Indications de TD 1

Exercice 1. 1.(a) On rappelle qu'une *norme* sur $\mathbf{R}^n$ est une application

$$|\bullet| : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty)$$

satisfaisant les trois propriétés suivantes :

(i) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$;

(ii) $|\mu x| = |\mu||x|$ pour tout $\mu \in \mathbf{R}$, $x \in R^n$;

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$.

On démontre ici les trois propriétés suivantes pour N :

(i) $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;

(ii') $N(\mu x) = \mu N(x)$ pour tout $\mu \in \mathbf{R}^+$, $x \in R^n$;

(iii) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$.

Dans notre cas, on observe d'abord que l'ensemble $\left\{\lambda \in (0, +\infty) \ \middle|\ \frac{1}{\lambda} \cdot x \in K\right\}$ est un fermé dans $(0, +\infty)$ (comme K est compact donc fermé), non-vide (parce que 0 est dans l'intérieure de K) et stable par multiplication par un nombre réel ≥ 1 (comme K est convexe donc stable par multiplication par un nombre réel dans $[0, 1]$). D'où, il soit un intervalle de la forme $[a, +\infty)$ pour $a > 0$, soit $(0, +\infty)$ tout entier. Dans le premier cas, $a = N(x)$ et dans le deuxième cas $N(x) = 0$ par définition.

Vérifions les trois conditions : pour (i), $N(0) = 0$ est évident parce que $\lambda \cdot 0 = 0 \in K$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$. Si $N(x) = 0$, alors par le denier paragraphe, $\lambda \cdot x \in K$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$, comme K est compact donc borné, ce n'est possible que pour $x = 0$. Pour (ii'), il suffit de noter le fait que pour $\mu > 0$, $\frac{1}{\lambda}\mu \cdot x \in K$ si et seulement si $\frac{1}{\lambda/\mu} \cdot x \in K$ (noter bien que si K est symétrique, alors on a (ii)). Pour (iii), on peut supposer que $x \neq 0$, $y \neq 0$. Par (i) et le dernier paragraphe, on sait que $\frac{x}{N(x)} \in K$ et $\frac{y}{N(y)} \in K$. Donc par la convexité de K, on a $\frac{N(x)}{N(x)+N(y)} \cdot \frac{x}{N(x)} + \frac{N(y)}{N(x)+N(y)} \cdot \frac{y}{N(y)} \in K$, *i.e.* $\frac{x+y}{N(x)+N(y)} \in K$. Autrement-dit, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

On note $|\bullet|$ pour la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$. On démontre d'abord que $N(\bullet) : \mathbf{R}^n \to (0, +\infty)$ est une application continue. En effet, il existe $r > 0$ tel que $B_r := \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq r\}$ est contenu dans K par le fait que K est d'intérieure non-vide. Ceci implique que pour tout $x \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$, $\frac{x}{|x|} r \in B_r \subset K$. D'où $N(x) \leq \frac{|x|}{r}$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$. Grâce à l'inégalité triangulaire (point (iii) ci-dessus), on a

$$|N(x) - N(y)| \leq \max\{N(x-y), N(y-x)\} \leq \frac{|x-y|}{r},$$

donc N est continue.

1.(b). Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : K & \to & D^n \\ x & \mapsto & \frac{N(x)}{|x|} \cdot x \end{array}$$

où par convention $f(0) = 0$. On prétend que f est continue. C'est clair à tout $x \neq 0$ (parce que $|\bullet|$ et $N(\bullet)$ sont continus grâce à l'inégalité triangulaire). Au point 0, c'est équivalent à la continuité de N au point 0. Par l'argument similaire, on a la continuité de l'application suivante

$$\begin{array}{rcl} g : D^n & \to & K \\ x & \mapsto & \frac{|x|}{N(x)} \cdot x \end{array}$$

On vérifie facilement que f et g sont l'inverse de l'un et l'autre. Ceci démontre bien que $D^n \cong K$.

Pour l'énoncé sur le bord, il suffit de noter que les applications f et g construites ci-dessus peuvent s'étendre sur $\mathbf{R}^n$ tout entier à valeur dans $\mathbf{R}^n$ tout entier, donc donne une auto-homéomorphisme de $\mathbf{R}^n$. En particulier, le bord de D^n correspond bien le bord de K, et f ou g induit bien un homéomorphisme entre les deux bords.

