Topologie algébrique
2012-2013.

TD : feuille n°4
Homologie singulière

Les exercices marqués du symbole ☕ sont des exercices à faire en priorité. Les résultats de certains d'entre eux seront utilisés dans des cours ou dans des exercices ultérieurs.

1 Algèbre homologique élémentaire

☕Exercice 1. Paires d'espaces, espaces pointés

La *catégorie des paires d'espaces* est la catégorie $\mathcal{P}$ suivante :
- Les objets de $\mathcal{P}$ sont les couples (X, A) où X est un espace topologique et $A \subset X$.
- L'ensemble $\hom_{\mathcal{P}}((X,A),(Y,B))$ est constitué des applications continues $f : X \to Y$ telles que $f(A) \subset B$.
- La composition est la composée usuelle des applications.

Deux applications $f, g \in \hom_{\mathcal{P}}((X,A),(Y,B))$ sont homotopes par une homotopie de paires s'il existe une application continue $H : X \times I \to Y$ telle que $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ et $H(a,t) \in B$ pour tout $x \in X$, tout $a \in A$ et tout $t \in I$.

1. Vérifiez que la relation 'être homotope par une homotopie de paires' est une relation d'équivalence sur $\hom_{\mathcal{P}}((X,A),(Y,B))$, compatible avec la composition. Déduisez-en une *catégorie homotopique des paires d'espaces* $\mathrm{h}\mathcal{P}$ dont les objets sont les paires, dont les morphismes sont les classes d'homotopie des morphismes de paires, et dont la loi de composition est donnée par $[f] \circ [g] = [f \circ g]$.
2. Donnez un exemple de paires (X,A), (Y,B) et d'applications $f, g \in \hom_{\mathcal{P}}((X,A),(Y,B))$ telles que f et g sont homotopes, mais pas homotopes par une homotopie de paires.
3. Notons $q : \mathcal{P} \to \mathrm{h}\mathcal{P}$ le foncteur qui est l'identité sur les objets, et qui envoie un morphisme de paires sur sa classe d'homotopie. Soit $F : \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ un foncteur. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes.
   (i) Pour tous les morphismes f, g de $\mathcal{P}$ tels que $[f] = [g]$, on a $F(f) = F(g)$.
   (ii) Pour tout morphisme$f$ de $\mathcal{P}$, tel que $[f]$ est un isomorphisme de $\mathrm{h}\mathcal{P}$, $F(f)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$.
   (iii) Il existe un foncteur $\overline{F} : \mathrm{h}\mathcal{P} \to \mathcal{C}$ tel que $F = \overline{F} \circ q$.
4. Montrez que le i-ième groupe homologie relative définit un foncteur $\mathrm{h}\mathcal{P} \to R$-mod.
5. On note hTop_* la *sous-catégorie pleine* (= mêmes morphismes, mais moins d'objets) de $\mathrm{h}\mathcal{P}$ dont les objets sont les paires $(X, \{x\})$, avec $x \in X$. Montrez que le groupe fondamental définit un foncteur $\pi_1 : \mathrm{hTop}_* \to \mathrm{Gps}$. Donnez un énoncé qui n'est pas capturé par cette formulation fonctorielle du groupe fondamental.

Exercice 2. Groupoïde fondamental et transport

On appelle *groupoïde* une catégorie dont tous les morphismes sont inversibles.

1. Donnez deux façons de construire un groupoïde à partir d'un groupe G donné.
2. Soit X un espace topologique. Vérifiez que la donnée suivante définit un groupoïde, qu'on appelle groupoïde fondamental de l'espace X, et qu'on note $\Pi_1(X)$. Les objets de $\Pi_1(X)$ sont les points de X, les morphismes de x dans y sont les classes d'homotopies de chemins d'origine x et d'extrémité y, et la loi de composition de $\Pi_1(X)$ est induite par la composition des chemins.
3. Soit $p : E \to B$ un revêtement. On note $\mathrm{Fib}(p)$ la sous-catégorie pleine de Top dont les objets sont les fibres de p. Montrez que la propriété de relèvement des chemins définit un foncteur (dit de 'transport parallèle') [1] :

$$\Pi_1(B)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fib}(p)$$

1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ est la catégorie avec les mêmes objets que $\mathcal{C}$, avec $\hom_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(x,y) := \hom_{\mathcal{C}}(y,x)$, et avec la loi de composition $g \circ_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} f := f \circ_{\mathcal{C}} g$.

