Indications de TD 4

Exercice 1. 1. On peut prendre $C_n = A_n$ pour la première question. Pour la deuxième question, on peut écrire pour chaque A_n comme le quotient d'un groupe abélien libre par un sous groupe abélien libre : $0 \to F_n \to G_n \to A_n \to 0$. On définit $C_n = G_n \oplus F_{n+1}$ avec les différentiels naturels.

2. Un exemple trivial : on prend un groupe abélien A qui n'est pas d'engendrement fini, alors le complexe $0 \to A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \to 0$ nous convient.

3. Il y a une erreur.

Exercice 2. 1. Il suffit de casser un complexe en plusieurs suites exactes courtes :

$$0 \to \ker(d_i) \to C_i \to \mathrm{Im}(d_i) \to 0;$$

$$0 \to \mathrm{Im}(d_i) \to \ker(d_{i-1}) \to H_{i-1} \to 0.$$

2. $\chi(C_\bullet) = -200 + 360 - 359 + \cdots + 2 - 1 = -20$, mais si C_i est exacte, alors par 1, $\chi(C_\bullet) = 0$.

Exercice 3. 1. L'exactitude implique $\dim A + \dim C = \dim B$. Comme deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension, $A \oplus C \simeq B$. Pour un contre exemple, on peut prendre $R = \mathbf{Z}$, $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0$, alors $\mathbf{Z}$ n'est pas isomorphe à $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ parce qu'il est sans torsion.

2. $(a) \Rightarrow (b)$ et $(a) \Rightarrow (c)$ sont triviaux.
$(b) \Rightarrow (a)$: $s \circ g \in \mathrm{Ent}(B)$ est un projecteur, on définit $q := \mathrm{id}_B - s \circ g : B \to B$, alors $\mathrm{Im}(q) = \ker(g) = \mathrm{Im}(f)$, donc la composée $u : A \xrightarrow{f} \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(q)$ est un isomorphisme. On vérifie facilement que $r := u^{-1} \circ 1 : B \to A$ est la projection qui nous convient.
La preuve de $(b) \Rightarrow (a)$ est similaire.

3. Si C est libre, alors la condition (b) dans 2 est vérifiée.

Exercice 4. Comme ce complexe est exact, on note $I_i := \mathrm{Im}(d_{i+1}) = \ker(d_i) \subset C_i$ qui est un module libre parce que et on a des suites exactes courtes

$$0 \to I_i \to C_i \to I_{i-1} \to 0.$$

Note bien que $I_0 = 0$ (et donc $I_1 = C_0$ qui est libre). On montre par récurrence que les I_i sont tous projectifs. Donc tous ces suites sont scindées et on peut identifier D_i avec $I_i \oplus I_{i-1}$.

Exercice 5. Ils sont des conséquences directes de la suite exacte longue associée à la suite exacte courte des complexes.

Exercice 6. 1. Par la méthode de 'chase au diagramme'.

2. Il suffit d'écrire les deux suites exactes longues et aussi les morphismes de comparaison. Le lemme des cinq nous permet de conclure.

Exercice 7. On peut voir le diagramme comme une suite exacte courte des complexes (les trois colonnes sont trois complexes), la suite exacte longue associée nous permet de déduire l'exactitude de la troisième colonne.

Exercice 8. 1. On a une suite exacte courte des complexes (on utilise le fait que C_* est sans torsion) :

$$0 \to C_* \xrightarrow{n} C_* \to C_*/n \to 0.$$

On peux donc conclure par la suite exacte longue associée.

2. On a des fleches de comparaison entre deux suites exactes courtes des complexes :

$$0 \to C_* \xrightarrow{n} C_* \to C_*/n \to 0;$$

$$0 \to D_* \xrightarrow{n} D_* \to D_*/n \to 0.$$

Ils induisent des fleches de comparaisons entre deux suites exactes longues associées. On peut conclure par le lemme de cinq.
Comme un contre-exemple, on peut prendre C_* et D_* comme complexes concentré en degré zero avec le groupe $\mathbf{Z}$, et le morphisme f donné par multiplication par $n+1$.