2. En considérant l'espace affine engendré par L, on peut se ramener au cas où L est d'intérieur non vide (supposons que $0 \in L$, prenons une base $\{e_1, \cdots, e_m\}$ de V constituée des éléments de L, alors l'ensemble $\{\sum_i \lambda_i e_i \mid \sum \lambda_i =$

$1, \lambda_i > 0\}$ est un ouvert de V dans L). Par une translation, on peut supposer que 0 est dans son intérieur. Ceci nous permet de conclure par 1(b).

Exercice 2. 1. On vérifie les trois axiomes d'une *topologie* :

- $\varnothing$, X^+ sont bien ouverts. ($\varnothing$ est compact.)
- Une intersection finie des ouverts est ouverte : si tout les ouverts considérés contiennent le point ∞, alors le complément de leur intersection est une union finie des parties compactes de X, donc compacte ; s'il y a au moins un ouvert considéré ne contient pas ∞, alors leur intersection est égale à cet ouvert moins un nombre fini des fermés (compacité implique fermé).
- Une union des ouverts est ouverte : si tout les ouverts considéré ne contiennent pas ∞, alors leur union est encore une partie ouverte de X ; s'il y a un ouvert contient ∞, alors le complément de l'union est une partie fermée du complément de cet ouvert (qui est compact), donc compact.

2. Si on a un recouvrement ouvert de X^+, alors il y au moins un qui contient ∞, dont complément est compact par définition, qui est en fait recouvert par un nombre fini d'ouverts de X. D'où, on a la compacité de X^+.

On a une bijection ensembliste $X^+ \backslash \{\infty\} \to X$, et le fait que les application dans deux sens sont continues est tautologique.

3. La condition (b) doit être remplacée par : (b) L'application d'*identité* : $X^+ \backslash \{\infty\} \to X$ est un homéomorphisme.

Soit X^+ munie de la topologie définie comme avant. Supposons on a une topologie éventuellement différente sur le même ensemble $X \cup \{\infty\}$ vérifiant les deux propriétés (a) (b). On note cet espace topologique par Y. Montrons que les bijections naturelles entre X^+ et Y sont des homéomorphismes. Ici par 'naturelle', on désigne l'application qui est id sur X et envoie le point ∞ à ∞.

- L'application naturelle $f : X^+ \to Y$ est continue. Pour un ouvert U de Y qui ne contient pas ∞, alors $f^{-1}(U)$ est encore ouvert par la condition (b). Pour un ouvert U de Y qui contient ∞, alors $Y \backslash U$ est un fermé de Y. Comme Y est compact par (a), $Y \backslash U$ est aussi un compact de Y, donc un compact de X. Grâce à (b), $X^+ \backslash f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \backslash U)$ est aussi un compact de X. Autrement-dit, $f^{-1}(U)$ est ouvert par la définition de la topologie sur X^+.
- Pour démontrer la continuité de l'application naturelle $g = f^{-1}$, il suffit de démontrer que f est une application (continue) fermée. Chaque

fermé de X^+ est compact (comme X^+ l'est), donc son image est encore compact, donc fermé dans Y.

4. Par le résultat de la question 3. ci-dessus, il suffit de montrer que $S^n \backslash \{\infty\} \cong \mathbf{R}^n$, où ∞ est un point de S^n, disons le pôle nord. La projection stéréographique depuis ∞ établit bien un homéomorphisme $S^n \backslash \{\infty\} \cong \mathbf{R}^n$.

Exercice 3. 1. On rappelle que $X \vee X'$ est par définition l'espace quotient de $X \times \{x'\} \sqcup \{x\} \times X'$ par la relation $(x, x') \sim (x, x')$. On dispose d'une bijection naturelle entre $X \vee X'$ et $\times \{x'\} \cup \{x\} \times X'$. La continuité de l'application de gauche à droit est par définition de la topologie quotient, la continuité de l'application de droit à gauche est aussi facile à démontrer cas par cas.

2. Y et H sont compacts. Par contre, B n'est pas compact.

Exercice 4. $\mathbb{K}P^n$ est le quotient de $\mathbb{K}^{n+1} \backslash \{0\}$ par homothéthies.