4. Plus généralement, soit $p : E \to B$ une *fibration de Hurewicz*. C'est à dire, pour tout diagramme commutatif d'applications continues du type suivant (où j est induite par l'inclusion $\{0\} \hookrightarrow I$),

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$

on peut trouver une application continue $\widetilde{H}$ non nécessairement unique telle que $\widetilde{H} \circ j = f$ et $p \circ \widetilde{H} = H$ (c'est la propriété de relèvement des homotopies).

   (a) Soit V une variété topologique compacte connexe, soit M un espace métrique, et soit $\mathcal{C}(V, M)$ l'ensemble des applications continues, muni de la topologie de la convergence uniforme. Soient $(v_1, \ldots, v_n)$ des points de V. Montrez que l'application suivante est une fibration de Hurewicz

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(V, M) & \to & M^{\times n} \\ f & \mapsto & (f(v_1), \ldots, f(v_n)) \end{array}$$

   (b) Soit $p : E \to B$ une fibration de Hurewicz. On note $\mathrm{hFib}(p)$ la sous-catégorie pleine de hTop dont les objets sont les espaces topologiques $p^{-1}(b)$, $b \in B$. Montrez que l'on peut définir un foncteur de 'transport parallèle'

$$\Pi_1(B)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{hFib}(p)$$

   (c) Montrez que si B est connexe par arcs, toutes les fibres de p ont même type d'homotopie.

   (d) Notons $R\pi_1(B, b)$ la R-algèbre de groupe de $\pi_1(B, b)$. Montrez que pour tout $b \in B$, le transport définit une structure de $R\pi_1(B, b)$-module sur $H_*(F_b; R)$.

☕Exercice 3. Equivalences de catégories

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une *équivalence de catégories* s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) F est *pleinement fidèle*, c'est à dire que pour tout paire d'objets x, y de $\mathcal{C}$, F induit une bijection $\hom_{\mathcal{C}}(x, y) \simeq \hom_{\mathcal{C}}(F(x), F(y))$.

(ii) F est *essentiellement surjectif*, c'est à dire que pour tout objet z de $\mathcal{D}$, il existe un objet x de $\mathcal{C}$ et un isomorphisme $z \simeq F(x)$.

1. Montrez que s'il existe une équivalence de catégories $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ alors il existe une equivalence de catégories $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. (On ne chipotera pas sur l'axiome du choix)
2. Soit B un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Reformulez la classification des revêtements connexes de B comme une équivalence de catégories.
3. Soit hCW_* la sous-catégorie pleine de hTop_* dont les objets sont les espaces topologiques pointés ayant le type d'homotopie de complexes cellulaires finis, et Gps^{pf} la catégorie des groupes de présentation finie. Montrez que le groupe fondamental définit un foncteur essentiellement surjectif $\mathrm{hCW}_* \to \mathrm{Gps}^{pf}$. Est-ce une équivalence de catégories ?

☕☕Exercice 4. Lemme des cinq

1. Démontrez le lemme des cinq : si dans le diagramme commutatif de R-modules suivant, les lignes sont exactes et f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

2. Soit un diagramme commutatif de complexes de chaînes de R-modules, dont les lignes sont des suites exactes courtes de complexes.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & C_3 \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D_1 \arrow[r] & D_2 \arrow[r] & D_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Montrez que si deux des trois morphismes ϕ, ψ, ρ induisent des isomorphismes en homologie alors le troisième également.

Exercice 5. Lemme des neuf

On considère le diagramme de R-modules suivants, dont les lignes sont exactes et dont toutes les colonnes sauf une sont également exactes. Montrez que la dernière colonne est exacte.

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Exercice 6. Catégorie homotopique des complexes de chaînes

Montrez que la relation d'homotopie définit une relation d'équivalence sur $\hom_{\mathrm{Ch}_{\geq 0}(R\text{-mod})}(C_*, D_*)$ et que cette relation est compatible avec la composition. Déduisez-en une catégorie $\mathbf{K}(R\text{-mod})$ dont les objets sont les complexes de chaînes, les morphismes sont classes d'équivalences d'homotopies de complexes de chaînes et dont la loi de composition est donnée par $[f_*] \circ [g_*] = [f_* \circ g_*]$.

