infty(\mathbb{R})$ de la topologie où un sous-ensemble U est ouvert si et seulement si pour tout n, $i_n^{-1}(U)$ est ouvert.

1. Montrez que le produit de matrices sur $GL_\infty(\mathbb{R})$ est continu (et fait donc de $GL_\infty(\mathbb{R})$ un groupe topologique).

2. Calculez $\pi_0(GL_\infty(\mathbb{R}))$.
3. Montrez que les applications suivantes sont homotopes.

$$\begin{array}{rccc} f: & GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_{2n}(\mathbb{R}) \\ & A, B & \mapsto & \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_{2n}(\mathbb{R}) \\ & A, B & \mapsto & \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Montrez que $GL_\infty(\mathbb{R})$ est homotopiquement commutatif, c'est à dire que que les applications $(A, B) \mapsto AB$ et $(A, B) \mapsto BA$ sont homotopes.