1. C'est trivial pour $\mathbf{R}\,\mathbf{P}^1$. Pour $\mathbf{C}\,\mathbf{P}^1$, ils sont tous la compactification d'Alexendroff.

2, $(\mathbf{R}^{n+1} \backslash \{0\})/\mathbf{R}^* = S^n/\{\pm 1\}$ est évident parce que tout vecteur non-nul de $\mathbf{R}^{n+1}$ est représentable par un point en $\S^n$. Dans le cas complexe, comme tout vecteur de $\mathbf{C}^{n+1}$ est représentable par un point dans S^{2n+1}, et la relation d'équivalence venant des homothéthies se réduit sur S^{2n+1} en la relation d'équivalence donnée par l'action de S^1.

Exercice 5. On écrit (a) pour $S^1 \times S^1$, (b) pour $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, etc.
$T \cong (b)$ et $(a) \cong (c)$ sont assez évidents. Puis, comme $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \cong \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, il suffit d'établir un homéomorphisme $S^1 \cong \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, qui est assez facile (par exemple, on peut utiliser l'application exponentielle.)

Exercice 6. 1. Montrons d'abord que pour chaque point $x \notin A$, on peut construire un voisinage V de A et un voisinage U de x tels que l'intersection $U \cap V$ est vide. Pour chaque point $a \in A$, on prend V_a voisinage de a et U_a voisinage de x tels que $V_a \cap U_a = \varnothing$. Par la compacité de A, on peut choisir un sous recouvrement fini de $\{V_a\}_{a \in A}$, noté $\{V_i\}_{i=1}^n$. Alors $U := \bigcap_{i=1}^n U_i$, $V := \bigcup_{i=1}^n V_i$ nous conviennent.

On note x_0 le point dans X/A qui correspond A. Alors le dernier paragraphe traite le cas où un des deux points à considérer est x_0. Dans le cas où deux points $x_1 \neq x_2 \in X\backslash A = (X/A)\backslash\{x_0\}$ sont distincts de x_0, on peut prendre dans X, par le paragraphe précédent, voisinages V_1, V_2 de A et voisinages U_1 de x_1, U_2 de x_2 tels que, $V_1 \cap U_1 = \emptyset$, $V_2 \cap U_2 = \emptyset$. On prend aussi dans X, U_1' voisinage de x_1 et U_2' voisinage de x_2 tel que $U_1' \cap U_2' = \emptyset$, alors $U_1' \cap U_1$ et $U_2' \cap U_2$ descend en deux ouverts disjoints de X/A qui contient x_1 ou x_2 respectivement.

2. On dit qu'un sous-ensemble de X est *saturé*, s'il contient toutes les orbites de ses points ; La saturation d'un sous-ensemble est le plus petit sous-ensemble saturé qui le contient. On remarque que la saturation d'un ouvert est encore ouvert, parce que l'application quotient est toujours ouverte. D'abord, on rappelle le lemme de 'rigidité' suivant :

Lemme : Soit K un espace compact, X un espace séparé, $x \in X$ un point. S'il y a un ouvert U de $K \times X$ qui contient la fibre $K \times \{x\}$, alors, il existe un voisinage V de x dans X, tel que U contient $K \times V$.

Pour montrer l'énoncé, il suffit de montrer qu'on peut séparer deux orbites différentes par des ouverts **saturés**. Soient O_1, O_2 deux telles orbites, on prend d'abord deux ouverts disjoints U_1, U_2 contenant O_1, O_2 respectivement. Fixons un point $x_1 \in O_1$, on considère l'application continue d'action :

$$\begin{aligned} \sigma : G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

L'image réciproque $\sigma^{-1}(U_1)$ est un ouvert de $G \times X$ qui contient la fibre $G \times x_1$ par la construction. On applique le lemme pour obtenir un voisinage ouvert V_1 de x dans X, tel que $\sigma(G \times V_1) \subset U_1$, autrement-dit, $G \cdot V_1 \subset U_1$. On a aussi un voisinage ouvert V_2 de x_2 dans X par la même construction pour un point $x_2 \in O_2$ et U_2. Alors, les deux ouverts saturés $G \cdot V_1$ et $G \cdot V_2$ nous fournissent les voisinages saturés des orbites.