Montrez que les chaînes simpliciales relatives définissent un foncteur $\mathrm{h}\mathcal{P} \to \mathbf{K}(R\text{-mod})$.

☕**Exercice 7. Suite exacte longue d'un triplet**

Soient $A \subset B \subset X$ des inclusions d'espaces topologiques. Montrez qu'il existe une suite exacte longue :

$$\cdots \to H_i(B, A; R) \to H_i(X, A; R) \to H_i(X, B; R) \to H_{i-1}(B, A; R) \to \ldots$$

Exercice 8. Cones et equivalences d'homologie

Soit C_* un complexe de chaînes de R-modules. La suspension de C est le complexe de chaines noté $(sC)_*$ défini par $(sC)_0 = 0$, $(sC)_{i+1} = C_i$ pour $i \geq 0$, dont la différentielle $(sC)_{i+1} \to (sC)_i$ est égale à $-d_C$.

Soit $f_* : C_* \to D_*$ un morphisme de complexes de chaines de R-modules. Le cone de f_* est le complexe de chaines noté $C(f)_*$, défini par : $C(f)_0 = D_0$, $C(f)_{i+1} = C_i \oplus D_{i+1}$ pour $i \geq 0$, et la différentielle envoie $(x, y) \in C_i \oplus D_{i+1}$ sur le couple $(-d_C(x), d_D(y) + f_i(c)) \in C_{i-1} \oplus D_i$.

1. Vérifiez que $C(f)_*$ est bien un complexe de chaines.
2. Montrez qu'on a une suite exacte courte de complexes $0 \to D_* \to C(f)_* \to (sC)_* \to 0$. Déduisez-en qu'on a une suite exacte longue en homologie

$$\cdots \to H_i(D) \to H_i(C(f)) \to H_{i-1}(C) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(D) \to \ldots$$

et montrez que le connectant ∂ est égal à l'application $H_{i-1}(f)$. Montrez que f_* induit une équivalence en homologie si et seulement si le cone de f_* a une homologie triviale.

Exercice 9. Cones et equivalences d'homotopies

Soit $f_* : C_* \to D_*$ un morphisme de complexes de chaînes de R-modules, et $C(f)_*$ son cone (voir exercice précédent). On suppose que $C(f)_*$ est contractile.

1. Montrez que l'injection $D_* \to C(f)_*$ est homotope à zéro. Déduisez-en que f admet un inverse homotopique à droite.
2. Montrez que la surjection $C(f)_* \to (sC)_*$ est homotope à zéro. Déduisez-en que f admet un inverse homotopique à gauche, puis que f est une équivalence d'homotopie.

Exercice 10. Equivalences d'homologie vs équivalences d'homotopie

1. Montrez qu'une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes induit une équivalence en homologie, mais que la réciproque est fausse en général.
2. Soit C_* un complexe de chaînes de R-modules, dont tous les objets C_i, $i \geq 0$ sont des R-modules libres. On suppose de plus que l'homologie de C_* vaut zéro en tout degré. Montrez que C_* est contractile.
3. Soit $f_* : C_* \to D_*$ un morphisme de complexes. On suppose que les objets C_i et D_i, $i \geq 0$ sont des R-modules libres. Montrez que f_* induit une équivalence en homologie si et seulement si f_* est une équivalence d'homotopie.

Topologie algébrique
2012-2013.

TD : feuille n°4 (Suite)
Homologie singulière

2 Calculs et applications de l'homologie singulière

2.1 Quelques outils théoriques

Exercice 11. Groupe fondamental et H_1.

Soit X un espace topologique et $x_0 \in X$. On a défini dans le cours l'application de Hurewicz $h : \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}} \to H_1(X)$: si $[\gamma]$ désigne la classe d'homotopie du lacet γ et $[[\gamma]]$ sa classe d'homologie, on a $h([\gamma]) = [[\gamma]]$. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Hurewicz : si X est connexe par arcs, h est un isomorphisme.

Pour tout $x \in X$, on choisit un chemin γ_x d'origine x_0 et d'extrémité x. On définit une application

$$\psi : \{\text{Chemins de } X\} \to \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}$$

qui à un chemin $f : I = \Delta^1 \to X$ associe la classe du chemin $\gamma_{f(0)} \cdot f \cdot (\gamma_{f(1)})^{-1}$.

