Topologie algébrique
2012-2013.

TD : feuille n°3
Revêtements

Les exercices marqués du symbole ☕ sont des exercices à faire en priorité. Ce sont des grands classiques. Les résultats de certains d'entre eux seront utilisés dans des cours ou dans des exercices ultérieurs.

1 Définition des revêtements, relèvements

☕Exercice 1. Propriétés topologiques de la base et de l'espace total

Soit $p : E \to B$ un revêtement.

1. Montrez que E est localement connexe (resp. par arcs) si et seulement si B est localement connexe (resp. par arcs)
2. (a) Montrez que si B est séparé, alors E est séparé.
   (b) Montrez que la réciproque est fausse (on pourra considérer le revêtement obtenu en quotientant $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par l'action du groupe $\mathbb{Z}$ donnée par $n \cdot (x, y) = (2^n x, y/2^n)$: on peut montrer que l'action de $\mathbb{Z}$ est totalement discontinue, mais que les orbites des points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ ne sont pas séparables dans le quotient).
3. On suppose E et B séparés, et les fibres finies. Montrez que E est compact si et seulement si B est compact.

☕Exercice 2. Revêtements et homéomorphismes locaux

1. Montrez qu'un revêtement est un homéomorphisme local.
2. (a) Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme local (Y séparé ?). On suppose que toutes les fibres de f sont finies de même cardinal. Montrez que f est un revêtement.
   (b) Donnez un exemple d'homéomorphisme local dont toutes les fibres sont dénombrables, mais qui n'est pas un revêtement.

Exercice 3. Action de groupes, revêtements et variétés quotients

Soit E un espace topologique localement compact. Soit G un groupe discret agissant continûment sur E. On suppose que l'action de G est

- *Propre* : Pour tout compact $K \subset E$, l'ensemble $G_K := \{g \in G \,|gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.
- *Libre* : Pour tout $x \in E$ et tout $g \in G$, si $gx = x$ alors g est l'élément neutre de G.

1. Montrez que sous ces conditions, l'action de G est totalement discontinue (donc $E \twoheadrightarrow E/G$ est un revêtement).
2. Montrez que le quotient E/G est localement compact (en particulier séparé).
3. Montrez que si E est une variété topologique, alors le quotient E/G est un variété topologique de même dimension.

Exercice 4. Produits de revêtements

Montrez qu'un produit fini de revêtement est un revêtement, mais que c'est faux pour un produit infini (on pourra examiner le cas du produit dénombrable de copies de $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$).

Exercice 5. Construction de revêtements par recollement

Soit F un espace discret. Soit B un espace connexe, muni d'un recouvrement ouvert $(V_i)_{i\in I}$, et pour tout couple (i,j) tel que $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, d'une application continue $g_{j,i} : V_i \cap V_j \to \mathfrak{S}(F)$. On suppose de plus que les $g_{j,i}$ vérifient la relation de cocycle :

$$g_{k,j}(x)g_{j,i}(x) = g_{k,i}(x) \text{ pour tout } x \in V_i \cap V_j \cap V_k.$$

1. On note $\Sigma = \bigsqcup_{i\in I} V_i \times F$. On définit une relation binaire R sur Σ par $(x,f)R(x',f')$ si et seulement si $x = x'$ et $f' = g_{j,i}(x)f$ (avec $x \in V_i$, $x' \in V_j$).
   (a) Montrez que R est une relation d'équivalence sur Σ.
   (b) Montrez que l'application $\Sigma \to B$ qui envoie $(x,f) \in V_i \times F$ sur x, induit un revêtement $\Sigma/R \to B$.
2. Montrez que le revêtement $\Sigma/R \to B$ ainsi construit est l'unique revêtement de B, à isomorphisme près, possédant des trivialisations $\Phi_i : p^{-1}(V_i) \to V_i \times F$ telles que

$$\Phi_j\Phi_i^{-1}(x,f) = (x, g_{j,i}(x)f) \text{ pour } (x,f) \in (V_i \cap V_j) \times F.$$

Exercice 6. Morphismes de revêtements

Soit $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux revêtements. On suppose que E' est connexe par arcs. Soit $h : E \to E'$ un morphisme de revêtements.