3. L'espace des orbites est l'ensemble des formes de Jordan des matrices de taille $n \times n$. Le problème de non-séparabilité se produit dans le cas des matrices qui ont la même valeurs propres (avec multiplicités) dont leur formes de Jordan sont différentes. Par exemple, on ne peut pas séparer les orbites de la matrice d'identité et la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Parce que, toute matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $a \neq 0$ est dans la même orbite, et l'identité est évidement contenue dans l'adhérence de cette orbite.

Exercice 7. On considère l'action de $O_n(\mathbf{R})$ sur la sphère S^{n-1}. Cette action est clairement transitive et le stabilisateur du point $(1, 0, \cdots, 0)$ est $O_{n-1}(\mathbf{R})$. D'où l'homéomorphisme.

Exercice 8. Chaque point de X admet un voisinage ouvert homéomorphe à un disque D^1. Mais les deux origines ne sont pas séparées.

Exercice 9. 1. Comme X est une variété, il est localement connexe par arc, donc la connexité est équivalente à la connexité par arc.

2. Dans le cas X est un disque ouvert de $\mathbf{R}^n$, la construction est facile et intuitive mais la formule explicite peut être compliquée. Pour donner une formule explicite, on peut faire d'abord le cas d'un carré au lieu d'un disque, puis composer l'homéomorphisme entre eux. Admettons le cas d'un disque, on d'abord définit une relation d'équivalence entre les points de X, on dit $x \sim y$ si la propriété dans l'énoncé est satisfaite. Alors le cas des disques implique que les points dans chaque classe d'équivalence forment une partie ouverte de X, donc aussi fermée (comme le complément des autres classes d'équivalence qui sont ouvertes). Par la connexité de X, on sais qu'il n'y a qu'une classe d'équivalence.

Exercice 10. Par Exercice 1, il suffit de démontrer le cas où $X = \mathbf{R}^n$ et $A = D^n$. Un homéomorphisme entre $\mathbf{R}^n/D^n$ et $\mathbf{R}^n$ est facile à construire.

Exercice 11. 1. Le regroupement est donné par :

- A,D,O,P,Q,R,
- B,
- C,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,S,T,U,V,W,X,Y,Z

2. Il existe une rétraction par déformation forte de M vers S^1 donnée par la contraction de la première coordonnée. Une homotopie $H : M \times I \to M$ entre id_M et la contraction $\pi : M \to M$ qui associe (x, y) le point $(\frac{1}{2}, y)$ est donnée par :

$$H(x, y, t) = \left((1-t)(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}, y\right).$$

3. Par la premiere question du Exercice 12 ci-dessous.

4. Rappel : en fixant une métrique euclidienne, on peut faire le processus de Gram-Schmidt à une matrice non-dégénéré, pour obtenir une décomposition, d'une façon *unique*, comme le produit d'une matrice orthogonale et une matrice triangulaire supérieure dont les éléments de diagonale sont positives. On a donc un homéomorphisme (pas un isomorphisme des groupes !) :

Par Gram-Schmidt, il existe un homéomorphisme $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \simeq \mathbb{O}_n(\mathbf{R}) \times B_n(\mathbf{R})$, où, $B_n(\mathbf{R})$ est constitué des matrices triangulaires supérieures avec éléments de diagonale positives, qui est un corps convexe donc contractile.

Exercice 12. 1. Il suffit de noter les deux faits évidents suivants :

- Loi de composition $(f \times g) \circ (f' \times g') = (f \circ f') \times (g \circ g')$.
- Si H est une homotopie entre f et g, H' est une homotopie entre f' et g', alors $H \times H'$ est une homotopie entre $f \times f'$ et $g \times g'$.

2. $\mathbf{R}^n \backslash E = (\mathbf{R}^{n-k} \backslash \{0\}) \times \mathbf{R}^k \sim \mathbf{R}^{n-k} \backslash \{0\} \sim S^{n-k-1}$, où la première homotopie est donnée par la rétraction de la deuxième coordonnée (une rétraction par déformation forte), la deuxième homotopie est donnée par la rétraction de la direction de rayon (aussi une rétraction par déformation forte)

3. On fait l'argument analogue de Exercice 1 pour démontrer que la paire $(\mathbf{R}^n, C)$ est en fait homéomorphe à la paire $(\mathbf{R}^n, D^n)$.