1. Montrez que ψ induit une application additive $C_1(X; \mathbb{Z}) \to \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}$, encore notée ψ.
2. Montrez que ψ envoie le sous-groupe des bords $B_1(X; \mathbb{Z})$ sur la classe du chemin constant. En particulier ψ induit une application $H_1(X; \mathbb{Z}) \to \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}$, encore notée ψ. Montrez que $\psi \circ h = \mathrm{Id}$.
3. Soit $f : I \to X$ un 1-simplexe simplicial de X. Montrez que la classe d'homologie de $h(\psi(f))$ est représentée par le cycle $f + \gamma_{f(0)} - \gamma_{f(1)}$. Déduisez en que $h \circ \psi = \mathrm{Id}$.

Exercice 12. Homologie réduite

Soit X un espace topologique non vide. On appelle homologie réduite de X le noyau de l'application $H_*(X; R) \to H_*(\{pt\}; R)$ induite par l'unique application $X \to \{pt\}$. On la note $\widetilde{H}(X; R)$.

1. Montrez que l'homologie réduite définit des foncteurs $\widetilde{H}_i(-; R) : \mathrm{hTop} \to R\text{-mod}$.
2. Soit $x \in X$. Montrez que l'on a un isomorphisme $\widetilde{H}_*(X; R) \simeq H_*(X, \{x\}; R)$.
3. Montrez que si X admet une décomposition en deux ouverts $X = U \cup V$,alors on a une suite exacte longue de Mayer-Vietoris :

$$\cdots \to \widetilde{H}_i(U \cap V; R) \to \widetilde{H}_i(U; R) \oplus \widetilde{H}_i(V; R) \to \widetilde{H}_i(X; R) \xrightarrow{\partial} \dots$$
$$\cdots \to \widetilde{H}_0(U \cap V; R) \to \widetilde{H}_0(U; R) \oplus \widetilde{H}_0(V; R) \to \widetilde{H}_0(X; R) \to 0$$

4. Montrez que $\widetilde{H}_*(X \vee Y; R) \simeq \widetilde{H}_*(X; R) \oplus \widetilde{H}_*(Y; R)$ si X et Y sont deux espaces correctement pointés.

Exercice 13. Homologie relative, cofibrations et quotients

Soit (X, A) un paire d'espaces, on note CA le cone de A.

1. Montrez que l'inclusion $(X, A) \subset (X \cup CA, CA)$ induit un isomorphisme en homologie relative.

On appelle cofibration une paire d'espaces (X, A) qui satisfait la propriété d'extension des homotopies suivantes. Si $f : X \to Y$ est une application continue, et $H : A \times I \to Y$ est une application continue telle que pour tout $a \in A$ $H(a, 0) = f(a)$, alors il existe un prolongement $\widetilde{H}$ de H à X tout entier, tel que $\widetilde{H}(0, x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.

$$\begin{tikzcd} A \times I \cup X \times \{0\} \arrow[r, "H \cup f"] \arrow[d, hook] & Y . \\ X \times I \arrow[ur, "\widetilde{H}"'] & \end{tikzcd}$$

2. Si (X, A) est une cofibration et A est contractile, montrez que l'application quotient $X \to X/A$ est une equivalence d'homotopie.
3. Montrez que si A est un espace topologique et si X est obtenu en recollant des cellules à A, alors (X, A) est une cofibration.
4. Montrez que si (X, A) est un cofibration, alors $(X \cup CA, CA)$ est une cofibration.
5. Soit (X, A) une cofibration. Montrez que l'application quotient $X \twoheadrightarrow X/A$ induit pour tout i un isomorphisme : $H_i(X, A; R) \simeq H_i(X/A, *; R)$.

Exercice 14. Suite de Mayer-Vietoris relative

Soit X un espace topologique, et A, B deux ouverts de X. Notons $\mathcal{U} = \{A, B\}$ le recouvrement correspondant de $A \cup B \subset X$ et $C_*^{\mathcal{U}}(A \cup B; R)$ le complexe des chaînes $\mathcal{U}$-petites associé.