1. Montrez que h est surjective.
2. Montrez que h est un revêtement.

Exercice 7. Hypothèse de connexité locale pour le relèvement des applications

Soit $C^- \cup \mathbb{R}^2$ le demi-cercle de centre 0 et de rayon 10 contenu dans le demi plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ la portion du graphe de la fonction $\sin(1/x)$ pour $x \in]0, 2\pi]$, et $\overline{S}$ son adhérence dans $\mathbb{R}^2$.

Le pseudo-cercle X est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$X = [-10, 0] \cup \overline{S} \cup [2\pi, 10] \cup C^- .$$

1. Soit $x \in X$. Montrez que $\pi_1(X, x) = \{1\}$.
2. La projection sur l'axe des abscisse $\overline{S} \to [0, 2\pi]$, induit une application continue de X sur $C^- \cup [-10, 10] \simeq S^1$. Montrez que cette application ne se relève pas en une application $X \to \mathbb{R}$.

Exercice 8. Applications vers un produit de cercles

Soit V une variété topologique de groupe fondamental fini, et soit $f : V \to (S^1)^{\times n}$ une application continue. Montrez que f est homotopiquement triviale.

☕Exercice 9. Revêtements et classes d'homotopies

Si X, Y sont des espaces topologiques, on note $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopies d'applications X vers Y. Si X est simplement connexe et localement connexe par arcs, et $p : E \to B$ est un revêtement, montrez que la composition par p induit une bijection : $[X, E] \xrightarrow{\simeq} [X, B]$. Donnez un contre-exemple si X n'est pas simplement connexe.

☕Exercice 10. Revêtements des groupes topologiques

Soit G un groupe topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs, et soit $p : X \to G$ un revêtement avec X connexe. Montrez que X admet une structure de groupe topologique, unique à isomorphisme près, telle que $p : X \to G$ est un morphisme de groupes.

2 Revêtements galoisiens, classification des revêtements

Exercice 11. Variétés topologiques de groupe fondamental fixé

Construisez une variété topologique compacte de dimension 3 dont le groupe fondamental est cyclique (on pourra distinguer le cas d'un groupe infini, et le cas d'un groupe fini).

Exercice 12. Applications $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$

Soit $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ une application continue telle que $\pi_1(f)$ n'est pas constante. Montrez que f peut se relever en une application $\widetilde{f} : S^2 \to S^2$ telle que $\widetilde{f}(-x) = -\widetilde{f}(x)$.

☕**Exercice 13. Revêtement des graphes et groupes libres**

1. Soit $p : E \to B$ un revêtement de fibres finies. On suppose que B est un graphe fini. Montrez que E est un graphe fini.
2. Soit L un groupe libre à n générateurs et H un sous-groupe d'indice k de L. Montrez que H est un groupe libre, dont on donnera le nombre de générateurs.
3. Montrez que tout groupe libre à n générateurs peut être réalisé comme un sous-groupe du groupe libre à deux générateurs.

Exercice 14. Endomorphismes des revêtements galoisiens

Montrez qu'un endomorphisme d'un revêtement galoisien est un isomorphisme.

Exercice 15. Classification sans hypothèse du revêtement universel

Soit $p : E \to B$ un revêtement galoisien. On dit qu'un revêtement $E' \to B$ est dominé par p s'il existe un morphisme de revêtements $h : E \to E'$.

Montrez qu'on a une bijection entre les classes d'isomorphisme de revêtements $E' \to B$ dominés par p d'un part, et l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(B, b)/p_\sharp\pi_1(E, x)$ d'autre part.

Exercice 16. Revêtement universel de $SO_3(\mathbb{R})$

Notons H_0 l'ensemble des matrices antihermitiennes de trace nulle dans $M_2(\mathbb{C})$. On munit H_0 du produit scalaire correspondant au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ via l'isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & H_0 \\ (x, y, z) & \mapsto & \begin{bmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{bmatrix} \end{array}.$$

1. Montrez que l'application $SU_2(\mathbb{C}) \times H_0 \to H_0$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$ définit une action linéaire de $SU_2(\mathbb{C})$ sur H_0, par des morphismes préservant le produit scalaire. En déduire un morphisme de groupes continu $\phi : SU_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{R})$, de noyau $\{\pm\mathrm{Id}\}$.
2. Montrez que ϕ est surjective.
3. Montrez que ϕ est un revêtement à deux feuillets de $SO_3(\mathbb{R})$, puis calculer le groupe fondamental de $SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice 17. Revêtements universels