4. Un exemple un peu trivial : soit X contractile, on prend $A = X$, B un point de X.

Exercice 13. 1. On note par $i : A \hookrightarrow B$ et $j : B \hookrightarrow X$ les inclusions naturelles. Par l'hypothèse, il existent deux applications continues $f : B \to A$ et $g : X \to B$ telles que $f \circ i = \mathrm{id}$, $i \circ f \sim \mathrm{id}$ et $g \circ j = \mathrm{id}$, $j \circ g \sim \mathrm{id}$. Donc $f \circ g \circ j \circ i = \mathrm{id}$ et $j \circ i \circ f \circ g \sim j \circ g \sim \mathrm{id}$, qui impliquent que $f \circ g$ est une rétraction convenable.

2. On recolle les homotopies.

Exercice 14. On utilise le fait que le bord d'un tore plein (qui est homéomorphe à $S^1 \times S^1$) est un rétracte par déformation du complémentaire de l'âme dans ce tore plein.

Exercice 15. 1. Supposons d'abord que telle F existe. Comme f se factorise par CX qui est un espace contractile, f est homotope à une application constante. Réciproquement, si f est homotope à une application constante, alors l'homotopie H entre f est l'application constante est une application (continue) $H : X \times I \to Y$ telle que $H|_{X \times \{0\}}$ est constante. Donc H se factorise en une application continue $F : CX \to Y$. L'application F ainsi construite nous convient.

2. Considère l'application $D^{n+1} \to CS^n$ qui associe un point de D^{n+1} de module r de coordonnée sphérique généralisée θ le point (θ, r) dans CS^n. C'est bien définie aussi pour $r = 0$. C'est bijective, continue, donc un homéomorphisme parce que les deux espaces sont compacts.

3. On dispose d'une rétraction par déformation forte vers le sommet.

Exercice 16. Ce sont des vérifications directes.

Exercice 17. Soit H l'homotopie entre f et g. Supposons f s'étend à $f' : X \to Y$, on considère $(f' : X \to Y, H : A \times I \to Y)$, dont les deux applications coïncident en $A = A \times \{0\}$. Par la définition de cofibration, ils admettent une extension commune $\phi : X \times I \to Y$. Alors $\phi|_{X\times\{1\}} : X \to Y$ est une extension de g.

Exercice 18. On rappelle que la *topologie de la convergence uniforme* ou la *topologie compacte-ouverte* est par définition la topologie engendrée par les ouverts de la forme suivante :

$$O_{K,U} := \{f : C(X, Y) \;\mid\; f(K) \subset U\}.$$

Elle est aussi la topologie sous-jacente de la métrique suivante :

$$d(f, g) := \max\{d_Y(f(x), g(x)) \;\mid\; x \in X\}.$$

L'exercice est complètement tautologique si on connaît le lemme suivant :
Lemme. Soient X, Y comme dans l'énoncé, alors une application $H : X\times I \to Y$ est continue si et seulement si l'application correspondante $G : I \to C(X, Y)$ est continue.
La démonstration du lemme n'est pas totalement triviale, mais standard. Voir par exemple le poly du F.Paulin du cours de topologie §5.2, ou l'exercice 2.2 dans le TD2 de l'année 2011/2012.

Exercice 19. Comme tous les groupes sont en particulier munis de la topologie induite de l'espace ambiant des matrices, pour déterminer la compacité, il suffit de déterminer la bornitude.

- Groupes compacts : $O_n(\mathbf{R})$, $SO_n(\mathbf{R})$, $U_n(\mathbf{C})$, $SU_n(\mathbf{C})$.
- Groupes non-compacts : $GL_n(\mathbf{C})$, $GL_n(\mathbf{R})$.
- Groupes connexes : $GL_n(\mathbf{C})$, $SO_n(\mathbf{R})$, $U_n(\mathbf{C})$, $SU_n(\mathbf{C})$.

– Groupes non-connexes : $GL_n(\mathbf{R})$, $O_n(\mathbf{R})$, ils ont deux composants connexes.