1. Montrez qu'on a un diagramme commutatif de complexes, dont les lignes et les colonnes sont exactes.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_*(A \cap B; R) \arrow[r] \arrow[d] & C_*(A; R) \oplus C_*(B; R) \arrow[r] \arrow[d] & C_*^{\mathcal{U}}(A \cup B; R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_*(X; R) \arrow[r] \arrow[d] & C_*(X; R) \oplus C_*(X; R) \arrow[r] \arrow[d] & C_*(X; R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{C_*(X;R)}{C_*(A \cap B;R)} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{C_*(X;R)}{C_*(A;R)} \oplus \frac{C_*(X;R)}{C_*(B;R)} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{C_*(X;R)}{C_*^{\mathcal{U}}(A \cup B;R)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

2. Montrez qu'on a une suite exacte longue en homologie :

$$\cdots \to H_i(X, A \cap B; R) \to H_i(X, A; R) \oplus H_i(X, B; R) \to H_i(X, A \cup B; R) \to H_{i-1}(X, A \cap B; R) \to \dots$$

2.2 Quelques calculs pratiques

Exercice 15. Suspensions

Soit X un espace topologique et ΣX sa suspension. Calculez $H_*(\Sigma X; R)$ en fonction de l'homologie de X.

Exercice 16. Homologie du parachute

Calculez l'homologie du 'parachute' obtenu en recollant les trois sommets de Δ^2. Faites ce calcul de deux façons différentes : à l'aide d'un décomposition cellulaire d'une part, et à l'aide de Mayer-Vietoris d'autre part.

Exercice 17. Homologie des espaces projectifs complexes

Calculez l'homologie des espaces projectifs complexes $\mathbb{C}P^n$.

Exercice 18. Produit et smash produit par une sphère

Soit X un espace topologique pointé et $n \geq 1$.

1. Calculez $H_*(X \times S^n; R)$ en fonction de $H_*(X; R)$.
2. Montrez que pour $k \geq 0$ les groupes d'homologie $H_i((S^n)^{\times k}; R)$ sont libres et donner leur rang.
3. Le smash produit $S^d \wedge X$ est le quotient $S^d \times X/S^d \vee X$. Calculez son homologie.

☕Exercice 19. Transfert pour les revêtements à deux feuillets

1. Soit $p : E \to B$ un revêtement à deux feuillets, avec E connexe, B connexe par arcs et localement connexe par arcs. Rappelez pourquoi un tel revêtement admet un unique automorphisme non trivial g.
2. Montrez que l'application de transfert $t : C_*(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to C_*(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui envoie un simplexe σ sur la somme de ses relèvements est un morphisme de complexes, qui s'insère dans suite exacte longue :

$$\cdots \to H_i(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_i(t)} H_i(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_i(p)} H_i(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_{i-1}(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_{i-1}(t)} \to \dots$$

3. Calculez l'homologie modulo 2 des espaces projectifs réels.

Exercice 20. Homologie des surfaces

Soit S_g la surface de Riemann orientable de genre g. Soient $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ deux ensembles de points distincts de S_g.

1. Calculez l'homologie de $S_g \setminus X$.
2. Calculez l'homologie du quotient S_g/Y.
3. Calculez l'homologie de $(S_g \setminus X)/Y$.

Exercice 21. Homologie de la bouteille de Klein

Calculez l'homologie de la bouteille de Klein.

Exercice 22. Espaces à homologie prescrite

Soients $A_0, A_1, \dots, A_n$ des groupes abéliens de type fini. Construisez un espace topologique X tel que $H_i(X, \mathbb{Z}) = A_i$ si $0 \leq i \leq n$ et 0 si $i > n$.

Exercice 23. Homologie des composantes connexes du théorème de Jordan

Soit $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ un plongement, $n \geq 2$. Calculer l'homologie de chacune des deux composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus f(S^{n-1})$.

Exercice 24. Tore et bouquets de sphères

Montrez que le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ a les mêmes groupes d'homologie singulière que le bouquet $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ mais que ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents.

Exercice 25. Homologie de quelques espaces 'pathologiques'

1. Calculez l'homologie de la droite à deux origines, et plus généralement de la droite à n origines.
2. Calculez l'homologie de l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de la fonction $\sin(1/x)$, $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.
3. Trouvez un espace topologique X, et une suite de parties $(X_n)_{n\geq 0}$ de X, croissante pour l'inclusion, telle que $H_i(X) \neq \lim H_i(X_n)$.

2.3 Théorie du degré

☕Exercice 26. Degré d'une application $S^n \to S^n$ et calcul.