Soient X, Y deux espaces localement connexes par arcs et connexes par arcs. On suppose qu'ils admettent des revêtements universels $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$. Montrez que si X et Y sont homotopiquement équivalents, alors $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ sont homotopiquement équivalents. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 18. Construction du revêtement universel

Soit (B, b) un espace topologique pointé, soit P_bB l'ensemble des chemins $\gamma : I \to B$ tels que $\gamma(0) = b$. On note $\widetilde{B}$ l'ensemble quotient de P_bB par la relation d'homotopie à extrémités fixées. L'evaluation d'un chemin en $t = 1$ fournit une application :

$$ev : \widetilde{B} \to B.$$

Le but de cet exercice est de montrer que si B est connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, on peut munir $\widetilde{B}$ d'une topologie telle que $ev : \widetilde{B} \to B$ est un revêtement universel de B.

1. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe par arcs de B tel que $\pi_1(\mathcal{U}, *) \to \pi_1(B, *)$ est triviale, et si $f \in \widetilde{B}$ vérifie $f(1) \in \mathcal{U}$, on note $\mathcal{U}_{[f]}$ l'ensemble :

$$\mathcal{U}_{[f]} = \{[g] \in \widetilde{B} \mid g(1) \in \mathcal{U} \text{ et } g \text{ est homotope à extrémités fixées à } f\alpha, \text{ avec } \alpha \text{ un chemin de } \mathcal{U}.\}$$

   Montrez que si $[g] \in \mathcal{U}_{[f]}$, alors $\mathcal{U}_{[f]} = \mathcal{U}_{[g]}$.
2. Montrez que ev induit une bijection de $\mathcal{U}_{[f]}$ sur $\mathcal{U}$.
3. Montrez que l'ensemble des parties de la forme $\mathcal{U}_{[f]}$ (pour tout ouvert $\mathcal{U}$ et tout chemin f comme dans la question 1), est la base d'une topologie sur $\widetilde{B}$. (c'est à dire que les réunions de telles parties forment une topologie de $\widetilde{B}$)
4. Montrez que ev est une application continue, ouverte, et que sa restriction à $\mathcal{U}_{[f]}$ est un homéomorphisme. En déduire que p est un revêtement.
5. Si $F : I \times I \to B$ vérifie $F(0, t) = b$ pour tout $t \in I$, on note $f_t(s) = F(s, t)$.
   (a) Montrez que l'application $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} I & \to & \widetilde{B} \\ t & \mapsto & [f_t] \end{array}$ est un chemin de $\widetilde{B}$ relevant le chemin $f(t) = F(1, t)$.
   (b) Soit $[f] \in \widetilde{B}$. Construisez un chemin de $[\epsilon_b]$ à $[f]$. (donc $\widetilde{B}$ est connexe par arcs)
   (c) Montrez que si $[f] \in \pi_1(B, b)$, l'action de monodromie vérifie $[\epsilon_b] \cdot [f] = [f]$. Déduisez-en le stabilisateur de $[\epsilon_b]$, puis que $\widetilde{B}$ est simplement connexe.

Exercice 19. Revêtements d'un bouquet de deux cercles

1. Déterminez le revêtement universel d'un bouquet de deux cercles.
2. Déterminez tous les revêtements à deux feuillets du bouquet de deux cercles. Montrez qu'en général, un revêtement connexe à deux feuillets est toujours galoisien.
3. Déterminez tous les revêtements connexes à trois feuillets du bouquet de deux cercles. Lesquels sont galoisiens ?

Exercice 20. Revêtement universel de la bouteille de Klein et ses automorphismes

On rappelle que la bouteille de Klein est la surface topologique K obtenue comme quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'identification $(x, 0) = (1 - x, 1)$ et $(0, y) = (1, y)$.

1. Montrez que le groupe fondamental de K est le quotient d'un groupe libre à deux générateurs α, β, par la relation $\alpha\beta\alpha = \beta$ (utilisez l'exercice dans lequel on a déterminé le groupe fondamental de la bouteille de Klein).
2. Montrez que K est le quotient de $\mathbb{R}^2$ sous l'action du sous-groupe G des transformations affines du plan engendré par les applications $t : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$ et $s : (x, y) \mapsto (-x, y + 1)$.
3. Montrez que la seule relation entre les éléments t et s de G est $tst = s$.