Exercice 9. 1. C'est une vérification directe.

2 et 3 sont par la définition.

4. Il y a une suite exacte courte des complexe

$$0 \to C^*(G, M') \to C^*(G, M) \to C^*(G, M'') \to 0,$$

où les deux fleches non-triviales sont données naturellement par f_1 est f_2. La suite exacte longue associée est exactement la suite exacte longue des cohomologie des groupes.

Exercice 10. Un typo : remplacer c par x dans la définition de la différentielle. Dernière phrase : f_* induit des isomorphismes en homologie.
1. $\begin{pmatrix} -d_C & f \\ 0 & d_D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -d_C & f \\ 0 & d_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_C^2 & -d_C f + f d_D \\ 0 & d_D^2 \end{pmatrix} = 0.$

2. La suite exacte courte de complexes

$$0 \to D \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{p} C[-1] \to 0$$

est facile à construire : i est l'inclusion naturelle en chaque degré ; en degré j, p est $(-1)^j\pi$ où π est la projection naturelle (on peut dire simplement que p est la projection naturelle avec une signe alternative selon la parité du degré). La suite exacte longue associée est exactement celle dans l'énoncé. La coïncidence de l'application de connexion et f_* vient de la construction de l'application de connexion pour la suite exacte longue. Finalement, f_* induit des isomorphismes en homologie (*i.e.* f est un *quasi-isomorphisme*) si et seulement si les ∂ sont des isomorphismes, si et seulement si $C(f)$ a pour les groupes d'homologie nuls.

Exercice 11. On rappelle qu'on dit que $C(f)$ est *contractile* si les deux morphismes des complexes

$$\mathrm{id}_{C(f)} : C(f) \to C(f),$$

$$0 : C(f) \to C(f)$$

sont homotopes.

On note la suite exacte $0 \to D \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{p} C[-1] \to 0$.

1. Par l'hypothèse, $i = \mathrm{id}_{C(f)} \circ i \sim 0 \circ i = 0 : D \to C(f)$, *i.e.* l'injection $i : D \to C(f)$ est homotope à zéro. On note l'homotopie $h : D \to C(f)[1]$, par définition : $dh + hd = i$. On prétend que $r := \pi \circ h : D \to C$ est un morphisme de complexes :

$$(\pi h)d - d(\pi h) = \pi(i - dh) + d\pi h = \pi i + (d\pi + \pi d)h = 0.$$

De plus, on va vérifier qu'il est un inverse homotopique à droite de f. En effet, on note $\pi' : C(f) \to D$ la projection naturelle, alors on a $\mathrm{id}_D = \pi' i$ et $f\pi + d\pi' = \pi' d$. On en déduit alors :

$$\mathrm{id}_D - fr = \pi' i - f\pi h = \pi'(dh + hd) - f\pi h = (f\pi + d\pi')h + \pi' hd - f\pi h = d\pi' h + \pi' hd.$$

Autrement-dit, $\pi' h$ est une homotopie entre id_D et fr.

2. Même type d'argument que 1 pour obtenir un inverse homotopique à gauche l. Puis si on note l l'inverse homotopique à gauche, r l'inverse homotopique à droite, alors $l \sim l \circ f \circ r \sim r$, donc $f \circ l \sim f \circ r \sim \mathrm{id}$, *i.e.* l est aussi l'inverse à droite.

Exercice 12. 1. C'est une proposition standard dans le cours. La réciproque n'est pas vrai, il suffit de trouve un complexe qui est exact mais pas contractile (alors l'identité est un quasi-isomorphisme mais pas une équivalence de homotopie.) Par exemple, le complexe $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0$.

2. On utilise la propriété de module projective pour construire la rétraction.

3. f est un quasi-isomorphisme implique que le cône $C(f)$ est un complexe exact par Exercice 8. Par construction du cône, tous les termes sont libres, donc $C(f)$ est contractile (par 2.). Finalement, Exercice 9 conclut que f est une équivalence d'homotopie.