Soit $f : S^n \to S^n$ une application continue. On appelle degré de f le nombre entier $\deg(f)$ tel que pour tout $z \in H_n(S^n; \mathbb{Z})$, $H_n(f)(z) = \deg(f)z$.

1. Montrez que cette notion de degré coincide avec celle définie à l'aide du groupe fondamental.
2. Montrez que si $\deg(f) \neq 0$ alors f est surjective. Donnez un contre-example à la réciproque. Montrez que si f est injective, alors $\deg(f) = \pm 1$. Donnez un contre-example à la réciproque.

3. A l'aide du théorème de Mayer-Vietoris, montrez que le degré d'une réflexion vaut -1. Soit $A \in O_{n+1}(\mathbb{R})$, qu'on restreint en une application $A : S^n \to S^n$. Montrez que $\deg(A) := \det(A)$. Déduisez-en le degré de l'application antipode $x \mapsto -x$.
4. Montrez que le degré d'une application $f : S^n \to S^n$ est égal au degré de sa suspension $\Sigma f : S^{n+1} \to S^{n+1}$.

☕Exercice 27. Applications du degré.

1. **Points fixes et points antipodaux.**
   (a) Montrez que toute application continue $f : S^n \to S^n$ sans point fixe est homotope à l'antipode (on peut remarquer que pour une telle application f l'origine 0 de $\mathbb{R}^{n+1}$ n'appartient jamais au segment $[f(x), -x]$).
   (b) Montrez que si $f : S^{2n} \to S^{2n}$ est une application continue, alors soit f admet un point fixe, soit il existe $x_0 \in S^{2n}$ tel que $f(x_0) = -x_0$.
2. **Groupes agissant librement.** Soit G un groupe agissant librement sur S^{2n}. Montrez que G est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. **Champs de vecteurs.**
   (a) Montrez qu'il existe sur S^{2n+1} un champ de vecteurs tangents continu partout non nul.
   (b) Montrez le 'théorème de la boule chevelue' : sur S^{2n}, tout champ de vecteurs tangents continu s'annule au moins en un point. (Si v_x est un champ de vecteurs tangents, on pourra considérer la fonction $f(x) = v_x/||v_x||$).

Exercice 28. Degré local d'une application

Soit $f : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ une application de paires. On appelle degré de f l'entier $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ tel que $H_n(f)(z) = \deg(f)z$ pour tout $z \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z})$.

On remarque que pour l'application de paires f, l'ensemble $f^{-1}(0)$ est soit vide, soit réduit à $\{0\}$.

1. Si $f(0) \neq 0$, montrez que $\deg(f) = 0$.
2. Si $f(0) = 0$, et que f est un homéomorphisme local au voisinage de 0, montrez que $\deg(f) = \pm 1$.
3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrez que le degré de l'application de paires induite par A est égal au signe du déterminant de A.
4. Supposons que l'application de paires f vérifie $f(0) = 0$ et que f est un difféomorphisme local $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0. Montrez qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ telle que la restriction $f : (\mathcal{U}, \mathcal{U} \setminus \{0\}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ est homotope à l'application linéaire $Df(0)$ par une homotopie de paires. Déduisez-en que $\deg(f)$ est le signe du déterminant de la matrice jacobienne de f.

2.4 Homologie cellulaire

☕Exercice 29. Complexe cellulaire

Soit X un CW-complexe fini, et $X_i \subset X$ son i-ième squelette. On rappelle que la projection $X_i \twoheadrightarrow X_i/X_{i-1}$ induit un isomorphisme (où le bouquet de sphères est indexé par les i-cellules α de X)

$$H_*(X_i, X_{i-1}; R) \simeq H_*(X_i/X_{i-1}, *; R) = H_*(\vee_\alpha S^i_\alpha, *; R) = \textstyle\bigoplus_\alpha H_*(S^i_\alpha, *; R)\ .$$

1. Montrez que $H_k(X_i; R) = 0$ si $k > i$, que $H_k(X_i; R) \simeq H_k(X; R)$ si $k \leq i - 1$ et qu'on a une suite exacte
$$0 \to H_i(X_i; R) \xrightarrow{p_i} H_i(X_i, X_{i-1}; R) \xrightarrow{\delta_i} H_{i-1}(X_{i-1}; R) \to H_{i-1}(X_i; R) \to 0\ .$$
2. Le complexe des chaînes cellulaires est défini par $C^{\mathrm{cell}}_n(X; R) = H_n(X_n, X_{n-1}; R)$, et la différentielle $d : C^{\mathrm{cell}}_n(X; R) \to C^{\mathrm{cell}}_{n-1}(X; R)$ est la composée :
$$H_n(X_n, X_{n-1}; R) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(X_{n-1}; R) \xrightarrow{p_{n-2}} H_i(X_{n-1}, X_{n-2}; R)\ .$$
   (a) Vérifiez que $d \circ d = 0$.