Pour la connexité, par le même argument comme dans l'exercice précédent en utilisant le processus de Gram-Schmidt, il suffit de démontrer les connexités de $SO_n(\mathbf{R})$, $U_n(\mathbf{C})$ et $SU_n(\mathbf{C})$. On montre le cas de $SO_n(\mathbf{R})$ d'abord, par récurrence. On fait agir $SO_n(\mathbf{R})$ sur la sphère S^{n-1}. L'action est évidement transitive, et le stabilisateur du point $(1, 0, \cdots, 0)$ est exactement $SO_{n-1}(\mathbf{R})$. Donc on obtient une application de $SO_n(\mathbf{R})$ vers S^{n-1} dont toutes les fibres sont homéomorphes à $SO_{n-1}(\mathbf{R})$, on souvent écrit de la manière suivante pour ce genre de situation :

$$SO_{n-1}(\mathbf{R}) \hookrightarrow SO_n(\mathbf{R}) \to S^{n-1}.$$

Par la connexité des sphère et l'hypothèse de récurrence, on a bien la connexité de $SO_n(\mathbf{R})$.

Une construction analogue est disponible pour le groupe unitaire ou unitaire spécial (il agit cette fois sur une sphère de dimension impaire plus grande).

Exercice 20. *cf.* la définition de colimite dans Exercice 17 de TD 1 de 2012-2013.

1. GL_∞ est bien la colimite de GL_n, aussi $GL_\infty \times GL_\infty$ est la colimite de $GL_n \times GL_n$. Comme les diagrammes de la forme suivante sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} GL_n \times GL_n \arrow[r] \arrow[d] & GL_n \arrow[d] \\ GL_{n+1} \times GL_{n+1} \arrow[r] & GL_{n+1} \end{tikzcd}$$

le diagramme suivant est commutatif pour tout n :

$$\begin{tikzcd} GL_n \times GL_n \arrow[d] \arrow[dr] & \\ GL_{n+1} \times GL_{n+1} \arrow[r] & GL_\infty \end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle de colimite dans Exercice 17 point 2, la multiplication de GL_∞ est continue.

2. L'application de déterminant

$$GL_\infty(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^*$$

est bien définie (continue) par la propriété universelle. Donc pour montrer que $GL_\infty(\mathbf{R})$ a deux composantes connexes, il suffit de prouver la connexité de $GL_\infty^+(\mathbf{R})$. Mais c'est évident : parce que chaque élément est en fait contenu dans une partie finie, où il existe un chemin reliant cet élément au point d'identité, qui reste un chemin dans GL_∞.

3. On remarque d'abord qu'il suffit de démontrer que les deux inclusion suivantes sont homotopes :

$$\begin{array}{rcl} i : GL_n & \to & GL_{2n} \\ A & \mapsto & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} j : GL_n & \to & GL_{2n} \\ A & \mapsto & \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \end{array}$$

En effet, $f = \mu \circ (i \times j)$ et $g = \mu \circ (i \times i)$, où μ est l'application de multiplication de GL_{2n}. Pour montrer $i \sim j$. On considère l'homotopie suivante :

$$H(A,t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cdot A & -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cdot A \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cdot I & \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cdot I \end{pmatrix}.$$

Notons que $\det H(t,A) = \det(A) \neq 0$. H est une homotopie qui relie $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 0 & -A \\ I & 0 \end{pmatrix}$. De même, on peut construire une autre homotopie similaire qui relie $\begin{pmatrix} 0 & -A \\ I & 0 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

4. Le fait que $i \sim j$ démonté ci-dessus nous permet de déduire également que l'application suivante

$$\begin{array}{rcl} f' = \mu \circ (j \times i) : GL_n \times GL_n & \to & GL_{2n} \\ B, A & \mapsto & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \end{array}$$

est homotope à $g = \mu \circ (i \times i) : B, A \mapsto \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

Par conséquent, si on note $\iota : GL_n \times GL_n \to GL_n \times GL_n$ l'application 'flip' qui échange deux coordonnées, alors

$$g \sim f = f' \circ \iota \sim g \circ \iota.$$

En conclusion, l'application de multiplication est commutative dans GL_∞.