(b) Montrez que $H_*(C^{\mathrm{cell}}(X;R)) \simeq H_*(X;R)$.

3. Soit X un complexe cellulaire fini. Montrez que $H_i(X;\mathbb{Z})$ est un groupe abélien de type fini, et qu'il est engendré par un nombre de générateurs inférieur au nombre de i-cellules de X.
4. Soit $n \geq 2$. Montrez que la restriction de la différentielle $d : H_n(S^n_\alpha, *; R) \to H_{n-1}(S^{n-1}_\beta, *; R)$ est la multiplication par le degré de la composée (où f_α est l'application d'attachement de la cellule d'indice α)

$$S^{n-1}_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X_{n-1} \twoheadrightarrow X_{n-1}/X_{n-2} \twoheadrightarrow S^{n-1}_\beta \ .$$

Exercice 30. Homologie entière des espaces projectifs réels

Calculez l'homologie entière de $\mathbb{R}P^n$ à l'aide du complexe cellulaire.
Calculez l'homologie entière du produit $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$.

☕Exercice 31. Caractéristique d'Euler, CW-complexes et application aux triangulations

1. Soit $(C_i)_{0\leq i\leq n}$ une famille de R-modules libres de rang fini. On appelle caractéristique d'Euler de la famille le nombre entier $\chi(C) = \sum(-1)^i \mathrm{rang}\,(C_i)$.
   (a) Montrez que si C_* est un complexe de $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimensions finies, et de degré borné, alors $\chi(C) = \chi(H(C))$. Montrez que si C_* est un complexe de $\mathbb{Z}$-modules libres de rangs finis et de degré borné, alors $\chi(C)$ est égale à la charactéristique d'Euler de la famille de $\mathbb{Q}$ espaces vectoriels $(H_i(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})_{i\geq 0}$.
   (b) Soient A_*, B_* et C_* sont trois familles finies de R-modules $\Bbbk$-espaces de dimensions finies. On suppose qu'on a une suite exacte longue :

   $$\cdots \to A_i \to B_i \to C_i \xrightarrow{\partial} A_{i-1} \to B_{i-1} \to \cdots \to B_0 \to C_0 \to 0 \ .$$

   Montrez que $\chi(B_*) = \chi(A_*) + \chi(C_*)$.
2. **Caractéristique d'Euler d'un CW-complexe fini.** La caractéristique d'Euler $\chi(X)$ d'un CW-complexe fini X est la somme alternée $\sum(-1)^i n_i$ où n_i est le nombre de cellules de dimension i.
   (a) Montrez que si $\Bbbk$ est un corps, $\chi(X) = \chi(H_*(X;\Bbbk))$.
   (b) Soit X et Y deux CW-complexes finis. Montrez que le produit $X \times Y$ admet une structure de CW complexe fini, et calculer sa caractéristique d'Euler.
   (c) Soit B un CW-complexe fini et $p : E \to B$ un revêtement à k feuillets. Rappelez pourquoi E admet une structure de CW-complexe et calculez sa caractéristique d'Euler.
   (d) Soit X un CW-complexe fini, A un sous-complexe fini de X, montrez que $\chi(X/A) = \chi(X) - \chi(A) + 1$.
   (e) Soit X un CW complexe fini, et A, B deux sous-CW-complexes tels que $A \cup B = X$. Montrez que $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.
3. **Triangulations.**
   Un *complexe simplicial géométrique fini* K est une famille finie de simplexes géométriques de $\mathbb{R}^N$ tels que
   (1) Si $\sigma \in K$, alors les faces de σ sont aussi dans K.
   (2) Si $\sigma, \tau \in K$, alors $\sigma \cap \tau$ est une facette (i.e. enveloppe convexe d'un sous-ensemble de sommets) de σ et de τ, et $\sigma \cap \tau \in K$.
   Un *polyèdre* $|K|$ est un sous espace topologique de $\mathbb{R}^N$ obtenu comme réunion de tous les simplexes d'un complexe simplicial géométrique K.
   Une *triangulation*[2] d'un espace topologique X est un polyèdre $|K|$, muni d'un homéomorphisme $|K| \simeq X$.
   (a) Montrez qu'un polyèdre admet une structure de CW-complexe.
   (b) Peut-on trianguler le tore avec une triangulation comportant 3678 faces, 5987 arêtes, et 2015 sommets ?
   (c) Soit $P \subset \mathbb{R}^3$ un polyèdre régulier possédant s sommets, a arêtes, f faces, et dont toutes les faces ont p cotés et chaque sommet appartient à q faces. Montrez les égalités : $s + f - a = 2$, $qs = 2a$, $pf = 2a$. En déduire que $1/p + 1/q > 1/2$, puis faire la liste des couples p, q possibles.

2. Un théorème de Whitney assure que les variétés différentiables compactes sont triangulables. Les variétés topologiques compactes de petite dimension $(2, 3)$ sont triangulables, mais ce n'est pas vrai en dimension supérieure.

2.5 Théorème de Brouwer et Borsuk-Ulam

Exercice 32. Enoncés équivalents au théorème de Brouwer

Montrez que les énoncés suivants sont équivalents.

(1) Toute application continue $D^n \to D^n$ admet un point fixe.

(2) Si K est un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide, toute application continue $K \to K$ admet un point fixe.

(3) Il n'existe pas d'application continue $D^n \to S^{n-1}$ dont la restriction à S^{n-1} est égale à l'identité.

(4) L'application identité de S^{n-1} n'est pas homotope à une application constante.

(5) Si $f : D^n \to \mathbb{R}^n$ est une application continue telle que $f(x) = x$ pour $x \in S^{n-1}$ alors D^n est contenu dans l'image de f.

(6) Soit $g : D^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors g admet un point fixe, ou il existe $x \in S^{n-1}$ tel que $g(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in [1, +\infty[$.

Exercice 33. Applications du théorème de Brouwer

1. **Un théorème de point fixe.** Montrez que toute application homotopiquement triviale $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ admet un point fixe.
2. **Théorème de Perron-Frobenius.** Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée de taille n, inversible et à coefficients $a_{i,j} \geq 0$. Montrez que A admet une valeur propre strictement positive associée à un vecteur propre dont les coordonnées sont positives ou nulles. (Indication : considérez l'application $\Delta^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$.)
3. **Un théorème des valeurs intermédiaires.** Soit $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, dont on note f_i les composantes. On suppose que pour tout i, et pour tout $x_1, \ldots, x_n$ on a :

$$f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq 0\ .$$

Montrez qu'il existe un point de $[0,1]^n$ où f s'annule. (Indication : si a est un nombre réel, on pose $\overline{a} = \min\{1, \max\{0, a\}\}$. Utilisez la fonction $\phi(x_1, \ldots, x_n) = (\overline{f_1(x_1, \ldots, x_n) + x_1}, \ldots, \overline{f_n(x_1, \ldots, x_n) + x_n})$.)

☕Exercice 34. Theorème de Borsuk-Ulam

1. Supposons qu'il existe $f : S^m \to S^n$ avec $m > n \geq 1$, telle que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^m$.
   (a) Soit $\overline{f} : \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^n$ l'application induite entre espaces projectifs. Montrez que les applications $f, \overline{f}$ définissent un morphisme entre les suites exactes longues de transfert associées au revêtements à deux feuillets $S^m \to \mathbb{R}P^m$, $S^n \to \mathbb{R}P^n$.
   (b) Déduisez-en qu'une telle application f ne peut exister.
2. **Théorème de Borsuk-Ulam.** Soit $n \geq 1$. Montrez que pour toute application continue $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Exercice 35. Applications du théorème de Borsuk-Ulam

1. **Théorème de Lusternik Schnirelmann.** Soient $A_1, \ldots, A_{n+1}$ des fermés de S^n qui recouvrent S^n. Montrez que l'un d'entre eux contient deux points antipodaux.
2. **Théorème du sandwich au jambon.** Soient $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles Lebesgue-mesurables bornés de $\mathbb{R}^n$. Montrez qu'il existe un hyperplan H qui coupe chaque A_i en deux parties de mesure égale.